Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Таныгин Максим Олегович
Должность: и.о. декана факультета фундаментальной и прикладной информатики
Дата подписания: 21.09.2023 13:06:01
Уникальный программный ключ:
65ab2aa0d384efe8480e6a4c688eddbc475e411a

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

*Кафедра программной инженерии*

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе
_____________ О.Г. Локтионова
«_4_» _03_____________ 2019 г.

# ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ МЕТОДАМИ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ, ТРАПЕЦИЙ, СИМПСОНА

Методические указания
к лабораторной работе №5
по дисциплине «Вычислительная математика»
направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.04 «Программная инженерия»

Курск 2019

УДК 519.6

Составители Е.П. Кочура, В.М. Буторин

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент кафедры программной инженерии И.Н. Ефремова

**Вычисление интегралов методами прямоугольников, трапеций, Симпсона:** методические указания к лабораторной работе №5 по дисциплине «Вычислительная математика» для студентов направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.04 «Программная инженерия» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост. Е.П. Кочура, В.М. Буторин. Курск, 2019. 12 с.

Содержит краткие теоретические сведения по теме лабораторной работы, цель выполнения работы, задание, пример выполнения лабораторной работы, требования к составлению отчета, список контрольных вопросов, таблицу индивидуальных заданий.

Предназначено для студентов направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.04 «Программная инженерия».

Текст печатается в авторской редакции.

Подписано в печать 04.03.19. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 0,7. Уч.-изд. л. 0,63. Тираж 100 экз. Заказ 149 .
Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет
305040, Курск, ул.50 лет Октября, 94.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №5

## ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ МЕТОДАМИ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ, ТРАПЕЦИЙ, СИМПСОНА

### I. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

1. Изучение основных определений и положений теории численного интегрирования.
2. Изучение основных квадратурных формул численного интегрирования.
3. Разработка численного алгоритма и программ для вычисления на ЭВМ интегралов по квадратурным формулам прямоугольников, трапеций, Симпсона. Оценка погрешности этих формул по правилу Рунге.

### II. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

**1. Основные определения.** Определенным интегралом от функции f(x) на отрезке [a,b] называется предел интегральной суммы:

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot \Delta x_i. \tag{2.1}$$

где, n - количество элементарных отрезков $[x_i\text{-}x_{i-1}]$, i=1,...,n; на которые разбивается отрезок интегрирования [a,b], $\Delta x_i=(x_i-x_{i-1})$ - длина i-ого отрезка, $\xi_i$ - точка на отрезке $[x_{i-1},x_i]$.

Когда функция f(x) задана аналитически в виде формулы и интеграл удается свести к табличному, то интеграл (2.1) вычисляется с помощью таблиц неопределенных интегралов и формулы Ньютона-Лейбница, например:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(d), \tag{2.2}$$

где $F'(x)$ - первообразная, т.е. $F'(x)=f(x)$.

Однако на практике обычно интеграл (2.2) не сводится известными приемами к табличному интегралу, даже тогда, когда под интегральная функция задана аналитически, не говоря уже о тех случаях, когда значения под интегральной f(x) заданы в виде таблицы. В этом случае используют численные методы

**2. Основные квадратурные формулы.** Для вычисления определенных интегралов используется приближенное соотношение:

$$\int_a^b f(x)\cdot dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot q_i,\ \ i=0,1,...,n;\ \ \xi\in[a,b], \tag{2.3}$$

которое называется **квадратурной** формулой с **узлами** $\xi_i$ и **весами** $q_i$.
В формуле (2.3) интеграл приближенно заменяется конечной суммой, члены которой представляют произведение значений функций в некоторых узлах на некоторую величину. Наиболее часто используются следующие квадратурные формулы:

**а) формула прямоугольников:**

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\cdot dx \approx f(\xi_i)\cdot h, \tag{2.4}$$

где $\xi_i = \dfrac{x_i + x_{i-1}}{2},\ \ h = x_i - x_{i-1},\ \ i = 1,...n.$

Для всего отрезка [a,b] имеем:

$$\int_a^b f(x)\cdot dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot h = h\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i). \tag{2.5}$$

Погрешность формулы (2.5), полученная с помощью ряда Тейлора равна:

$$|R(x)| = \frac{h^2(b-a)}{24}\left|f^{(2)}_{max}(\xi)\right|,. \tag{2.6}$$

$\left|f^{(2)}_{max}(\xi)\right|$ - максимальное значение второй производной на отрезке [a,b].

**б) формула трапеции:**

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \frac{f_{i-1} + f_i}{2}\cdot h, \tag{2.7}$$

где $f_i=f(x_i)$, i=1,...n.

Для всего отрезка имеем:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left[\frac{1}{2}f_0 + \sum_{i=2}^{n-1} f_i + \frac{1}{2}f_n\right], \tag{2.8}$$

при этом погрешность равна:

$$|R(x)| = \frac{h^2(b-a)}{12}\left|f^{(2)}_{max}(\xi)\right|.$$

**в) формула Симпсона** (формула парабол):

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}\right). \qquad (2.9)$$

Для всего отрезка:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{n} f_i q_i, \qquad (2.10)$$

где

$$q_i = \begin{matrix} 1, \\ 4, \\ 2, \end{matrix} \begin{cases} i = 0, n; \\ i = 1,3,\ldots,n-1; \\ i = 2,4,\ldots,n-2. \end{cases}$$

Погрешность формулы Симпсона равна:

$$\left|R(x)\right| = \frac{h^4(b-a)}{90}\left|f_{max}^{(4)}(\xi)\right|. \qquad (2.11)$$

**3. Метод ячеек для вычисления кратных интегралов**. Пусть требуется вычислить двукратный интеграл в области G(a≤x≤b, c≤y≤d):

$$\iint_G U(x,y)dxdy.$$

С помощью узлов $x_i$ (i=0,1,..n) и $y_j$ (j=0,1,...,m) и прямых, проходящих через эти узлы: $x=x_i$ и $y=y_j$, разобьем область G на (n·m) прямоугольных ячеек, имеющих площадь:

$$\Delta G_{ij} = \Delta x_i \cdot \Delta y_j,\ \ \Delta x_i = (x_i - x_{i-1}),\ \ \Delta y_i = (y_j - y_{j-1}).$$

Выбираем в этой ячейке центральную точку:

$$\overline{x}_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2},\ \ \overline{y}_j = \frac{y_j + y_{j-1}}{2}.$$

Будем считать, что интеграл для каждой ячейке приближенно равен:

$$\iint_{\Delta G_{ij}} (x,y)dxdy \approx f(\overline{x}_i, \overline{y}_j)\Delta x_i \Delta y_j. \qquad (2.12)$$

Суммируя по всем ячейкам имеем:

$$\iint_G (x,y)dxdy \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\overline{x}_i, \overline{y}_j)\Delta x_i \Delta y_j, \qquad (2.13)$$

при этом погрешность, когда все ячейки имеют одинаковую площадь $\left(\Delta x_i = \frac{b-a}{n} = \Delta y_j = \frac{c-d}{m} = h,\ i = 1,\ldots,n;\ \ j = 1,\ldots.,m\right)$ будет равна

$$\left|R(x,y)\right| = \frac{S}{24}\left[\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 f_x^{(2)} + \left(\frac{d-c}{m}\right) f_y^{(2)}\right] \approx \frac{S}{12}h^2\left\|f_x^{(2)}\right| + \left|f_y^{(2)}\right\|; \qquad (2.14)$$

где S - площадь области G, m и n - количество узлов по координатам x,y; $\left|f_x^{(2)}\right|$, $\left|f_y^{(2)}\right|$- максимальное значение вторых частных производных по соответствующим координатам.

**4. Правило Рунге практической оценки погрешности и уточнению по Ричардсону.** Пусть I - точное значение интеграла, $I_h$ - значение интеграла, вычисленное по квадратурной формуле с шагом h, а $I_{h/2}$- значение того же интеграла, вычисленное для шага h/2.

Можем записать:

$$\begin{aligned} I &= I_h + c\cdot h^k + 0(h^{k+1}), \\ I &= I_{h/2} + c\cdot\left(\frac{h}{2}\right)^k + 0(h^{k+1}), \end{aligned} \tag{2.15}$$

где c - константа.

Величина $c\cdot h^k$- называется главной частью погрешности квадратурной формулы с порядком точности k по шагу h. Остальная часть погрешности обозначена как $0(h^{k+1})$ и имеет порядок k+1.

Вычитая из первого уравнения (2.15) второе получаем соотношение, которое с точностью порядка $0(h^{k+1})$ позволяет вычислить значение главной части погрешности:

$$c\cdot h^k = \frac{I_{h/2} - I_h}{1-(1/2)^k} + 0(h^{k+1}). \tag{2.16}$$

Данная **формула** называется практической оценкой погрешности по **правилу Рунге**:

Подставляя (2.16) в первую формулу (2.15) получаем формулу для уточнения значение интеграла **по Ричардсону**:

$$I = I_h + \frac{I_{h/2} - I_h}{1-(1/2)^k} + 0(h^{k+1}) = \frac{2^k I_{h/2} - I_h}{2^k - 1} + 0(h^{k+1}). \tag{2.17}$$

Для формул прямоугольников, трапеций и ячеек имеем k=2, для формул Симпсона - k=4.

## III. ЗАДАНИЕ

1.Написать соотношения для приближенного вычисления интеграла для функции, взятой из таблицы заданий с использованием заданной квадратурной формулы.

2.Определить величину шага исходя из заданной точности.

3.Для вычисления интеграла применить уточнение по Ричардсону.
4.Написать программу и рассчитать на ЭВМ интеграл от заданной функции.

## IV. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

**Задание.** Вычислить интеграл $\int_0^1 \sin(\sin\ x)dx$ методом прямоугольников с точностью не ниже $10^{-4}$.

1. Для приближенного вычисления интеграла от под интегральной функции f(x)=sin(sin(x)) используем квадратурную формулу прямоугольников (2.5):

$$\int_0^1 f(x)dx \approx I_h = h\sum_{i=1}^{n} \sin(\sin(\xi_i)),\ \ \xi_i = \frac{x_i - x_{i+1}}{2}. \qquad (4.1)$$

2. Определяем число узлов интегрирования. Для этого с помощью соотношения (2.6) вначале выбираем промежуточный шаг:

$$h_p^2 = \frac{|R(x)| \cdot 24}{(b-a)\left|f_{max}^{(2)}\right|}. \qquad (4.2)$$

Далее оцениваем величину $f_{max}^{(2)}$

$$\begin{aligned} \left|f_{max}^{(2)}\right| &= \left|(\sin(\sin(x)))^{(2)}\right| = \left|(\cos(\sin x)\cos x)^{(1)}\right| = \\ &= \left|-\sin(\sin x)\cos^2 x - \cos(\sin x)\sin x\right| \le 2. \end{aligned} \qquad (4.3)$$

Знаем все значения: $|R(x)| = 10^{-4}$, $b - a = 1$, $\left|f_{max}^{(2)}\right| = 2$, поэтому согласно (4.2) имеем

$$h_p = \sqrt{\frac{|R(x)| \cdot 24}{(b-a)\left|f_{max}^{(2)}\right|}} \approx 3.5 \cdot 10^{-2}. \qquad (4.4)$$

Определяем число узлов для шага $h_p$=3.5*$10^{-2}$:

$$N = \mathrm{int}\left(\frac{b-a}{h_p}\right) + 1 \approx 30. \qquad (4.5)$$

3. Определяем уточненное значение шага для выбранного числа узлов N=30:

h=(b-a)/N=1/30. (4.6)

4. Для уточнения квадратурной формулы (4.1) используем метод Ричардсона. Согласно (2.17) имеем:

$$\int_0^1 \sin(\sin x)dx \approx \frac{4I_{h/2} - I_h}{3}, \qquad (4.7)$$

где $I_{h/2}$ - значение интеграла, вычисленное по формуле (4.1) для шага h/2.

**4.** Пример текста программ на Mathcad и на Delphy (в консольном режиме) для приближенного вычисления интеграла по формуле прямоугольников.

$a := 0 \quad b := 1 \quad f(x) := \sin(\sin(x)) \quad \varepsilon := 10^{-4}$

$$f2(x) := \frac{d^2}{dx^2}f(x) \rightarrow -\sin(\sin(x))\cdot\cos(x)^2 - \cos(\sin(x))\cdot\sin(x)$$

так как $\left|-\sin(\sin(x))\cdot\cos(x)^2 - \cos(\sin(x))\cdot\sin(x)\right| \le 2$, то $f2p := 2$

$$hp := \sqrt{\frac{24\varepsilon}{(b-a)\cdot f2p}} \qquad n := \mathrm{round}\left(\frac{b-a}{hp}\right) + 1 \qquad h := \left(\frac{b-a}{n}\right)$$

$$i := 1, 2 .. n \qquad x_i := a + h\cdot i \qquad \xi_i := \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$$

$$Ih := h\cdot\sum_{i=1}^{n} \sin(\sin(\xi_i)) \qquad Ih = 0.430636$$

$$h := \frac{h}{2} \qquad n := \frac{b-a}{h} \qquad i := 1, 2 .. n \qquad x_i := a + h\cdot i \qquad \xi_i := \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$$

$$Ih2 := h\cdot\sum_{i=1}^{n} \sin(\sin(\xi_i)) \qquad Ih2 = 0.430614 \qquad I := Ih + \frac{Ih2 - Ih}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$I = 0.430606 \qquad \int_0^1 \sin(\sin(x))\,dx = 0.430606$$

```
program lab5;
  {Вычисление интегралов по формуле прямоугольников}
  {a -нижний, b- верхний пределы интегрирования}
  {r-точность вычисления}
  {fp - максимальное значение второй производной функции}
```

```
        {Ih - значение интеграла с шагом h}
        {Ih2 - значение интеграла с шагом h/2}
        {Ihh - уточненное значение интеграла по Ричардсону}
var a,b,yp,fp,r,Ih,Ih2,Ihh,hp,h,y,Iz,s : real;
var x : array[0..1000] of real;
var i,j,n : integer;
      begin
       writeln('Введите значение нижнего предела интегрирования a');
      readln (a);
       writeln('Введите значение верхнего предела интегрирования b');
      readln (b);
       writeln('Введите максимальное значение второй производной fp');
      readln (fp);
       writeln('Введите значение погрешности r');
      readln (r);
        hp:=sqrt(24.*r/((b-a)*fp));                вычисление по (4.4)
        n:=round((b-a)/hp)+1;                      вычисление по (4.5)
        h:=(b-a)/n;                                вычисление по (4.6)
        for j:=1 to 2 do begin
           if j=1 then hp:=h else hp:=h/2;
             n:=round((b-a)/hp);
             hp:=(b-a)/n;
             s:=0;
             x[0]:=a;
              for i:=1 to n do begin
                x[i]:=x[0]+i*hp;
                y:=(x[i]+x[i-1])/2;                вычисление ξi по (4.1)
                s:=s+sin(sin(y));                  вычисление суммы в (4.1)
              end;
                Iz:=hp*s;                          вычисление по (4.1)
              if j=1 then Ih:=Iz else Ih2:=Iz;
            end;
             Ihh:=(4*Ih2-Ih)/3.;                   вычисление по (4.7)
          writeln('Шаг h=',h,'     Знач. интеграла  Ih=',Ih);
        writeln('Шаг h/2=',hp,'     Знач. интеграла  Ih2=',Ih2);
       writeln(Уточн. по Ричардсону знач. интеграла  Ihh=',Ihh);
end.
```

6. Заполняем таблицу:

| | |
|---|---|
| $I_h$ | 0,430635 |

| | |
|---|---|
| $I_{h/2}$ | 0,430614 |
| Ihh | 0,430606 |

## V. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

1. Название лабораторной работы.
2. Индивидуальное задание.
3. Теоретическая часть.
4. Текст программы.
5. Результаты расчета.

Пункты 1-4 должны быть оформлены до начала лабораторной работы.

## VI. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Понятие определенного интеграла.
2. Определение квадратурной формулы.
3. Обусловленность задачи численного интегрирования.
4. Формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона.
5. Погрешности основных квадратурных формул.
6. Формула численного интегрирования с помощью сплайнов.
7. Метод ячеек.
8. Погрешность метода ячеек.
9. Правило Рунге.
10. Уточнение по Ричардсону.
11. Метод Монте-Карло.
12. Погрешность метода Монте-Карло.

## VII. ТАБЛИЦА ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

| № | Определенный интеграл | Метод | Точность метода |
|---|---|---|---|
| 1 | $\int_0^1 \cos(x+x^3)dx$ | трапеций | $10^{-2}$ |
| 2 | $\int_0^1 e^{\sin x}dx$ | прямоугольников | $10^{-2}$ |
| 3 | $\int_0^1 e^{\cos x}dx$ | трапеций | $10^{-2}$ |
| 4 | $\int_1^2 \ln(x+x^2)dx$ | прямоугольников | $10^{-2}$ |
| 5 | $\int_1^2 x\sin x^{-3}dx$ | трапеций | $10^{-2}$ |
| 6 | $\int_1^2 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ | прямоугольников | $10^{-2}$ |
| 7 | $\int_1^2\int_0^1 \sin(xy)dxdy$ | ячеек | $10^{-2}$ |
| 8 | $\int_0^1 e^x x dx$ | Симпсона | $10^{-4}$ |
| 9 | $\int_0^1 e^{x^2}dx$ | прямоугольников | $10^{-4}$ |
| 10 | $\int_1^2 \ln x^2 dx$ | Симпсона | $10^{-2}$ |
| 11 | $\int_0^1\int_0^1 \cos(\sin(x+y))dxdy$ | ячеек | $10^{-2}$ |
| 12 | $\int_0^1\int_1^2 \sin(\cos(x+y))dxdy$ | ячеек | $10^{-2}$ |

| № | Определенный интеграл | Метод | Точность метода |
|---|---|---|---|
| 13 | $\int_0^1 \cos(\cos x)dx$ | трапеций | $10^{-2}$ |
| 14 | $\int_1^2 \cos(x\sqrt{x})dx$ | прямоугольников | $10^{-2}$ |
| 15 | $\int_0^1 \sin(x+x^2)dx$ | трапеций | $10^{-2}$ |
| 16 | $\int_{-1}^1 \ln(e^{\sin(x)})dx$ | Симпсона | $10^{-4}$ |
| 17 | $\int_{-1}^1 \ln(e^{\cos(x)})dx$ | прямоугольников | $10^{-3}$ |
| 18 | $\int_1^5\int_2^4 \ln(x+y^2)dxdy$ | ячеек | $10^{-2}$ |
| 19 | $\int_1^5\int_2^4 \ln(x^3+y)dxdy$ | ячеек | $10^{-2}$ |
| 20 | $\int_{20}^{100} \frac{1+\sqrt{x}}{5+\sin(x)}dx$ | трапеций | $10^{-4}$ |