МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра программной инженерии

УТВЕРЖДАЮ:

УТВЕРЖДАЮ:
Проректор по учебной работе
_________ О.Г. Локтионова
«28» 10 _______________2020 г.

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Методические указания для выполнения лабораторной работы по дисциплине «Дискретная математика» для студентов направления подготовки 09.03.04 Программная инженерия

Курск - 2020

УДК 519.8

Составитель: Р.А. Томакова

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент *А.В. Малышев*

Линейное программирование: методические указания для выполнения лабораторной работы по дисциплине «Дискретная математика» для студентов направления подготовки 09.03.04 Программная инженерия/ Юго-Зап. гос. ун-т; сост. Р.А. Томакова. Курск, 2020. 21 с.

Составлены в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования направления подготовки 09.03.04 Программная инженерия и на основании учебного плана направления подготовки 09.03.04 Программная инженерия.

В методических указаниях представлены основные понятия и свойства задач линейного программирования, необходимые для выполнения лабораторной работы по дисциплине «Дискретная математика». Сформулированы требования для ее выполнения, разобраны примеры выполнения заданий, приведены вопросы к защите.

Предназначены для студентов, обучающихся направления подготовки 09.03.04 Программная инженерия (профиль «Разработка программно-информационных систем») всех форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 28.10.20 . Формат 60×84 1/16.
Усл. печ. л. 2,2 . Уч.- изд. л. 2,0. Тираж 25 экз. Заказ. 1390. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Цель работы:

1) приобретение навыков построения математических моделей задач линейного программирования;

2) исследование способов описания проблемной ситуации, которые могут быть формализованы в виде задач линейного программирования;

3) изучение методов решения задач линейного программирования.

ЗАДАНИЕ

1. В соответствии вариантом задания, составить математическую модель задачи линейного программирования.
2. Произвести переход от ограничений типа неравенств к ограничениям типа равенств.
3. Разработать схему алгоритма решения задачи линейного программирования.
4. Реализовать составленную модель задачи линейного программирования, представить листинг текста программы, протоколы текстов решений.
5. Сделать выводы по работе.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Линейное программирование (ЛП) возникло в связи с рассмотрением вопросов о нахождении оптимальных вариантов при решении различных планово-производственных задач. Основоположником является Л.Канторович, который в 1939 году опубликовал работы по математическому обоснованию организации и планированию работ. К таким задачам относятся задачи нахождения наиболее рационального способа использования сырья и материалов, определение оптимальных производственных режимов и т. п.

Формализация проблемы как задачи ЛП подразумевает следующие этапы:

1) понять проблему, составить описательную модель задачи;

2) идентифицировать основные переменные задачи;

3) выбрать некоторую количественную меру эффективности для целевой функции;

4)представить эту меру эффективности как линейную функцию относительно основных переменных;

5) идентифицировать и представить все ограничения как линейные уравнения или неравенства относительно основных переменных;

6) собрать количественные данные или сделать соответствующие оценки для всех параметров модели.

Основные математические предположения для задачи ЛП (основные ограничения на применение):

определенность (*детерминированность)* – предполагается, что все параметры модели известны точно или могут быть оценены;

линейность (*эквивалентна пропорциональности и аддитивности*) – предполагается, что все функциональные соотношения модели линейны относительно основных переменных;

пропорциональность – предполагается, что эффект влияния основной переменной задачи пропорционален значению этой переменной;

аддитивность – предполагается, что эффект влияния нескольких основных переменных задачи равен сумме эффектов от каждой переменной.

Математическая постановка задачи линейного программирования

В общем случае задача линейного программирования формулируется следующим образом: найти значения переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, доставляющих минимум целевой функции

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \min \qquad (1)$$

и удовлетворяющих ограничениям вида:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &\le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &\le b_2 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n &\le b_m \end{aligned} \qquad (2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}$$

Характерная особенность данной задачи заключается в том, что число уравнений меньше числа неизвестных, т. е. любое решение системы (2) с неотрицательными значениями переменных будем называть ***допустимым решением*** ЛП.

Вектор $\overrightarrow{X^*} = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, доставляющий максимум (минимум) целевой функции функции $f(x)$ при заданных ограничениях, называется ***оптимальным решением*** задачи ЛП.

Решить задачу ЛП означает найти оптимальное решение $\overrightarrow{X^*} = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ и соответствующее значение целевой функции $f^*(X^*)$, т. е. значение задачи ЛП.

Каноническая форма линейного программирования

В канонической форме задач линейного программирования формулируется следующим образом:
найти значение переменных $x_j \geq 0$, $j = \overline{1,n}$, доставляющих минимум целевой функции

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \tag{3}$$

и удовлетворяющих ограничениям вида:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \\ &x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n} \end{aligned} \tag{4}$$

Нетрудно показать, что общую задачу линейного программирования можно свести к *канонической форме* введением дополнительной неотрицательной переменной. Например, условие

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1;$$

эквивалентно двум условиям:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1,$$
$$x_{n+1} \geq 0.$$

Условие

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \geq b_2;$$

эквивалентно двум условиям:

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n - x_{n+1} = b_2,$$

$$x_{n+1} \geq 0.$$

Рассмотрим задачу линейного программирования для двух переменных: найти значения переменных x_1, x_2, которые доставляют максимум функции

$$f(x_1, x_2) = 8x_1 + 12x_2 \to \max \tag{5}$$

и удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 220 \\ 2x_1 + x_2 \leq 260 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 640 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \tag{6}$$

Рассмотрим геометрическую интерпретацию задачи в плоскости координат x_1, x_2. Условия, накладываемые на переменные x_1, x_2, означают, что область допустимых значений x_1, x_2 для каждого условия лежит в заштрихованной полуплоскости (рис. 1).

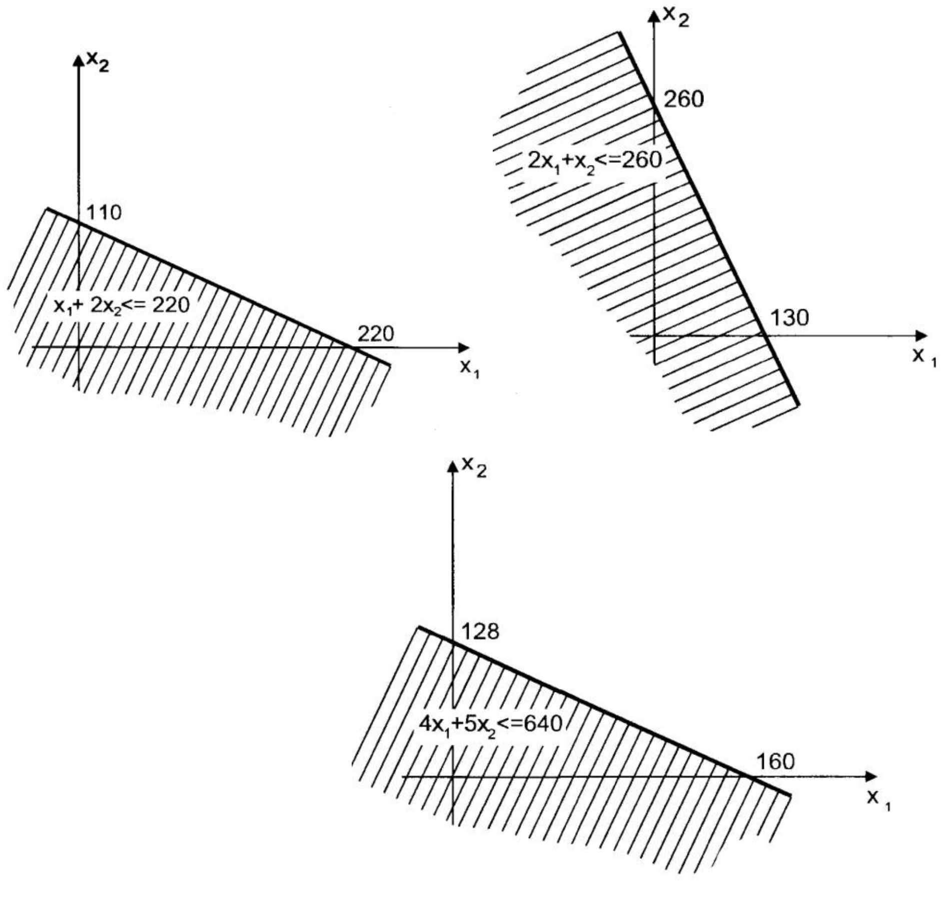

Рисунок 1- Область допустимых значений для каждого неравенства

Область допустимых значений, удовлетворяющая всем ограничениям, представляет собой замкнутый выпуклый многоугольник ОАВСД (рис. 2).

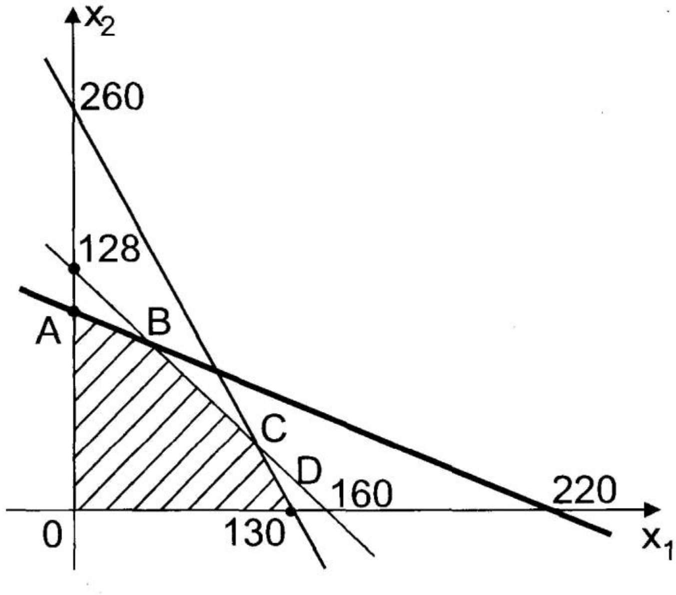

Рисунок 2 - Область допустимых значений для системы ограничений

Нахождение оптимального решения требует определения направления наискорейшего роста целевой функции $f(x_1, x_2) = 8x_1 + 12x_2$.

Такое направление задается градиентом целевой функции:

$$grad\ f(x_1, x_2) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}).$$

Так как $f(x_1, x_2) = 8x_1 + 12x_2$, то направление наискорейшего роста функции f определяется вектором $\vec{c}(8{,}12)$. Вектор также является вектором нормали к линии уровня целевой функции $8x_1 + 12x_2 = const$.

Точка пересечения области допустимых решений OABCD и прямой, соответствующей максимальному значению целевой функции, и будет решением задачи ЛП.

Максимум целевой функции достигается в точке $B(x_1^*, x_2^*)$, Оптимальное решение достигается в точке $x_1^* = 60$, $x_2^* = 80$, при этом значение целевой функции в этой точке $F^*(x_1^*, x_2^*) = 1440$.

Решим эту задачу иначе *симплекс-методом*.

Приведем задачу к канонической форме, введя дополнительные переменные x_3, x_4, x_5, и запишем задачу в виде

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 220 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 260 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_5 = 640 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} \qquad (7)$$

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = -8x_1 - 12x_2 - 0x_3 - 0x_4 - 0x_5 \to \min \qquad (8)$$

Следует найти значение переменных x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, которые удовлетворяют условиям (7) и (8) и доставляют минимум функции $F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$.

Поскольку число переменных в системе (7) больше числа уравнений, то одно из возможных решений можно найти, если $m - n$ =5-3=2 каких-либо переменных положить равными 0. Положим $x_1 = x_2 = 0$, тогда x_3 =220, x_4 =260, x_5 =640. Такое решение назовем *допустимым базисным решением*. Ему соответствует значение целевой функции $F = 0$.

Найдем еще какое-нибудь базисное решение. Возьмем в качестве базисных переменных переменные x_3, x_4, x_5, а переменные x_1, x_2 назовем свободными. Выразим базисные переменные через свободные:

$x_3 = 22 - x_1 - 2x_2$; $x_4 = 260 - 2x_1 - x_2$; $x_5 = 640 - 4x_1 - 5x_2$.

Целевая функция примет вид $F = -8x_1 - 12x_2$;

Очевидно, что увеличивая значение x_1, x_2, можно уменьшить значение целевой функции.

Примем x_1, x_3, x_5 в качестве базисных переменных, а переменные x_2, x_4 - за свободные переменные. Получим:

$x_1 = 130 - x_2 / 2 - x_4 / 2$;

$x_3 = 90 - 3x_2 / 2 + x_4 / 2$;

$x_5 = 120 - 3x_2 + 2x_4$.

Целевая функция при этом примет вид

$F = -1040 - 8x_2 + 4x_4$.

Допустимое базисное решение

x_1=130; x_3 =90; x_5 =120;

x_4 =0; x_1 =0; F = -1040.

Возьмем в качестве базисных переменных x_1, x_3, x_2, в качестве свободных переменных x_4, x_5. Выразим базисные переменные через свободные. Получим:

$x_1 = 110 - 5x_4 / 6 + x_5 / 6$;

$x_2 = 40 + 2x_4 / 3 - x_5 / 3$;

$x_3 = 30 - x_4 / 2 + x_5 / 3$;

Целевая функция примет вид F = -1360- 4/3x_4+8/3x_5.

Допустимое базисное решение x_1=110; x_2=40; x_3=30; F =-1360.

Выбирая за новые свободные переменные x_3 и x_5,а за новые базисные - x_1, x_2, x_4, получим

x_1=60+5/3 x_3 -2/3 x_5;

x_2 =80-4/3 x_3 - x_5 /3;

x_4 =60-2 x_3 + x_5.

Целевая функция примет вид F =-1440+8/3 x_3 +4/3 x_5.

Очевидно, что нельзя изменить значение x_1 и x_2, не увеличив значение целевой функции. Следовательно, найденное решение - оптимально x_1=60; x_2=80.

• Алгоритм симплекс-метода носит итерационный характер. Один шаг метода состоит в построении очередного опорного решения. В зависимости от матрицы системы ограничений (4) возможны следующие случаи:

1. Система (4) не имеет решений, т.е. несовместна. В этом случае задача линейного программирования неразрешима.

2. Система (4) не имеет допустимых решений и, значит, задача линейного программирования не имеет решения.

3. Система (4) имеет единственное допустимое решение. В этом случае единственное решение системы является оптимальным.

4. Система (4) имеет бесконечно много допустимых решений, но целевая функция не ограничена снизу на этом множестве допустимых решений и, значит, задача линейного программирования не разрешима.

5. Система (4) имеет бесконечное множество допустимых решений и целевая функция ограничена на множестве допустимых решений. В этом случае задача линейного программирования имеет альтернативные оптимальные решения.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

1. Задача об использовании ресурсов

Для изготовления N видов продукции $P_1,P_2,...,P_n$ предприятие использует m видов ресурсов $S_1,S_2,...,S_m$ (сырье, топливо, материалы). Запасы ресурсов каждого вида ограничены и равны $B_1,B_2,...,B_m$. На изготовление единицы продукции j-го вида (j=1,...,n) расходуется а единиц i-го ресурса (i=1,...,n). При реализации единицы j-й продукции предприятие получит C_j единиц прибыли. Необходимо составить такой план выпуска продукции, чтобы при ее реализации получить максимальную прибыль.

Таблица 1.

Варианты заданий 1 к лабораторной работе

Вариант	Виды ресурсов	Расход ресурсов на единицу продукции			Запасы	Доход от реализации единицы продукции		
		P1	P2	P3		Ср1	Ср2	Ср3
1	2	3			4	5		
1.	S1	2	1	1	25	6	5	5
	S2	1	1	1	14			
	S3	0	4	2	19			
	S4	3	0	1	24			
2.	S1	2	5	-	300	5	8	-
	S2	4	5	-	400			
	S3	3	0	-	100			
	S4	0	4	-	200			
3.	S1	2	5	-	20	50	40	-
	S2	8	5	-	40			
	S3	5	6	-	30			
4.	S1	2	3	-	19	7	5	-
	S2	2	1	-	13			
	S3	0	3	-	15			
	S4	3	0	-	18			
5.	S1	4	2	1	150 000	100	150	200
	S2	6	0	2	170 000			
	S3	0	2	4	100 000			
	S4	8	7	0	200 000			
6.	S1	12	10	9	13 200	30	32	29
	S2	15	18	20	24 000			
	S3	6	4	4	6 000			
7.	S1	2	5	-	50	1	1	-
	S2	2	1	-	20			
	S3	5	6	-	60			
	S4	1	10	-	90			
8.	S1	1	8	4	6 048	16	25	20
	S2	2	3	2	5 048			
	S3	7	9	5	3 932			
9.	S1	2	3	-	20	11	9	-
	S2	3	1	-	37			
	S3	0	1	-	30			
10.	S1	2	0	-	20	6	6	-
	S2	1	2	-	37			
	S3	1	4	-	30			

2. Задача о смесях

Имеется п продуктов $P_1,P_2,...,P_n$, содержащих m питательных веществ $S_1,S_2,...,S_m$. Пусть a_{ij} (i=1,...,n; j=1,...,m) - количество единиц j-го питательного вещества в единице i-го продукта; b_j -суточная потребность (минимальная норма) организма в j-ом питательном веществе; C_i - стоимость единицы $_i$-го продукта. Требуется выбрать такой рацион суточного питания, т.е. назначить количества продуктов P_1, …, P_n, входящих в него, чтобы условие по питательным веществам были выполнены, а стоимость рациона была минимальной.

Таблица 2.

Варианты заданий 2 к лабораторной работе

Вариант	Виды питательных веществ	Кол-во единиц питательных веществ в един. продукции				Минимальная норма питательных веществ	Стоимость единицы продукции			
		P1	P2	P3	P4		Cp1	Cp2	Cp3	Cp4
1	2	3				4	5			
1.	S1	3	1	-	-	9	4	6	-	-
	S2	1	2	-	-	8				
	S3	1	6	-	-	12				
2.	S1	0.02	0.3	1.2	3.2	3	7.12	8.6	12.3	14.3
	S2	0.8	5.2	0	3.1	18				
	S3	0	1.2	5.4	67	9				
	S4	0.2	8.6	7.2		5				
3.	S1	1.2	1.4	0.8	-	1.6	5	4	5	-
	S2	80	280	240	-	200				
	S3	5	5	100	-	10				
4.	S1	26.5	7.8	0	0	21	14.4	16	12.8	10.5
	S2	51	26	45.7	0	30				
	S3	0	0	5	72.5	500				
5.	S1	1	5	-	-	10	2	3	-	-
	S2	3	2	-	-	12				
	S3	2	4	-	-	16				
	S4	1	0	-	-	1				
6.	S1	0.18	0.24	1.2	-	12	1	1.1	7.5	-
	S2	10	8	200	-	1000				
	S3	15	1	1.5	-	450				
7.	S1	1	2	7.2	0	3	2.3	8.6	7.2	12.5
	S2	3	2.5	0	1.2	6				
	S3	5.2	1.3	3.4	0	8				
	S4	4.1	2.2	1.2	0.3	15				
8.	S1	0.02	1.7	0.8	0	9	8.3	6.7	12.4	18.1
	S2	0.8	0.3	1.2	0.05	12				
	S3	1.2	5.2	0	6.3	14				
	S4	4.2	0.8	1.5	0.95	8				
9.	S1	4.7	0.8	12.1	8.2	9	5.4	3.2	8.1	12.6
	S2	6.2	0.1	5.1	17.1	12				
10.	S1	1.7	0.8	3.2	0	5.2	11.2	8.6	13.4	18.6
	S2	2.1	0.3	0.6	9.1	7				
	S3	5.2	6.3	0	0.1	8				
	S4	1.2	7.2	0.1	0.8	12				

3. ЗАДАЧА О ЗАГРУЗКЕ ОБОРУДОВАНИЯ

Предприятию необходимо выпустить n видов изделий P_1, ..., P_n в количестве N_1, ..., N_n единиц. Для этой цели используют m типов станков T_1, ... , T_m, каждый из которых может обрабатывать все изделия P_i,(i=1,..., n). Производительность каждого станка имеет величину a_{ij} (i=1,...,n; j=1,…,m); себестоимость каждого изделия при обработке его на том или ином станке составляет величину c_{ij} (i=1,...,n; j=1,...,m). Запас мощности станков (рабочее время станка) составляет $b_1, b_2, ..., b_m$ единиц времени. Составить такой план загрузки станков, при котором себестоимость выпуска продукции будет минимальна.

Таблица 3.

Варианты заданий 3 к лабораторной работе

Вариант	Типы станков	Производительность станков				Себестоимость продукции				План выпуска				Запасные мощности
1	2	3				4				5				6
1	T1	30	20	-	-	6	12	-	-	4000	3000	-	-	120
	T2	20	14	-	-	8	10	-	-					100
	T3	15	25	-	-	11	7	-	-					160
2	T1	6	24	-	-	4	47	-	-	30	96	-	-	6
	T2	13	13	-	-	13	26	-	-					6
3	T1	30	50	30	20	2	1	0.5	1.2	3	15	4.5	1.5	240
	T2	60	100	60	40	0.8	1.2	0.9	0.8					150
	T3	18	30	18	12	0.5	1	0.6	0.9					170
4	T1	8	4	2	-	4	6	3	-	160	100	100	-	60
	T2	4	2	1	-	5	4	2	-					70
5	T1	5	10	20	-	6	3	1.5	-	300	500	100	-	40
	T2	1.7	3.3	5	-	6	3	2	-					60
	T3	5	10	25	-	4	2	8	-					30
6	T1	3	7	2	8	12	10	15	18	18	24	13	21	140
	T2	4	8	9	12	16	12	7	3					150
	T3	5	6	8	4	11	6	5	14					180
	T4	7	3	9	5	14	18	6	4					
7	T1	4	7	12	11	8	6	12	24	180	100	130	190	60
	T2	12	14	28	14	3	4	2	3					80
	T3	18	12	16	13	1	3	2	38					120
	T4	21	31	20	18	5	4	6						140

4. ЗАДАЧА РАЦИОНАЛЬНОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ИМЕЮЩИХСЯ МОЩНОСТЕЙ

Пусть предприятию задан план производства по времени и номенклатуре: требуется за время Т выпустить $n_1, n_2, ..., n_k$ единиц продукции вида 1, 2,..., *к*, продукция производится на *S* различных технологических участках. Производительность каждого из участков задана коэффициентом ay, который показывает, сколько единиц продукции *j*-го вида $j = \overline{1, k}$ можно произвести на *i*-м участке $i = \overline{1, s}$ в единицу времени.

Известны издержки c_{ij}, отражающие все затраты на изготовление единицы продукции *j*-го вида на i-м участке в единицу времени.

Требуется составить оптимальный план работы участков, а именно: найти, сколько времени *i*-й участок будет занят изготовлением *j*-й продукции с тем, чтобы общие издержки были наименьшими.

Таблица 4.

Варианты заданий 4 к лабораторной работе

Технологический участок	Вид продукции					
	1	2	...	j	...	k
1	$a_{11}C_{11}$	$a_{12}C_{12}$	...	$a_{1j}C_{1j}$	...	$a_{1k}C_{1k}$
2	$a_{21}C_{21}$	$a_{22}C_{22}$	...	$a_{2j}C_{2j}$	...	$a_{2k}C_{2k}$
.	..	..	...	..	...	..
.	..	..	...	..	...	..
.	..	..	...	..	...	..
i	$a_{i1}C_{i1}$	$a_{i2}C_{i2}$	...	$a_{ij}C_{ij}$	...	$a_{ik}C_{ik}$
.	..	..	...	..	...	..
.	..	..	...	..	...	..
.	..	..	...	..	...	..
s	$a_{s1}C_{s1}$	$a_{s2}C_{s2}$	...	$a_{sj}C_{sj}$	...	$a_{sk}C_{sk}$
Запланированный объем продукции	n_1	n_2	...	n_j	...	n_k

5. ЗАДАЧА РАЦИОНАЛЬНОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ОТХОДОВ ХИМИЧЕСКОГО ПРОИЗВОДСТВА

В нашей стране все большее значение придается развитию химической промышленности. Искусственные и синтетические материалы все шире вторгаются в машиностроение и другие отрасли промышленности.

Однако химическая промышленность пока что удовлетворяет небольшую часть потребностей народного хозяйства, в том числе потребностей машиностроения в синтетических материалах.

В этой связи встает задача всемерной экономии химического сырья, тщательной утилизации отходов производства, вторичной переработки вышедших из строя пластмассовых изделий. При этом для обеспечения высокого качества выходящей продукции, а также снижения ее себестоимости использованию отходов должны предшествовать обоснованные расчеты, часть из которых производится с помощью линейного программирования.

Рассмотрим результаты анализа химического производства одного из предприятий. На этом предприятии, как и на ряде других, оказалось возможным отходы производства возвращать в установки и использовать как добавку к исходному сырью. Установка давала за смену 50 т продукции, потребляя 84 т сырья. Выделенные отходы в количестве 34 т состояли из трех видов: 1-й вид - 12 т, 2-й вид - 8 т, 3-й вид - 14 т. При меньшем потреблении сырья отходы выделяются в тех же пропорциях. Отходы до использования должны пройти соответствующую обработку. При этом для обработки первого и третьего отходов может быть использован старый, но находящийся в хорошем состоянии двухсекционный агрегат, устроенный таким образом, что в нем могут обрабатываться (в разных секциях) сразу два отхода. При обработке этих отходов в агрегате выделяется тепло в следующих количествах: для 1-го вида - 187 ккал/т, для 3-го вида - 95 ккал/т.

Обе секции агрегата имеют систему охлаждения, устойчивая работа которой возможна только в том случае, если разность между выделяемым теплом в обеих секциях по абсолютной величине не превышает 500 ккал.

При обработке отходов в агрегате имеют место некоторые потери, составляющие для 1-го вида 20 процентов отходов, для 3-го вида 40 процентов отходов. Для обработки отходов 2-го вида требуется простой агрегат и тепло в количестве 120 ккал/т. Это тепло может быть получено от первого агрегата, если охлаждающую воду после ее нагрева в этом агрегате направить во второй. В результате предварительного расчета установлено, что использование одной тонны отходов каждого вида дает следующую экономию: 1-й вид - 4 тыс. руб., 2-й вид - 2 тыс. руб., 3-й вид - 5 тыс. руб.

Возникает вопрос: в каких количествах использовать отходы, чтобы обеспечить максимально возможную экономию?

6. ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО РАСКРОЯ ПРОМЫШЛЕННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Большинство материалов, используемых в промышленности, поступает на предприятие в виде стандартных форм.

Непосредственное использование таких материалов, как правило, весьма крупных размеров, обычно невозможно. Предварительно их нужно разделить на части необходимых размеров. Это разделение или раскрой представляет собой сложную задачу, поскольку раскрой материалов зависит от конструктивных, технических и организационных факторов. Рациональный раскрой должен обеспечить не только минимум отходов материалов, но и снижение затрат труда.

В разработке раскройного плана тесно переплетаются две задачи:

1. выбор различных возможных раскроев одной единицы материала;
2. определение степени применимости каждого из вариантов раскроя в зависимости от заданной комплектности производимых деталей, определяемой требованиями выполнения плана по ассортименту.

Пусть некоторое предприятие потребляет большое количество листового металлопроката. При разделении листов на заготовки образуются отходы, размеры которых сильно зависят от того, как расположены заготовки на листе. Поэтому выбор наилучшего (с точки зрения снижения отходов) расположения заготовок на листе является весьма важным вопросом, решение которого обеспечивает экономию материалов.

Понятно, что можно было бы заготовки одного наименования раскраивать из одной единицы материала, независимо от остальных типов заготовок, а отходы, если это возможно, использовать для

изготовления заготовок малых размеров. Однако при таком способе использования материалов, как правило, образуется значительный отход. Снижение отходов можно получить, применяя комбинированные схемы раскроя, при которых из одной и той же единицы материала образуются заготовки различных деталей.

Пусть

j - индекс типа листа определенных размеров, которые могут быть поставлены предприятию, $j = 1, 2, ..., n$;

i - индекс наименования заготовок, необходимых для производства заданного типа деталей, $i = \overline{1, m}$;

k_j - индекс возможной схемы раскроя листа j-го типа;

$l_i k_j$ - количество заготовок i-го наименования, которое можно получить при раскрое одного листа j-го типа k_j -м способом;

c_{kj} - величина отхода полученного при k_j -м способе раскроя одного листа j-го типа;

(Эти данные получаются в результате предварительного анализа возможных целесообразных схем раскроя; при проведении такого анализа нет необходимости учитывать весь комплекс условий и ограничений, а достаточно лишь учитывать технологические требования к расположению заготовок на листе, а также стараться укладывать их наиболее плотно.)

Пусть

L_i - количество заготовок i-го наименования, которое необходимо изготовить за планируемый период;

g_j - вес одного листа j-го типа;

t_{kj} - расход рабочего времени на раскрой одного листа j-го типа k_j -м способом;

C_m - минимальная транзитная норма;

Т - суммарный фонд рабочего времени заготовительного участка предприятия.

Требуется определить, каких размеров и в каких количествах следует поставлять заводу листовой прокат и как его раскраивать, чтобы обеспечить снижение отходов металла до минимума, учитывая ограничения на производственные возможности заготовительного участка предприятия, а также требования соблюдения транзитных норм (в данном случае под транзитными нормами понимается общий минимальный вес листового проката, ниже которого перевозки нецелесообразны или недопустимы).

Пусть необходимо из листового проката определенной толщины вырезать некоторое количество заготовок двух типов (А и Б) для производства 90 штук изделий. Для одного изделия требуется 2 детали типа А и 10 деталей типа Б. Размеры листа, а также конфигурация и размеры заготовок изображены на рис.1. На рис.2 приведены четыре возможных лучших варианта расположения заготовок на листе, из которых видно, что при раскрое листа по первому варианту получаем 4 заготовки типа А, ни одной типа Б, а отход составляет 12 условных единиц; при раскрое по второму варианту получаем 3 заготовки типа А, 4 заготовки типа Б, а отход составляет 5 условных единиц и т. д. По изображенным на рис.2 упрощенным картам раскроя заполним таблицу 5.

Таблица 5.

Варианты раскроя к лабораторной работе

Варианты раскроя	Заготовки		Отходы в условных единицах
	А	Б	
I	4	0	12
II	3	4	5
III	1	9	3
IV	0	12	0

При условиях предыдущей задачи составить математическую модель, учитывающую какие детали или заготовки, в каких количествах и на каком оборудовании производить, с тем, чтобы обеспечить полное и своевременное выполнение производственной программы при минимальных отходах.

Пусть

d_{ij} - производительность;

c_{ij} - отходы металла.

Таблица 6

<table>
<tr><td rowspan="2">Типы оборудования и располагаемое время</td><td colspan="3">Виды заготовок</td></tr>
<tr><td>1</td><td>…</td><td>n</td></tr>
<tr><td rowspan="2">a_1</td><td>c_{11}</td><td rowspan="2">…</td><td>c_{1n}</td></tr>
<tr><td>d_{11}</td><td>d_{1n}</td></tr>
<tr><td>…..</td><td>…</td><td>…</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">a_m</td><td>c_{m1}</td><td rowspan="2">…</td><td>c_{mn}</td></tr>
<tr><td>d_{m1}</td><td>d_{mn}</td></tr>
<tr><td>количество заготовок...</td><td>b_1</td><td>…</td><td>b_n</td></tr>
</table>

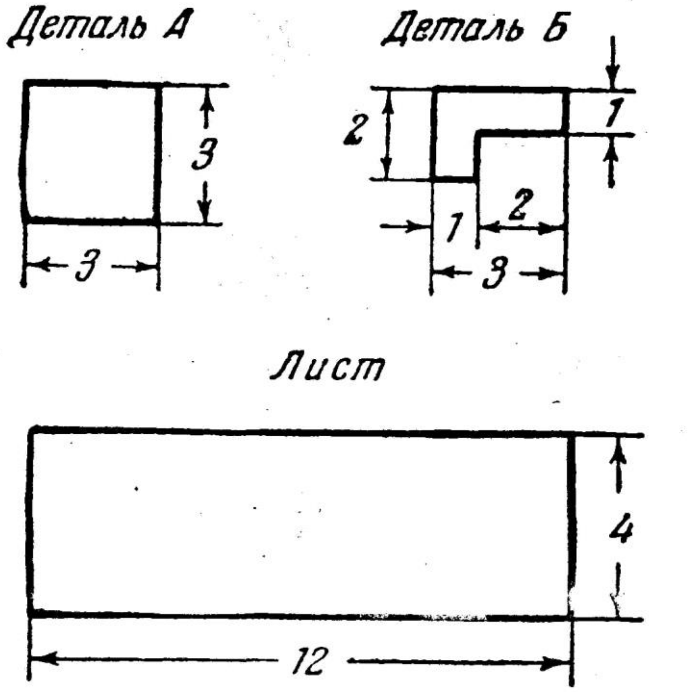

Рис.1. Конфигурация и размеры заготовок

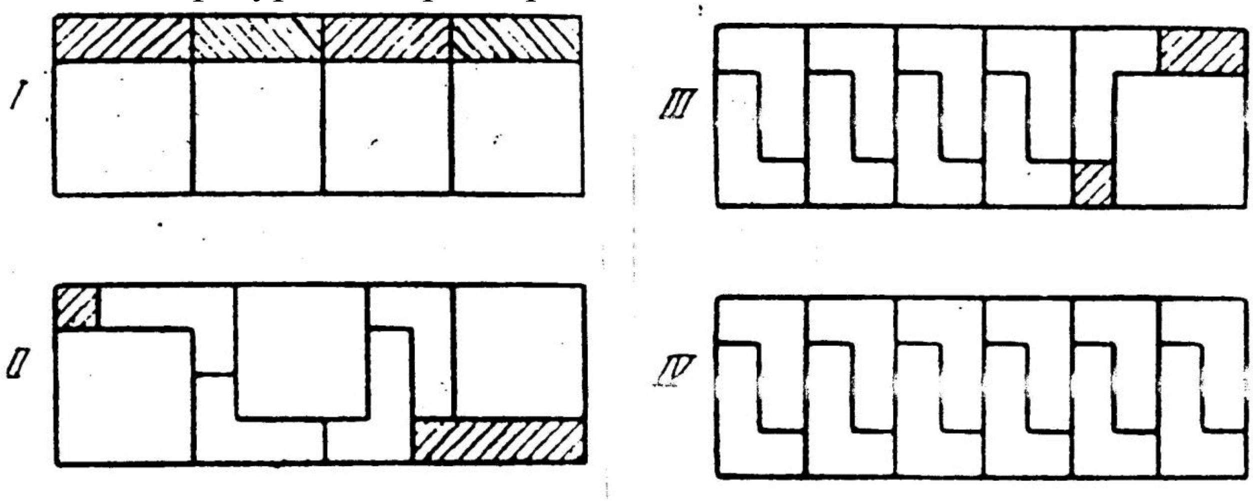

Рис.2. Варианты расположения заготовок на листе

Контрольные вопросы

1. Дайте определение общей задаче линейного программирования.
2. В чем состоит особенность задачи линейного программирования?
3. Как осуществляется переход к канонической форме задачи линейного программирования?
4. Дайте определение допустимых базисных решений.
5. Какие переменные называются свободными, какие переменные выбираются в качестве базисных?
6. Приведите геометрическую интерпретацию задачи линейного программирования.

7. В чем состоит суть симплекс-метода?
8. Сформулируйте двойственную задачу линейного программирования.
9. Как осуществляется переход от прямой задачи линейного программирования к двойственной?
10. Какие ограничения накладываются на переменные?
11. Какая связь существует между решением прямой задачи линейного программирования и решением двойственной задачи линейного программирования?