МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)
Кафедра программной инженерии

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
____________ О.Г. Локтионова
«16» июня 2015 г.

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Методические указания по выполнению лабораторной работы
по дисциплине «Теория принятия решений»
для студентов направления подготовки 09.03.04 «Программная инженерия», 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Курск 2015

УДК 681.3.06(075.8)

Составители: В.В. Апальков, Р.А. Томакова, Ф.А.Старков

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент кафедры «Информационные системы и технологии» Юго-Западного государственного университета *Т.И. Лапина*

Принятие решений в условиях неопределенности: методические указания по выполнению лабораторной работы / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: В.В. Апальков, Р.А. Томакова, Ф.А.Старков. Курск, 2015. 19 с. Библиогр.: с. 19.

Излагается цель лабораторной работы, в теоретической части рассматриваются классические критерии принятия решений в условиях неопределенности. В практической части приводятся пример выполнения задания на лабораторную работу и вопросы для самопроверки.

Методические указания соответствуют требованиям рабочей программы по направлению подготовки бакалавров 09.03.04 «Программная инженерия».

Предназначены для студентов направления подготовки бакалавров 09.03.04.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать. Формат 60×84 1/16.

Усл. печ. л. 1,2. Уч.-изд. л. 1,1. Тираж 50 экз. Заказ. Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.

305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Цель работы: изучить особенности применения критериев принятия решений в условиях неопределенности.

Теоретическая часть.

Задача принятия решений заключается в обоснованном выборе из возможных вариантов действий (альтернатив) наилучшего в определенном смысле варианта для достижения желаемого результата.

В задачах принятия решений в условиях неопределенности при выборе решения (альтернативы) x могут реализоваться различные исходы y, соответствующие внешним условиям (состояниям) z. Множество внешних состояний описывает неопределенность обстановки в задаче принятия решений.

Под исходом (результатом решения) y будем понимать численную оценку, задаваемую лицом, принимающим решение (ЛПР), и характеризующую «полезность» исхода.

Предположим, что множества альтернатив $X=\{x_1,\ldots, x_n\}$ и внешних состояний $Z=\{z_1,\ldots, z_m\}$ конечны. Тогда множество исходов будет $Y=\{y_{11},\ldots, y_{nm}\}$, где $y_{ij} = f(x_i, z_j)$, $i=1,\ldots,n$; $j=1,\ldots,m$.

Модель оптимального выбора альтернативы в условиях неопределенности представим матрицей решений (табл. 1).

Таблица 1. Матрица решений

X	Z				
	z_1	…	z_j	…	z_m
x_1	y_{11}		y_{1j}		y_{1m}
…	…		…		…
x_i	y_{i1}	…	y_{ij}	…	y_{im}
…	…		…		…
x_n	y_{n1}		y_{nj}		y_{nm}

Предположим, что множество Z отражает "природные" неопределенности, когда отсутствует какое-либо противодействие лицу, принимающему решение. В момент принятия решения значение параметра z предполагается неизвестным, поэтому приходится принимать во внимание все численные оценки y_{ij}, соответствующие варианту x_i.

Рассмотрим случай задачи принятия решений с двумя состояниями среды (m=2).

Введем прямоугольную систему координат, откладывая по оси абсцисс значения результата y_{i1} решения x_i, соответствующие внешнему состоянию z_1, а по оси ординат – значения y_{i2}, соответствующие внешнему состоянию z_2, $i=1,...,n$. Каждому варианту решения x_i соответствует точка на плоскости с координатами (y_{i1},y_{i2}), $i=1,..,n$.

Точка с координатами $\left(\max_i(y_{i1}),\max_i(y_{i2})\right)$ называется утопической точкой (УТ). Координаты всех точек (y_{i1},y_{i2}), $i=1,..,n$, соответствующих вариантам решений $x_1,...,x_n$, не могут быть больше, чем у утопической точки.

Точка с координатами $\left(\min_i(y_{i1}),\min_i(y_{i2})\right)$ называется антиутопической точкой (АУТ). Координаты всех точек (y_{i1},y_{i2}), $i=1,..,n$, соответствующих вариантам решений $x_1,...,x_n$, не могут быть меньше, чем у антиутопической точки.

Построим прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, и с вершинами в утопической и антиутопической точках. Все точки плоскости с координатами (y_{i1},y_{i2}), $i=1,..,n$, принадлежат этому прямоугольнику. Он называется полем полезности решений (рис. 1).

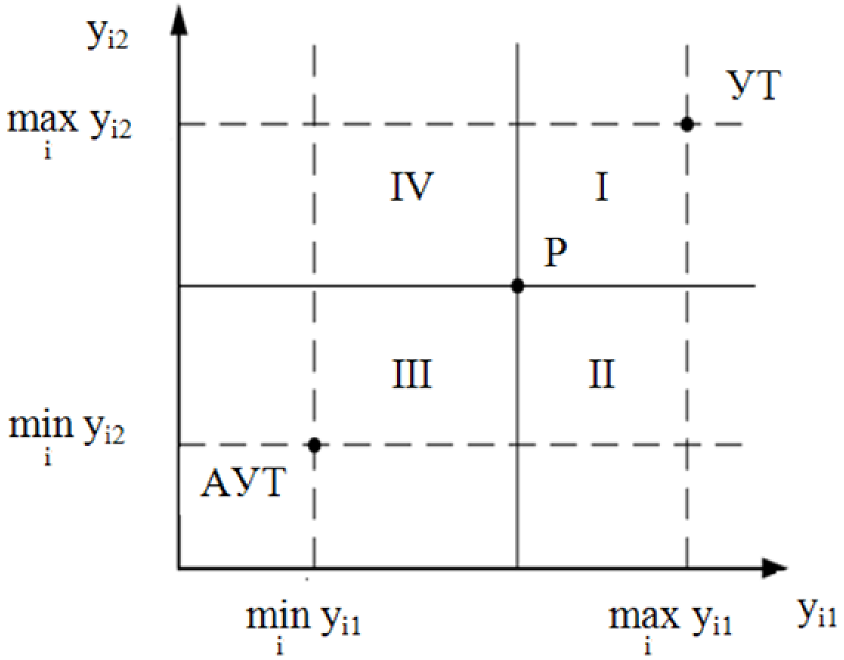

Рис. 1. Поле полезности решений

Возьмем произвольную точку P(y_{p1},y_{p2}) из поля полезности решений. Проведем через эту точку параллельные осям координат прямые. При этом плоскость разбивается на четыре части I, II, III и IV. В случае произвольного значения m они превращаются в так называемые конусы.

Все точки поля полезности решений (y_{i1},y_{i2}) из конуса I лучше точки P, так как координаты этих точек не меньше соответствующих координат точки P. Конус I называется конусом предпочтения.

Аналогично точка P лучше всех точек поля полезности решений (y_{i1},y_{i2}) конуса III, так как координаты этих точек не больше соответствующих координат точки P. Конус III называется антиконусом.

Оценка же точек в конусах II и IV является неопределенной, так как соотношение их координат с координатами точки P является противоречивым.

Эти конусы называют областями неопределенности, и варианты решений, соответствующие точкам из этих конусов, связаны с допущением некоторого риска принятия решений.

Любое решение в условиях неопределенности принимается в соответствии с какой-либо критериальной оценочной функцией.

Следующие критерии относят к классическим:

– минимаксный $K_{MM} = \max_i \left(\min_j \left(y_{ij} \right) \right)$,

– Байеса-Лапласа $K_{BL} = \max_i \left(\sum_{j=1}^{m} y_{ij} q_j \right)$,

– Сэвиджа $K_S = \min_i \left(\max_j \left(\max_i \left(y_{ij} \right) - y_{ij} \right) \right)$,

– азартного игрока $K_{AG} = \max_i \left(\max_j \left(y_{ij} \right) \right)$,

К производным критериям относят следующие:

– Гурвица $K_{HW} = \max_i \left(c \cdot \min_j \left(y_{ij} \right) + (1 - c) \cdot \max_j \left(y_{ij} \right) \right)$,

– Ходжа-Лемана $K_{HL} = \max_i \left(c \cdot \sum_{j=1}^{m} y_{ij} q_j + (1 - c) \cdot \min_j \left(y_{ij} \right) \right)$,

– Гермейера $K_G = \max_i \left(\min_j \left(y_{ij} q_j \right) \right)$,

– произведений $K_P = \max_i \left(\prod_{j=1}^{m} y_{ij} \right)$,

где q_j – вероятность наступления внешнего состояния z_j, $j=1,...m$; c – весовой множитель.

Практическая часть.

Рассмотрим применение некоторых из перечисленных критериев на примере матрицы решений:

	z_1	z_2
x_1	1	10
x_2	2	8
x_3	4	7
x_4	5	6
x_5	6	4
x_6	8	3
x_7	9	1

1 Классические критерии принятия решений

1.1 Минимаксный критерий

Дополним матрицу решений еще одним столбцом, элементами которого являются минимальные значения в каждой из строк заданной матрицы:

	z_1	z_2	$\min_i (y_{ij})$
x_1	1	10	1
x_2	2	8	2

x_3	4	7	4
$\mathbf{x_4}$	5	6	**5**
x_5	6	4	4
x_6	8	3	3
x_7	9	1	1

Оптимальными решениями являются те варианты выбора, которым соответствует максимальное значение $\min\limits_{i}\left(y_{ij}\right)$ в добавленном столбце. В нашем примере – это альтернатива x_4.

Приведем геометрическую иллюстрацию применения минимаксного критерия (рис. 2).

Изобразив точки с координатами (y_{i1},y_{i2}), i=1,...,7, на плоскости, построим биссектрису 1-го координатного угла.

Точки, соответствующие оптимальным решениям, лежат на линии в виде прямого угла с вершиной на биссектрисе. При этом вершина угла максимально удалена от начала координат. В данном примере – это точка с координатами (5;6).

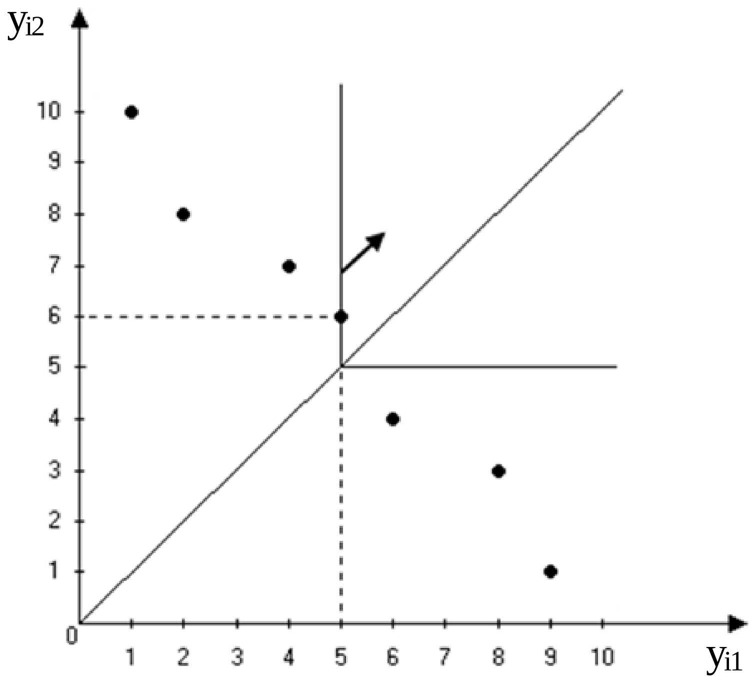

Рис.2. Геометрическая иллюстрация минимаксного критерия

1.2 Критерий Байеса–Лапласа

Пусть вероятности наступления внешних состояний $q_1 = 0{,}4$; $q_2 = 0{,}6$.

Дополним матрицу решений двумя столбцами, элементами которых являются произведения y_{ij} и соответствующей вероятности q_j , $i=1,...,7$; $j=1,2$.

В третий добавленный столбец записываем сумму значений $y_{i1}q_1$ и $y_{i2}q_2$ для каждой строки:

	z_1	z_2	$y_{i1}\ q_1$	$y_{i2}q_2$	$\sum_{j=1}^{2} y_{ij}q_j$
$\mathbf{x_1}$	1	10	0,4	6	**6,4**
x_2	2	8	0,8	4,8	5,6

x_3	4	7	1,6	4,2	5,8
x_4	5	6	2	3,6	5,6
x_5	6	4	2,4	2,4	4,8
x_6	8	3	3,2	1,8	5
x_7	9	1	3,6	0,6	4,2

Оптимальными решениями являются те варианты выбора, которым соответствует максимальное значение $\sum_{j=1}^{2} y_{ij} q_j$. В нашем примере – это альтернатива x_1.

Приведем геометрическую иллюстрацию применения критерия Байеса–Лапласа (рис. 3).

Изобразив точки с координатами $(y_{i1}q_1, y_{i2}q_2)$, $i=1,...,7$, на плоскости, построим биссектрису 1-го координатного угла.

Точки, соответствующие оптимальным решениям, лежат на прямой линии, перпендикулярной биссектрисе и максимально удаленной от начала координат. В данном примере – это точка с координатами (0,4;6).

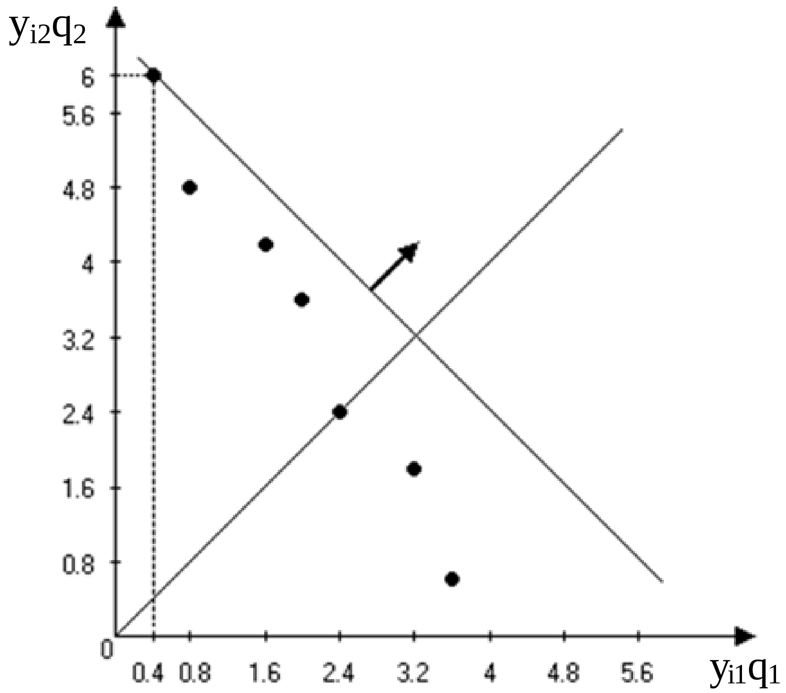

Рис.3. Геометрическая иллюстрация критерия Байеса-Лапласа

1.3 Критерий Сэвиджа

Находим максимальное значение в каждом из столбцов матрицы решений:

	z_1	z_2
x_1	1	**10**
x_2	2	8
x_3	4	7
x_4	5	6
x_5	6	4
x_6	8	3
x_7	**9**	1

Построим матрицу сожалений (упущенной выгоды), вычитая каждый раз из максимального значения в столбце соответствующий элемент этого столбца.

Дополним матрицу сожалений столбцом наибольших разностей $y_{ir} = \max\limits_{j}\left(\max\limits_{i}\left(y_{ij}\right) - y_{ij}\right)$:

	z_1	z_2	y_{ir}
x_1	8	0	8
x_2	7	2	7
x_3	5	3	5
$\mathbf{x_4}$	4	4	**4**
x_5	3	6	6
x_6	1	7	7
x_7	0	9	9

Оптимальными решениями являются те варианты выбора, которым соответствует минимальное значение y_{ir} в добавленном столбце матрицы сожалений. В нашем примере – это альтернатива x_4.

Приведем геометрическую иллюстрацию применения критерия Сэвиджа (рис. 4).

Изобразив точки с координатами (y_{i1},y_{i2}), i=1,..,7, на плоскости, построим прямую линию, проходящую через утопическую точку параллельно биссектрисе 1-го координатного угла.

Точки, соответствующие оптимальным решениям, лежат на линии в виде прямого угла с вершиной на построенной прямой. При этом вершина угла максимально удалена от точки пересечения этой прямой с осью координат. В данном примере – это точка с координатами (5;6).

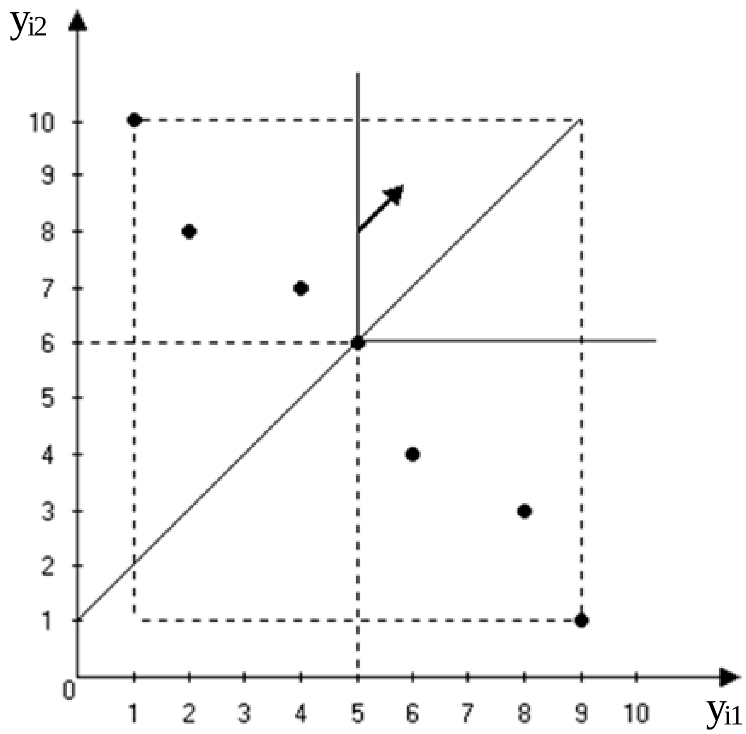

Рис.4. Геометрическая иллюстрация критерия Сэвиджа

2 Производные критерии принятия решений

2.1 Критерий Гурвица

Зададим значение весового множителя c=0,6.

Дополним матрицу решений пятью столбцами, элементами которых являются минимальные и максимальные значения в каждой из строк заданной матрицы, их произведения на c и 1– c соответственно, сумма $c \cdot \min\limits_{j}(y_{ij})$ и $(1-c) \cdot \max\limits_{j}(y_{ij})$.

	z_1	z_2	$\min\limits_j(y_{ij})$	$\max\limits_j(y_{ij})$	$c\min\limits_j(y_{ij})$	$(1-c)\cdot\max\limits_j(y_{ij})$	$c\cdot\min\limits_j(y_{ij})+(1-c)\cdot\max\limits_j(y_{ij})$
x_1	1	10	1	10	0,6	4	4,6
x_2	2	8	2	8	1,2	3,2	4,4
x_3	4	7	4	7	2,4	2,8	5,2
$\mathbf{x_4}$	5	6	5	6	3	2,4	**5,4**
x_5	6	4	4	6	2,4	2,4	4,8
x_6	8	3	3	8	1,8	3,2	5
x_7	9	1	1	9	0,6	3,6	4,2

Оптимальными решениями являются те варианты выбора, которым соответствует максимальное значение $c\cdot\min\limits_j(y_{ij})+(1-c)\cdot\max\limits_j(y_{ij})$ в последнем столбце. В нашем примере – это альтернатива x_4.

Приведем геометрическую иллюстрацию применения критерия Гурвица (рис. 5).

Изобразив точки с координатами $(c\cdot\min\limits_j(y_{ij}),(1-c)\cdot\max\limits_j(y_{ij}))$, i=1,…,7, на плоскости, построим биссектрису 1-го координатного угла.

Точки, соответствующие оптимальным решениям, лежат на прямой линии, перпендикулярной биссектрисе и максимально удаленной от начала координат. В данном примере – это точка с координатами (3;2,4).

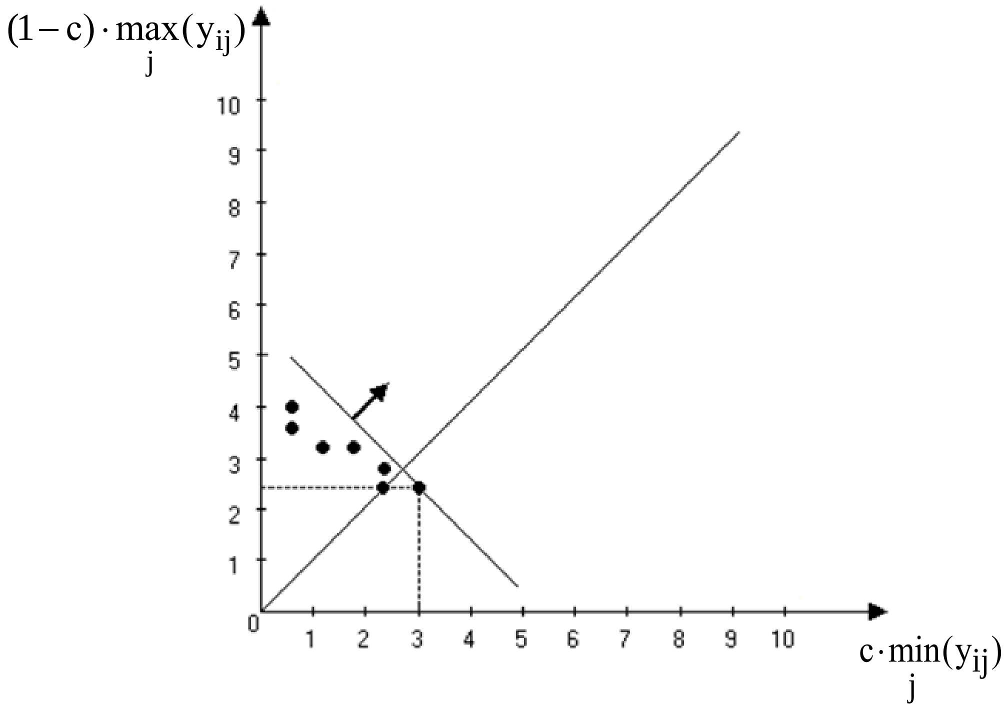

Рис.5. Геометрическая иллюстрация критерия Гурвица

2.2 Критерий Гермейера

Пусть вероятности наступления внешних состояний q_1 = 0,4; q_2 = 0,6.

Дополним матрицу решений двумя столбцами, элементами которых являются произведения y_{ij} и соответствующей вероятности q_j , i=1,...,7; j=1,2.

В третий добавленный столбец записываем минимальное значение из чисел $y_{i1}q_1$ и $y_{i2}q_2$ для каждой строки:

	z_1	z_2	$y_{i1}\ q_1$	$y_{i2}\ q_2$	$\min_j(y_{ij}q_j)$
x_1	1	10	0,4	6	0,4
x_2	2	8	0,8	4,8	0,8
x_3	4	7	1,6	4,2	1,6
x_4	5	6	2	3,6	2
$\mathbf{x_5}$	6	4	2,4	2,4	**2,4**

x_6	8	3	3,2	1,8	1,8
x_7	9	1	3,6	0,6	0,6

Оптимальными решениями являются те варианты выбора, которым соответствует максимальное значение $\min\limits_{j}(y_{ij}q_j)$ в третьем добавленном столбце. В нашем примере – это альтернатива x_5.

Приведем геометрическую иллюстрацию применения критерия Гермейера (рис. 6).

Изобразив точки с координатами $(y_{i1}q_1, y_{i2}q_2)$, $i=1,\ldots,7$, на плоскости, построим биссектрису 1-го координатного угла.

Точки, соответствующие оптимальным решениям, лежат на линии в виде прямого угла с вершиной на биссектрисе. При этом вершина угла максимально удалена от начала координат. В данном примере – это точка с координатами (2,4;2,4).

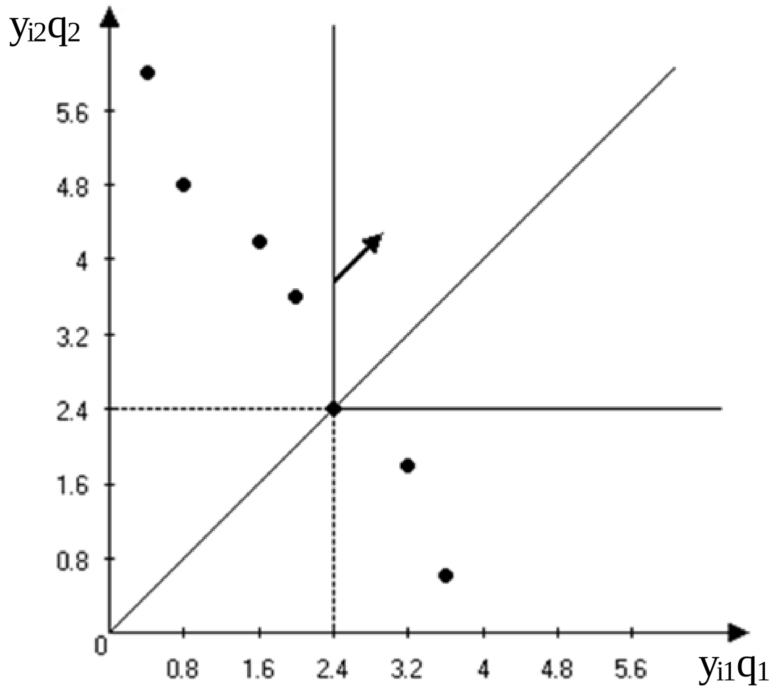

Рис.6. Геометрическая иллюстрация критерия Гермейера

2.3 Критерий произведений

Дополним матрицу решений столбцом, элементами которого являются произведения y_{i1} на y_{i2}, i=1,…,7.

	z_1	z_2	$y_{i1}y_{i2}$
x_1	1	10	10
x_2	2	8	16
x_3	4	7	28
$\mathbf{x_4}$	5	6	**30**
x_5	6	4	24
x_6	8	3	24
x_7	9	1	9

Оптимальными решениями являются те варианты выбора, которым соответствует максимальное значение произведения $y_{i1}y_{i2}$ в добавленном столбце. В нашем примере – это альтернатива x_4.

Приведем геометрическую иллюстрацию применения критерия произведений (рис. 7).

Изобразив точки с координатами (y_{i1},y_{i2}), i=1,...,7, на плоскости, построим биссектрису 1-го координатного угла.

Точки, соответствующие оптимальным решениям, лежат на гиперболе с вершиной на биссектрисе. При этом вершина гиперболы максимально удалена от начала координат. В данном примере – это точка с координатами (5;6).

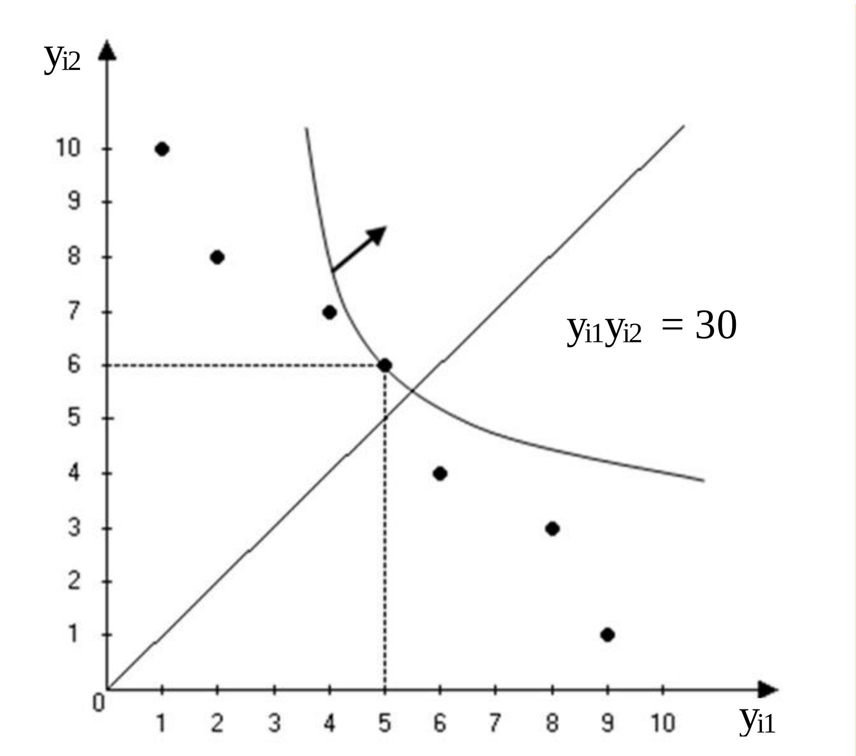

Рис.7. Геометрическая иллюстрация критерия произведений

Вопросы для самопроверки.

1. Задача принятия решений в условиях неопределенности.
2. Типы неопределенностей.
3. Функция реализации, оценочная функция.
4. Критерий принятия решений.
5. Классические критерии выбора.
6. Производные критерии выбора.
7. Условия применения критериев.

Литература.

1. Лотов В.А., Поспелова И.И. Многокритериальные задачи принятия решений: учебное пособие.- М: МАКС Пресс, 2008. – 197 с.
2. Ногин В.Д. Принятие решений в многокритериальной среде. Количественный подход. 2-е изд., испр. и доп. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. -176 с.
3. Орлов А.И. Теория принятия решений: учебник / А.И. Орлов. – М.: Изд-во «Экзамен», 2006. – 573 с.
4. Петровский А. Б. Теория принятия решений [Текст] : учебник. – М. : Академия, 2009. – 400 с. – (Университетский учебник. Прикладная математика и информатика).
5. Подиновский В.В. Анализ и поддержка решений. Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений.- Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 64 с.
6. Черноруцкий И.Г. Методы принятия решений: учебное пособие / И.Г. Черноруцкий. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 416 с.