

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна  
Должность: проректор по учебной работе  
Дата подписания: 10.11.2022 16:40:56  
Уникальный программный ключ:  
0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1c11eabbf73e943df4a4851fda56d089

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Юго-Западный государственный университет»  
(ЮЗГУ)

Кафедра вычислительной техники

УТВЕРЖДАЮ  
Проректор по учебной работе  
О.Г. Локтионова  
«15» 02 2021 г.

## УСТОЙЧИВОСТЬ ИНВАРИАНТНЫХ МНОЖЕСТВ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ

Методические указания для студентов направлений  
подготовки 09.03.01 и 09.04.01

Курск 2021

УДК 534.1

Составитель Ж.Т. Жусубалиев

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент *Ю. А. Халин*

**Устойчивость инвариантных множеств дискретных моделей:**  
методические указания для студентов направлений подготовки 09.03.01 и  
09.04.01/ Юго-Зап. гос. ун-т; сост. Ж.Т. Жусубалиев. – Курск, 2021. – 12 с.:  
ил.6. – Библиогр.: с. 12.

Описывается теория устойчивости простейших инвариантных множеств дискретных  
моделей. Предназначены для студентов направлений подготовки 09.03.01, 09.04.01 очной и  
заочной форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . . . . .2021. Формат  $60 \times 84^{1/16}$ .  
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 50 экз. Заказ . Бесплатно.  
Юго-Западный государственный университет.  
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

## 1. Цель работы

Изучение теории локальной устойчивости одномерных отображений.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим дискретную динамическую систему, заданную непрерывным отображением

$$x_{k+1} = f(x_k). \quad (1)$$

Пусть  $x_*$  – неподвижная точка отображения (1), т.е. корень уравнения

$$f(x) - x = 0.$$

Устойчивость  $x_*$  определяется мультипликатором  $f'(x_*)$  неподвижной точки. Неподвижные точки делятся на два класса: *гиперболические* или *негиперболические*.

**Определение:** Неподвижная точка  $x_*$  называется *гиперболической*, если

$$|f'(x_*)| \neq 1,$$

иначе,  $x_*$  – *негиперболическая*.

## 3. Устойчивость гиперболических неподвижных точек

**Теорема 1.** Пусть  $x_*$  – гиперболическая неподвижная точка отображения  $f$ , где  $f$  непрерывно дифференцируемая функция в  $x_*$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

- Если

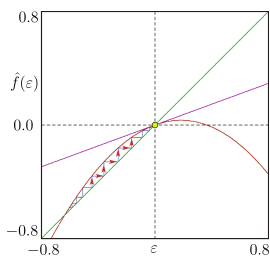
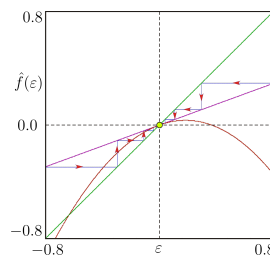
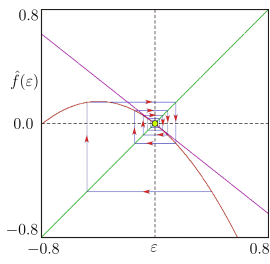
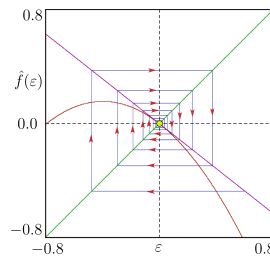
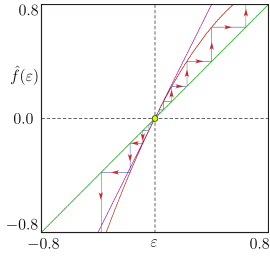
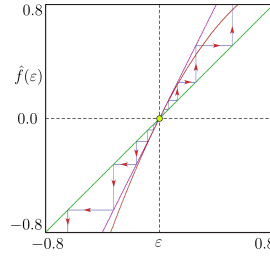
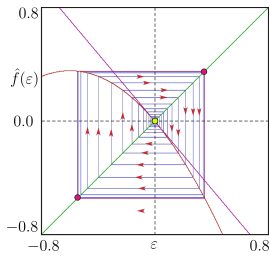
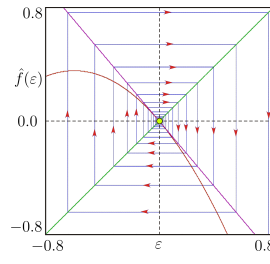
$$|f'(x_*)| < 1 \quad \text{т.е.} \quad -1 < f'(x_*) < 1,$$

то  $x_*$  асимптотически устойчива.

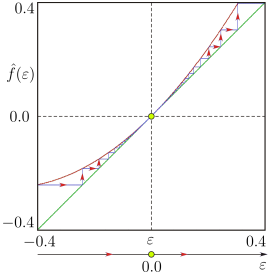
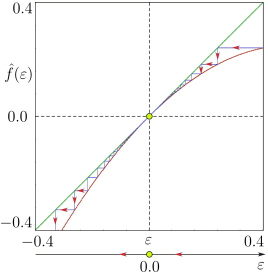
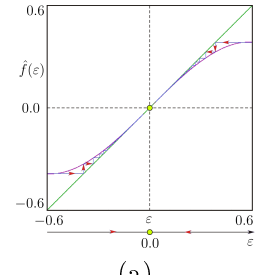
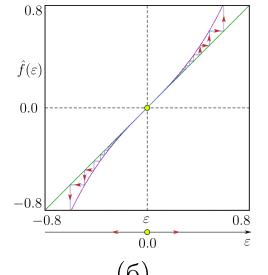
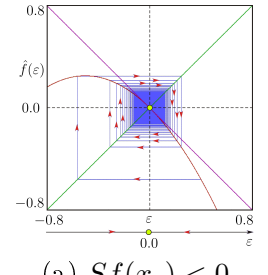
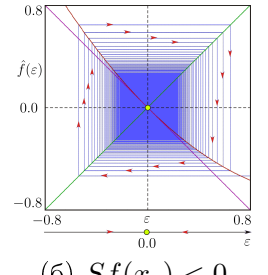
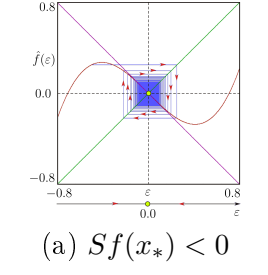
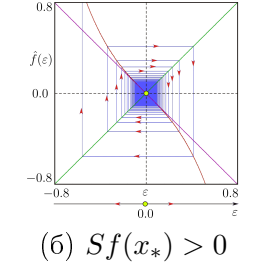
- Если

$$|f'(x_*)| > 1 \quad \text{т.е.} \quad f'(x_*) < -1 \quad \text{or} \quad f'(x_*) > 1,$$

то неустойчива.

$f'(x_*)$	$\varepsilon_{k+1} = f(x_* + \varepsilon_k) - f(x_*) \equiv \hat{f}(\varepsilon_k)$	$\varepsilon_{k+1} = f'(x_*)\varepsilon_k \equiv \hat{f}(\varepsilon_k)$	$x_{k+1} = ax_k \equiv f(x_k)$
$0 < f'(x_*) < 1$			Траектория монотонно сходится к неподвижной точке $x_* = 0.0$ : $\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x_0) = x_*$ , $x_* = 0$ . $x_*$ – устойчивая неподвижная точка ( $0.0 < f'(x_*) < 1.0$ ). Здесь $f^k(x_0) = f(f(\dots f(x_0)\dots))$ – $k$ -я итерация функции $f$ . Для линейного отображения $f^k(x_0) = a^k x_0$ .
$-1 < f'(x_*) < 0$			Траектория колебательно сходится к неподвижной точке $x_* = 0.0$ . Переменная $x_k$ меняет знак на каждой итерации: $\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x_0) = x_*$ , $x_* = 0.0$ . $x_*$ – устойчивая неподвижная точка ( $-1.0 < f'(x_*) < 0.0$ ).
$f'(x_*) > 1$			Траектория монотонно удаляется от неподвижной точки $x_* = 0.0$ : $\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x_0) = \pm\infty$ . $x_*$ – неустойчивая неподвижная точка ( $f'(x_*) > 1.0$ ).
$f'(x_*) < -1$			Траектория колебательно удаляется от неподвижной точки $x_* = 0.0$ . Переменная $x_k$ меняет знак на каждой итерации: $\lim_{k \rightarrow \infty}  f^k(x_0)  = \infty$ , $x_* = 0$ . $x_*$ – неустойчивая неподвижная точка ( $f'(x_*) < -1.0$ ).

#### 4. Устойчивость негиперболических неподвижных точек

Мультипликатор $f'(x_*)$	$\varepsilon_{k+1} = f(x_* + \varepsilon_k) - f(x_*) \equiv \hat{f}(\varepsilon_k)$		Условия устойчивости
$f'(x_*) = 1$	 <p>(a) <math>f''(x_*) \neq 0</math></p>	 <p>(б) <math>f''(x_*) \neq 0</math></p>	<p><b>Теорема 2.</b>  Пусть <math>x_*</math> – неподвижная точка <math>f(x)</math>, такая, что <math>f'(x_*) = 1</math>. Если производные <math>f'(x)</math>, <math>f''(x)</math> и <math>f'''(x)</math> непрерывны в <math>x_*</math>, тогда справедливы следующие утверждения:  Если <math>f''(x_*) \neq 0</math>, то <math>x_*</math> асимптотически полуустойчива слева, если <math>f''(x_*) &gt; 0</math> и асимптотически полуустойчива справа если <math>f''(x_*) &lt; 0</math>.  Если <math>f''(x_*) = 0</math> и <math>f'''(x_*) &gt; 0</math>, то <math>x_*</math> неустойчива.  Если <math>f''(x_*) = 0</math> и <math>f'''(x_*) &lt; 0</math>, то <math>x_*</math> асимптотически устойчива.</p>
$f'(x_*) = 1$	 <p>(a)</p>	 <p>(б)</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• (a) <math>f''(x_*) = 0, f'''(x_*) &lt; 0</math>;</li> <li>• (б) <math>f''(x_*) = 0, f'''(x_*) &gt; 0</math>.</li> </ul>
$f'(x_*) = -1$	 <p>(a) <math>Sf(x_*) &lt; 0</math></p>	 <p>(б) <math>Sf(x_*) &lt; 0</math></p>	<p><b>Теорема 3.</b>  Пусть <math>x_*</math> – неподвижная точка <math>f(x)</math>, такая что <math>f'(x_*) = -1</math>. Если производные <math>f'(x)</math>, <math>f''(x)</math>, <math>f'''(x)</math> непрерывны в <math>x_*</math>, тогда следует различать два случая:  (1) Если <math>Sf(x_*) &lt; 0</math>, то <math>x_*</math> асимптотически устойчива.  (2) Если <math>Sf(x_*) &gt; 0</math>, то <math>x_*</math> неустойчива. Здесь <math>Sf(x)</math> – производная Шварца.</p>
$f'(x_*) = -1$	 <p>(a) <math>Sf(x_*) &lt; 0</math></p>	 <p>(б) <math>Sf(x_*) &gt; 0</math></p>	

Заметим, что производная Шварца  $Sf(x)$

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left[ \frac{f''(x)}{f'(x)} \right]^2.$$

Если  $f'(x_*) = -1$ , то

$$Sf(x_*) = -f'''(x_*) - \frac{3}{2} [f''(x_*)]^2.$$

## 5. Задачи к лабораторной работе

1. Найдите неподвижную точку  $x_*$  и отвечающий ей мультипликатор  $f'(x_*)$ . Используя этот результат, определите значения параметра  $a$  при которых неподвижная точка асимптотически устойчива или неустойчива (неустойчива либо полу-устойчива слева или справа). Напишите программу расчета итерационных диаграмм (cobweb diagrams) (см. лаб. раб. №1). Проиллюстрируйте решение задачи на итерационных диаграммах.

1.  $x_{k+1} = \frac{a \cdot x_k^2}{1 + x_k^2} \equiv f(x_k), a > 0.$
2.  $x_{k+1} = \frac{(1 + a) \cdot x_k}{1 + a \cdot x_k} \equiv f(x_k).$
3.  $x_{k+1} = 1 - a \cdot x_k^2 \equiv f(x_k).$
4.  $x_{k+1} = (1 + a) \cdot x_k - x_k^3 \equiv f(x_k).$
5.  $x_{k+1} = (1 + a) \cdot x_k + x_k^3 \equiv f(x_k).$

### УКАЗАНИЯ: Порядок выполнения работы

- 1. Изучить материалы лекции и методических указаний.
- 2. Дано отображение (взять свой вариант)

$$x_{k+1} = f(x_k). \quad (1)$$

- 3. Найти корни уравнения

$$f(x) - x = 0. \quad (2)$$

Пусть  $x_*$  — неподвижная точка отображения (1), т.е. корень уравнения (2).

- 4. Найти производную  $f'(x)$ .
- 5. Вычислить мультипликатор неподвижной точки:

$$f'(x_*) = f'(x)|_{x=x_*}$$

- 6. Проверить условие гиперболичности неподвижной точки  $x_*$ :

$$|f'(x_*)| \neq 1.$$

- 7. Если неподвижная точка  $x_*$  гиперболическая, то устойчивость определяется теоремой 1, иначе — теоремами 2 и 3 (см. пример решения задачи).
- 8. Проверьте результаты решения задач численно путем построения итерационных диаграмм и сформулируйте выводы.
- 9. Оформите отчет по лабораторной работе.

## 6. Пример выполнения работы

- (a) Find the fixed points of the map

$$x_{k+1} = a - \frac{1}{4} - x_k^2 \equiv f(a, x_k).$$

(b) Then determine the values of the parameter  $a$  for which a fixed point is asymptotically stable or unstable (unstable or semiasymptotically stable from the left or from the right).

- (a) Найдите неподвижные точки отображения

$$x_{k+1} = a - \frac{1}{4} - x_k^2 \equiv f(a, x_k).$$

- (б) Затем определите значения параметра  $a$  при которых неподвижная точка асисптотически устойчива или неустойчива (неустойчива либо полу-устойчива слева или справа).
- **Замечание:** численные расчеты итерационных диаграмм в этой работе не делать (будет отдельная лаб. работа).

## 6.1. Решение

- 1. Для заданного отображения

$$x_{k+1} = a - \frac{1}{4} - x_k^2 \equiv f(a, x_k)$$

выпишем функцию  $f(a, x)$ :

$$f(a, x) = a - \frac{1}{4} - x^2.$$

- 2. Найдем неподвижные точки. Вспомним определение неподвижной точки. Неподвижная точка — есть корень уравнения

$$f(a, x) - x = 0 \quad \text{или} \quad x = f(a, x),$$

т.е. абсцисса точки пересечения графиков двух функций: биссектрисы  $y = x$  и  $y = f(a, x)$ .

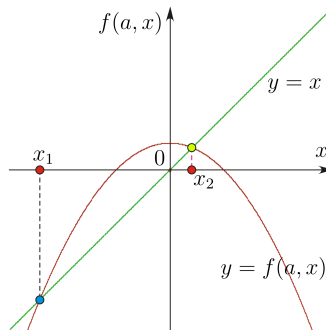


Рис. 1.

На графике (рис 1)  $x_1, x_2$  — неподвижные точки отображения  $x_{k+1} = f(a, x_k)$ , т.е. корни уравнения  $f(a, x) - x = 0$ :

$$f(a, x_1) - x_1 = 0 \quad \text{и} \quad f(a, x_2) - x_2 = 0.$$

- 3. Подставив выражение для  $f(a, x)$  в

$$f(a, x) - x = 0, \quad f(a, x) = a - 1/4 - x^2,$$

получим уравнение для неподвижных точек:

$$a - 1/4 - x^2 - x = 0 \quad \text{или} \quad x^2 + x - a + \frac{1}{4} = 0.$$

- 4. Это уравнение имеет два действительных корня:

$$x_1 = -\frac{1}{2} - \sqrt{a} \quad \text{и} \quad x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{a},$$

если  $a > 0$ ,



отвечающие двум неподвижным точкам. Если  $a = 0$ , то отображение имеет единственную неподвижную точку  $x_* = -1/2$ .

- 5. Найдем производную  $f'(a, x) = \frac{\partial f(a, x)}{\partial x}$ .

Так как  $f(a, x) = a - 1/4 - x^2$ , то

$$f'(a, x) = \frac{\partial f(a, x)}{\partial x} = -2x$$

- 6. Вычислим мультипликаторы

$$f'(a, x_{1,2}) = f'(a, x)|_{x=x_{1,2}}$$

неподвижных точек, подставив выражения  $x_1 = -\frac{1}{2} - \sqrt{a}$  и  $x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{a}$  в формулу для  $f'(a, x)$ :

$$f'(a, x_1) = -2 \cdot x_1 = -2 \cdot \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{a}\right) = 1 + 2\sqrt{a};$$

$$f'(a, x_2) = -2 \cdot x_2 = -2 \cdot \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{a}\right) = 1 - 2\sqrt{a}.$$

- 7. Определим устойчивость первой неподвижной точки  $x_1$ :

$$x_1 = -\frac{1}{2} - \sqrt{a}, \quad f'(a, x_1) = 1 + 2\sqrt{a}.$$

- Проверим условие гиперболичности  $x_1$ :

$$|f'(a, x_1)| \neq 1 \Rightarrow |1 + 2\sqrt{a}| \neq 1.$$

- Отсюда

$$1 + 2\sqrt{a} > 1$$

для всех  $a > 0$ . Следовательно,  $x_1 = -\frac{1}{2} - \sqrt{a}$  – неустойчивая гиперболическая неподвижная точка, если  $a > 0$ . Если  $a = 0$ , то  $x_1$  – негиперболическая неподвижная точка с мультипликатором  $f'(0, x_1) = +1$ .

- 8. Определим устойчивость негиперболической точки

$$x_1 = -\frac{1}{2} - \sqrt{a}, \quad a = 0 \Rightarrow$$

$$x_1 = -\frac{1}{2}$$

с мультипликатором  $f'(0, x_1) = +1$ .

- Так как  $f'(a, x_1) = +1$  при  $a = 0$ , то устойчивость  $x_1 = -1/2$  определяется теоремой 2.
- Найдем вторую производную  $f''(a, x_1)$ , при  $a = 0$ :

$$f''(a, x_1) = \frac{\partial^2 f(a, x_2)}{\partial x^2} = -2 < 0.$$

- Поскольку

$$f''(a, x_1)|_{a=0} = -2 < 0,$$

то  $x_1$  — полу-асимптотически устойчива справа.

- 9. На графике (рис. 2)  $x_1$  — неустойчивая гиперболическая точка,  $f'(a, x_1) > 1$ ,  $a > 0$ .

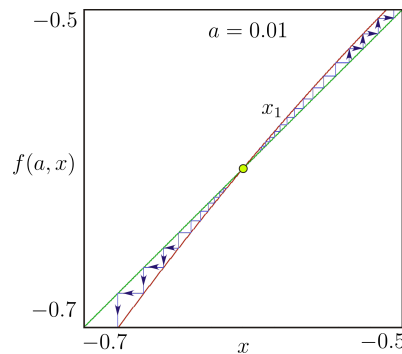


Рис. 2.

- 10. На графике (рис. 3)  $x_1$  — негиперболическая точка с  $f'(a, x_1) = +1$  при  $a = 0$ ;  $x_1$  — полу-асимптотически устойчива справа, т.к.  $f''(a, x_1) < 0$  при  $a = 0$
- 11. Вторая неподвижная точка  $x_2$

$$x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{a}$$

с мультипликатором

$$f'(a, x_2) = 1 - 2\sqrt{a}.$$

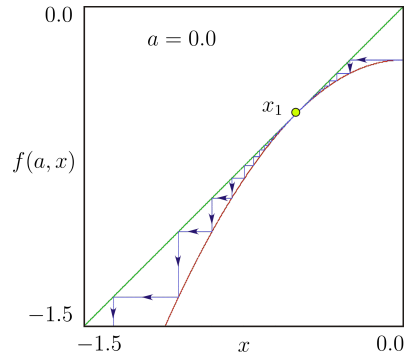


Рис. 3.

- 12. Если

$$|f'(a, x_2)| < 1, \quad f'(a, x_2) = 1 - 2\sqrt{a}$$

то  $x_2$  – устойчивая гиперболическая неподвижная точка. Отсюда условие устойчивости согласно теореме 2

$$-1 < f'(a, x_2) < +1 \Leftrightarrow -1 < 1 - 2\sqrt{a} < +1.$$

Решив это неравенство относительно параметра  $a$ , получим область устойчивости

$$0 < a < 1.$$

Неподвижная точка  $x_2$  неустойчива, если  $|f'(a, x_2)| > 1$ . Поскольку  $a \geq 0$ , то  $x_2$  неустойчива, если  $a > 1$  с  $f'(a, x_2) < -1$ .

- 13. На графике (рис. 4)  $x_2$  – устойчивая гиперболическая точка,  $-1 < f'(a, x_1) < 1$ ,  $a = 0.8$ .

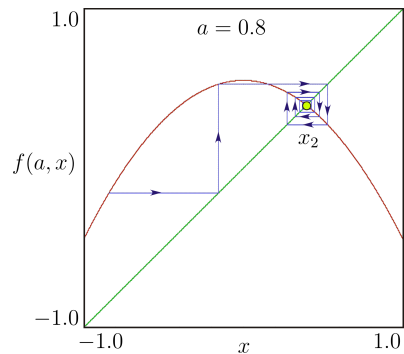


Рис. 4.

- 14. На графике (рис. 5)  $x_2$  – неустойчивая гиперболическая точка с  $f'(a, x_1) < -1$  при  $a > 1$ .

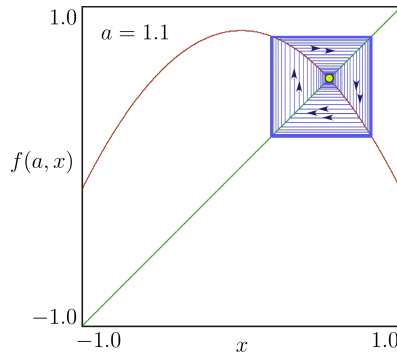


Рис. 5.

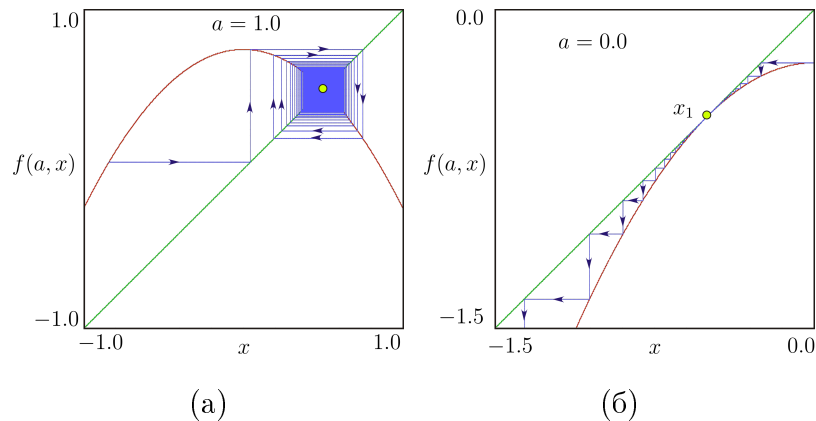


Рис. 6.

- 15. На графике (рис. 6(a))  $x_2$  – асимптотически устойчивая негиперболическая точка с  $f'(a, x_2) = -1$  при  $a = 1$  т.к. согласно теореме 3:  $Sf(a, x_2) < 0$  при  $a = 1.0$ .
- 16.  
 На графике (рис. 6(б))  $x_2 = x_1$  – негиперболическая точка с  $f'(a, x_2) = f'(a, x_1) = +1$  при  $a = 0$ ;  $x_2$  – полу- асимптотически устойчивая справа, т.к.  $f''(a, x_2) < 0$  при  $a = 0.0$ .

### Библиографический список

1. *Kuznetsov Yu. A.* Elements of Applied Bifurcation Theory.— New York: Springer–Verlag, 2004.
2. *Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E.* Bifurcations and Chaos in Piecewise-Smooth Dynamical Systems. — Singapore: World Scientific, 2003.
3. *Жусубалиев Ж. Т.* Хаотическая динамика в импульсных системах: учебное пособие/ Ж. Т. Жусубалиев, В. Г. Рубанов, В. С. Титов, О. О. Яночкина. – Курск; Белгород: Изд-во БГТУ, 2018. - 143 с.