МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра программной инженерии

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
________О. Г. Локтионова
«10» 02 ________2022 г.

АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ

Методические указания по выполнению лабораторной работы
по дисциплине «Компьютерная графика»
для студентов всех форм обучения направления подготовки
09.03.04 «Программная инженерия»

Курск 2022

УДК 004.92
Составитель Е.А. Петрик

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент Т.И.Лапина

Алгоритмы построения кривых и поверхностей: методические указания по выполнению лабораторной работы / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Е. А. Петрик. Курск, 2022. 10 с.: ил.5. Библиогр.: с.15.

Содержат краткие теоретические сведения об алгоритмах построения кривых и поверхностей, а также приведены примеры и задания для лабораторной работы.

Методические указания соответствуют требованиям программы по направлению подготовки бакалавров: 09.03.04 «Программная инженерия»

Предназначены для студентов всех форм обучения направления подготовки бакалавров 09.03.04 «Программная инженерия»

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать Формат 60х84 1/16.
Усл. печ. л. Уч. – изд. л. .Тираж экз. Заказ . Бесплатно.
Юго - Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Цель работы

Изучение алгоритмов построения кривых и поверхностей, создание программы для визуализации работы алгоритмов.

Основные понятия

Сплайны. Кривые Безье

Сплайн – гладкая кривая, которая проходит через две или более опорных точек, а также имеет расположенные вне ее управляющие точки, влияющие на форму сплайна. Наиболее общие типы сплайнов – кривые Безье и B-сплайны (B-spline curves). Типичным примером сплайнов являются также неоднородные рациональные B-сплайны (Non-Uniform Rational B-Spline – NURBS). Сплайны состоят из вершин (Vertices) и сегментов (Segments). Каждая вершина сплайна имеет касательные векторы (Tangents), снабженные на концах управляющими точками, или маркерами (Handels). Маркеры касательных векторов управляют кривизной сегментов сплайна при входе в вершину, которой принадлежат касательные векторы, и выходе из нее.

Кривые Безье разработаны математиком Пьером Безье. Кривые и поверхности Безье использовались в 60-х годах компанией "Рено" для компьютерного проектирования формы кузовов автомобилей. В настоящее время они широко используются в компьютерной графике.

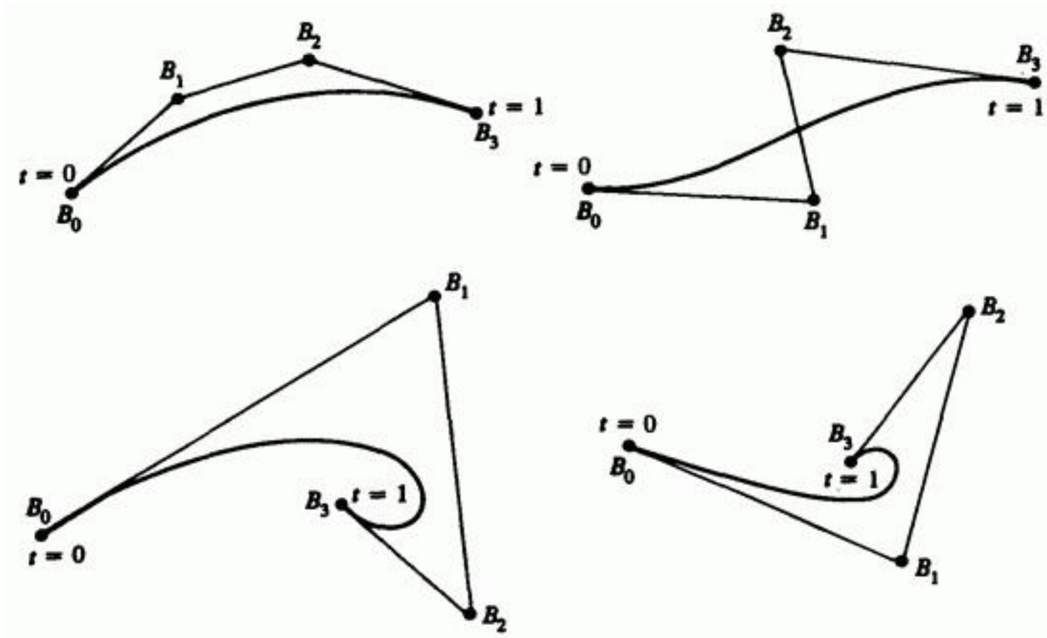

Рисунок 1 – Многоугольники Безье для кубических кривых

Кривые Безье описываются в параметрической форме:

$$x=P_x(t),\ y=P_y(t).$$

Значение t выступает как параметр, которому отвечают координаты отдельной точки линии.

Многочлены Безье для P_x и P_y имеют следующий вид:

$$P_x(t)=\sum_{i=0}^{m} C_m^i t^i (1-t)^{m-i} x_i\ ,\ P_y(t)=\sum_{i=0}^{m} C_m^i t^i (1-t)^{m-i} y_i\ ,\ C_m^i=\frac{m!}{i!(m-i)!}\ ,$$

где $C_m{}^i$ – сочетание m по i, а x_i, y_i – координаты точек ориентиров P_i. Значение m можно рассматривать и как степень полинома, и как значение, которое на единицу меньше количества точек-ориентиров.

Рассмотрим кривые Безье, классифицируя их по значениям m.

m=1 (по двум точкам). Кривая вырождается в отрезок прямой линии, определяемой концевыми точками P_0 и P_1. Параметрическое уравнение:

$$P(t)=(1-t)P_0 + tP_1.$$

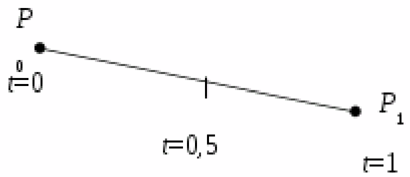

Рисунок 2 – Линейная кривая

m=2 (по трем точкам). Параметрическое уравнение:

$$P(t)=(1-t)^2P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2P_2.$$

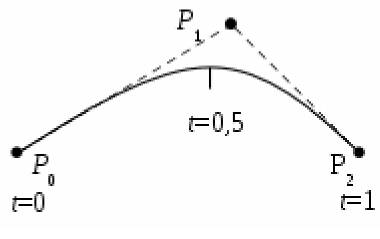

Рисунок 3 – Квадратичная кривая

m=3 (по четырем точкам – кубическая). Используется довольно часто, в особенности в сплайновых кривых. Параметрическое уравнение:

$$P(t)=(1\text{-}t)^3P_0 + 3t(1\text{-}t)^2P_1 + 3t^2(1\text{-}t)P_2 + t^3P_3.$$

Геометрический алгоритм для кривой Безье позволяет вычислить координаты (x, y) точки кривой Безье по значению параметра t (рис. 4).

1. Каждая сторона контура многоугольника, проходящего по точкам-ориентирам, делится пропорционально значению t.
2. Точки деления соединяются отрезками прямых и образуют новый многоугольник. Количество узлов нового контура на единицу меньше, чем количество узлов предыдущего контура.
3. Стороны нового контура снова делятся пропорционально значению t и т.д. Это продолжается до тех пор, пока не будет получена единственная точка деления – точка кривой Безье.

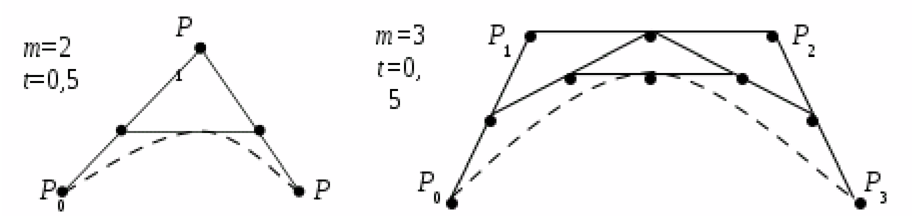

Рисунок 4 – Построение точки кривой Безье

Сегмент кривой Безье 3-го порядка описывается положением четырех точек. Две из них являются опорными (узлами кривой): начальная точка P_0 (x_0, y_0) и конечная P_3 (x_3, y_3). Точки P_1 (x_1, y_1) и P_2 (x_2, y_2), определяющие положение касательных относительно отрезка, называются управляющими. Метод построения кривой Безье основан на использовании пары касательных (управляющих линий), проведенных к сегменту кривой в его окончаниях. На форму кривой влияют угол наклона касательной и длина ее отрезка.

Параметрическое уравнение Безье описывает положение точек и, тем самым, форму кривой. Уравнение решают относительно параметра t, принимающего значения от 0 (в начальной точке) до 1 (в конечной точке). При построении сегмента кривой Безье на плоскости рассчитывают координаты x и y (для четырех точек, из них двух управляющих):

$R(t)=P_0(1\text{-}t)^3 + P_1t(1\text{-}t)^2 + P_2t^2(1\text{-}t) + P_3t^3$, где $0<t<1$;

$x(t)=a_xt^3 + b_xt^2 + c_xt + x_0$;

$x_1=x_0 + (c_x{:}3)$; $x_2=x_1 + [(c_x+b_x){:}3]$; $x_3=x_0 + c_x + b_x + a_x$;

$y(t)= a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + y_0;$

$y_1=y_0 + (c_y:3); y_2=y_1 + [(c_y+b_y):3]; y_3=y_0 + c_y + b_y + a_y.$

Следовательно:

$c_x=3(x_1-x_0); b_x=3(x_2-x_1)-c_x; a_x=x_3 - x_0 - c_x - b_x;$

$c_y=3(y_1-y_0); b_y=3(y_2-y_1)-c_y; a_y=y_3 - y_0 - c_y - b_y.$

Значение t определяет степень влияния точек на форму кривой. Например, при t=0,333 наибольший "вес" приобретает точка P_1, а при t=0,666 – точка P_2. Из приведенных уравнений вытекает, что кривая может проходить лишь через начальную и конечную опорные точки сегмента (P_0, P_3). Тем самым достигаются простота описания и стабильность кривой Безье.

Кривые Безье обладают рядом свойств, определяющих возможность их использования в векторной графике. С геометрической точки зрения, производной кривой Безье будет другая кривая Безье, векторы управляющих точек которой определяются вычислением разностей векторов управляющих точек исходной кривой.

Основные свойства кривой Безье:

- непрерывность заполнения сегмента между начальной и конечной точками;
- кривая всегда располагается внутри фигуры, образованной линиями, соединяющими контрольные точки;
- при наличии только двух контрольных точек сегмент представляет собой отрезок прямой линии;
- прямая линия образуется при коллинеарном (на одной прямой) размещении управляющих точек;
- кривая Безье симметрична, т.е. обмен местами между начальной и конечной точками (изменение направления траектории) не влияет на форму кривой;
- масштабирование и изменение пропорций кривой Безье не нарушает ее стабильности, так как она, с математической точки зрения, "аффинно инвариантна";
- изменение координат хотя бы одной из точек ведет к изменению формы всей кривой Безье;

● степень кривой всегда на единицу меньше числа опорных точек (т.е. при трех опорных точках форма кривой - парабола);

● размещение дополнительных опорных точек вблизи одной позиции увеличивает ее "вес" и приводит к приближению траектории кривой к данной позиции;

● окружность не может быть описана параметрическим уравнением кривой Безье;

● невозможно создать параллельные кривые Безье, за исключением тривиальных случаев (прямые линии и совпадающие кривые).

Модели описания поверхностей

Понятие "трехмерная графика" подразумевает не способы построения собственно трехмерных объектов, а их изображения на плоскости. Истинно трехмерные способы отображения объектов пока что недостаточно широко распространены.

Рассмотрим методы представления трехмерных объектов в системах компьютерной графики. Для описания формы их поверхностей могут использоваться разнообразные модели.

Аналитическая модель поверхности

Аналитической моделью называется описание поверхности математическими формулами:

$z=f(x,y)$ – описание с помощью функции,

$F(x,y,z)=0$ – описание с помощью неявного уравнения.

Зачастую используется параметрическая форма описания поверхности:

$$x = F_x (s,t)$$
$$y = F_y (s,t)$$
$$z = F_z (s,t)$$

где s и t – параметры, которые изменяются в определенном диапазоне, а функции F_x, F_y и F_z определяют форму поверхности.

Преимущество параметрической формы заключается в легкости описания поверхностей, которые отвечают неоднозначным функциям, и замкнутых поверхностей.

Параметрическое описание можно задать таким образом, что формула не будет существенно изменяться (усложняться) при поворотах поверхности, и ее масштабировании.

В качестве примера рассмотрим аналитическое описание поверхности шара.

$z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ – явная функция двух аргументов/

Для описания сложных поверхностей часто используют сплайны. Сплайн – это специальная функция для аппроксимации отдельных фрагментов поверхности. Несколько сплайнов образуют модель сложной поверхности. Иными словами, сплайн – это тоже поверхность, но такая, для которой можно достаточно просто вычислять координаты ее точек. В трехмерной графике обычно используют кубические сплайны по двум основным причинам:

– третья степень – наименьшая из степеней, позволяющих описывать любую форму;

– при стыковке сплайнов можно обеспечить непрерывную первую производную – такая поверхность будет без изломов в местах стыка.

Сплайны, как правило, задают параметрически.

Рассмотрим одну из разновидностей сплайнов – сплайн Безье. В обобщенной форме (степени m*n):

$$P(s,t) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} C_m^i s^i (1 - s)^{m-i} C_n^j t^j (1 - t)^{n-j} P_{ij} ,$$

где P_{ij} – опорные точки-ориентиры, $0 \le s \le 1$, $0 \le t \le 1$, $C_m{}^i$ и $C_n{}^j$ – коэффициенты бинома Ньютона, которые рассчитываются по формуле

$$C_a^b = \frac{a!}{b!(a - b)!} .$$

Кубический сплайн Безье соответствует значениям m=3, n=3. Для его определения необходимо 16 точек-ориентиров P_{ij}; коэффициенты $C_m{}^i$ и $C_n{}^j$ равны 1, 3, 3, 1 при i, j = 0, 1, 2, 3.

Аналитическая модель наиболее пригодна для многих операций анализа поверхностей.

Достоинства модели (с позиций КГ):

● легкость расчета координат каждой точки поверхности, нормали;

● небольшой объем данных для описания достаточно сложных форм.

Недостатки:

- сложность формул описания с использованием функций, которые медленно вычисляются на компьютере, снижают скорость выполнения операций отображения;
- невозможность в большинстве случаев применить данную форму описания непосредственно для изображения поверхности - поверхность отображается как многогранник, координаты вершин и граней которого рассчитываются в процессе отображения, что уменьшает скорость сравнительно с полигональной моделью описания.

Векторная полигональная модель

Для описания пространственных объектов используются следующие элементы: вершины, отрезки прямых (векторы), полилинии, полигоны, полигональные поверхности.

Элемент "вершина" (vertex) – главный элемент описания, все остальные являются производными. При использовании трехмерной декартовой системы координаты вершин определяются как (x_i, y_i, z_i). Каждый объект однозначно определяется координатами собственных вершин.

Вершина может моделировать отдельный точечный объект, размер которого не имеет значения, а также может использоваться в качестве конечных точек для линейных объектов и полигонов.

Двумя вершинами задается вектор.

Несколько векторов составляют полилинию. Полилиния может моделировать отдельный линейный объект, толщина которого не учитывается, а также может представлять контур полигона. Полигон моделирует площадный объект. Один полигон может описывать плоскую грань объемного объекта.

Несколько граней составляют объемный объект в виде полигональной поверхности – многогранник или незамкнутую поверхность (в литературе часто используется название "полигональная сетка").

Векторную полигональную модель можно считать наиболее распространенной в современных системах трехмерной КГ. Она широко используется в САПР, ГИС, компьютерных тренажерах, играх и т.д.

Положительные черты векторной полигональной модели:

- удобство масштабирования объектов. При увеличении или уменьшении объекты выглядят более качественно, чем при растровых моделях описания. Диапазон масштабирования определяется точностью аппроксимации и разрядностью чисел для представления координат вершин;

● небольшой объем данных для описания простых поверхностей, которые адекватно аппроксимируются плоскими гранями;

● необходимость вычислять только координаты вершин при преобразованиях систем координат или перемещении объектов;

● аппаратная поддержка многих операций в современных графических видеосистемах, которая обусловливает достаточно высокую скорость для анимации.

Недостатки:

● сложность алгоритмов визуализации для создания реалистичных изображений; сложность алгоритмов выполнения топологических операций, таких, например, как разрезы;

● аппроксимация плоскими гранями приводит к погрешности моделирования. При моделировании поверхностей, которые имеют сложную фрактальную форму, обычно невозможно увеличивать число граней из-за ограничений по быстродействию и объему памяти компьютера.

Воксельная модель

Воксельная модель – это трехмерный растр. Подобно тому, как пикселы располагаются на плоскости двумерного изображения, вокселы образуют трехмерные объекты в определенном объеме. *Воксел* – это элемент объема (voxel – volume element).

При создании двумерного изображения каждый пиксел должен иметь свой цвет. В воксельной модели каждый воксел также имеет свой цвет и, кроме того, прозрачность. Полная прозрачность воксела означает пустоту соответствующей точки объема. При моделировании объема каждый воксел представляет элемент объема определенного размера. Чем больше вокселов в определенном объеме и меньше размер вокселов, тем точнее моделируются трехмерные объекты – увеличивается разрешающая способность.

В современной КГ воксельный метод считается одним из самых перспективных. Например, в медицине при сканировании томографом (computer tomography) получают изображения срезов объекта, которые потом объединяют в виде объемной модели для дальнейшего анализа. Воксельный метод используется в геологии, сейсмологии, в компьютерных играх, для графических устройств отображения, которые создают действительно объемные изображения.

Положительная черта воксельной модели – простота: при описании сложных объектов и сцен; при отображении объемных сцен; при выполнении топологических операций над отдельными объектами и сценой в целом. Например, просто выполняется показ разреза – для этого соответствующие вокселы можно сделать прозрачными.

Недостатки воксельной модели:

● большое количество информации, необходимой для представления объемных данных (например, объем 256х256х256 имеет небольшую разрешающую способность, но требует свыше 16 млн вокселов);

● значительные затраты памяти ограничивают разрешающую способность, точность моделирования; большое количество вокселов обусловливает малую скорость создания изображений объемных сцен;

● как и для любого растра, возникают проблемы при увеличении или уменьшении изображения. Например, при увеличении ухудшается качество изображения.

Равномерная сетка

Эта модель описывает координаты отдельных точек поверхности следующим способом. Каждому узлу сетки с индексами (i, j) приписывается значение высоты z_{ij}. Индексам (i, j) отвечают определенные значения координат (x, y). Расстояние между узлами одинаковое – dx по оси x, dy по оси y. Фактически такая модель – это двумерный массив, растр, матрица, каждый элемент которой сохраняет значение высоты.

Не каждая поверхность может быть представлена этой моделью. Если в каждом узле (i, j) записывается только одно значение высоты, то это означает, что поверхность описывается однозначной функцией $z = f(x, y)$. Иначе говоря, это такая поверхность, которую каждая вертикаль пересекает только один раз. Не могут моделироваться также вертикальные грани. Необходимо заметить, что сетка может быть задана не только в декартовых координатах. Например, для того чтобы описать поверхность шара однозначной функцией, можно использовать полярные координаты. С помощью равномерной сетки часто описывают рельеф земной поверхности.

Положительные черты равномерной сетки:

● простота описания поверхностей;

● возможность быстро узнать высоту любой точки поверхности простой интерполяцией.

Недостатки равномерной сетки:

● поверхности, которые соответствуют неоднозначной функции высоты в узлах сетки, не могут быть смоделированы;

● для описания сложных поверхностей необходимо большое количество узлов, которое может быть ограничено объемом памяти компьютера.

Неравномерная сетка. Изолинии

Неравномерной сеткой называется модель описания поверхности в виде множества отдельных точек $\{(x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1), \ldots,(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})\}$, принадлежащих поверхности. Эти точки могут быть получены, например, в результате измерений поверхности какого-нибудь объекта с помощью определенного оборудования. Такую модель можно считать обобщением для некоторых рассмотренных выше моделей. Например, векторная полигональная модель и равномерная сетка могут считаться разновидностями неравномерной сетки.

Рассмотрим модель поверхности в виде множества точечных значений, логически никак не связанных между собой. Неравномерность задания опорных точек усложняет определение координат для других точек поверхности, которые не совпадают с опорными точками. Требуются специальные методы пространственной интерполяции.

Пусть задача заключается в вычислении значения координаты z по известным координатам (x, y). Для этого необходимо найти несколько самых близких точек, а затем вычислить искомое значение z, исходя из взаимного расположения этих точек в проекции (x, y). Для равномерной сетки эта задача решается достаточно просто – поиска фактически нет, сразу рассчитываются индексы самых близких опорных точек.

Вторая задача заключается в отображении (визуализации) поверхности. Эту задачу можно решать несколькими способами. Один из наиболее распространенных – триангуляция. Процесс триангуляции может быть представлен следующим образом:

● находим первые три самые близкие друг к другу точки - получаем одну плоскую треугольную грань;

● находим точку, ближайшую к этой грани, и образовываем смежную грань, и т.д., пока не останется ни одной отдельной точки.

Это – общая схема триангуляции. В литературе можно встретить множество алгоритмов триангуляции, сводящихся к описаному выше. Один из наиболее распространенных – триангуляция Делоне.

Описание поверхности треугольными гранями можно уже считать разновидностью векторной полигональной модели. В англоязычной литературе для ее названия используется аббревиатура TIN (Triangulated Irregular Network). После триангуляции получаем полигональную поверхность, отображение которой выполнить уже достаточно просто.

Рассмотрим еще один из вариантов описания поверхности – изолинии высоты. Любая изолиния состоит из точек, представляющих одно числовое значение какого-то показателя, в данном случае значение высоты. Изолинии высоты также можно рассматривать как контуры разреза поверхности горизонтальными плоскостями (поэтому для изолиний высоты часто применяется название "горизонтали"). Описание поверхности изолиниями высоты часто используется, например в картографии. Для описания поверхности можно использовать не только изолинии высоты, но и другие, например *x*- или *y*-изолинии.

В компьютерных системах изолинии часто описываются векторно – полилиниями. Используются также изолинии в виде сплайновых кривых.

Точки, составляющие изолинии, и отдельные опорные точки располагаются неравномерно. Это усложняет расчет координат точек поверхности. В графических компьютерных системах для выполнения многих операций, в первую очередь, для визуализации поверхности, обычно требуется преобразование описания поверхности из одной формы в другую. Преобразование изолиний в полигональную модель также выполняется методами триангуляции (здесь алгоритмы триангуляции сложнее, чем для триангуляции отдельных точек). Для преобразования неравномерной сетки в равномерную используют специальную интерполяцию.

Положительные черты неравномерной сетки:

● использование отдельных опорных точек, наиболее важных для заданной формы поверхности, обуславливает меньший объем информации по сравнению с другими моделями, например с равномерной сеткой;

● применение изолиний на картах и планах позволяет наглядно отображать рельеф поверхности.

Недостатки:

● невозможность или сложность выполнения многих операций над поверхностями;

● сложность алгоритмов преобразования в другие формы описания поверхностей.

Задание

Написать программу (на языке высокого уровня), реализующую алгоритмы визуализации кривых Безье (разных степеней) без использования готовых библиотечных функций (например, Graphics.DrawBeziers()). Желательно осуществить визуализацию в динамике. Вариант отрисовки см. на рис.

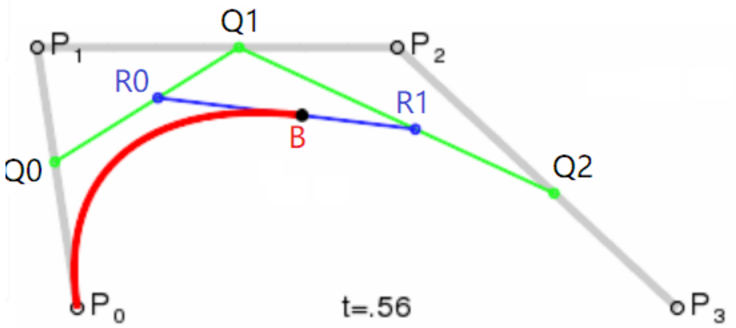

Рисунок 5 – Пример построения кривой Безье

Содержание отчета

Отчет должен содержать:

1. Титульный лист.
2. Задание.
3. Блок-схемы алгоритмов.
4. Листинг программы.
5. Пример работы программы.
6. Ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы

1. Какие существуют алгоритмы для построения кривых?
2. Какие существуют алгоритмы для построения поверхностей?

Список используемой литературы

1. Аммерал, Л. Принципы программирования в машинной графике / Л. Аммерал; пер. с англ. – Москва : Сол Систем, 1992. – 224 с. – ISBN 5-85316-001-X. – Текст : непосредственный.
2. Роджерс, Д. Алгоритмические основы машинной графики / Д. Роджерс; пер. с англ. – Москва : Мир, 1989. – 512 с. – ISBN 5-03-000476-9. – Текст : непосредственный.
3. Роджерс, Д. Математические основы машинной графики / Д. Роджерс, Дж. Адамс; пер. с англ. – Москва : Мир, 2001. – 604 с. – ISBN 5-03-002143-4. – Текст : непосредственный.
4. Шикин, Е. В. Начала компьютерной графики / Е. В. Шикин, А. В. Боресков, А. А. Зайцев. – Москва : ДИАЛОГ-МИФИ, 1993. – 138 с. – ISBN 5-86404-035-5. – Текст : непосредственный.