МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра программной инженерии

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе
________________ О.Г. Локтионова
« 4 » 03 __________ 2019 г.

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГОЧЛЕНОМ ЛАГРАНЖА

Методические указания к лабораторной работе №3
по дисциплине «Вычислительная математика»
направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.04 «Программная инженерия»

Курск 2019

УДК 519.6

Составители Е.П. Кочура, В.М. Буторин

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент кафедры программной инженерии И.Н. Ефремова

Интерполирование функций многочленом Лагранжа: методические указания к лабораторной работе №3 по дисциплине «Вычислительная математика» для студентов направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.04 «Программная инженерия» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост. Е.П. Кочура, В.М. Буторин. Курск, 2019. 10 с.

Содержит краткие теоретические сведения по теме лабораторной работы, цель выполнения работы, задание, пример выполнения лабораторной работы, требования к составлению отчета, список контрольных вопросов, таблицу индивидуальных заданий.

Предназначено для студентов направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.04 «Программная инженерия».

Текст печатается в авторской редакции.

Подписано в печать 04.03.19. Формат 60х84 1/16.
Усл. печ. л. 0,58. Уч.-изд. л. 0,53. Тираж 100 экз. Заказ 151.
Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет
305040, Курск, ул.50 лет Октября, 94.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГОЧЛЕНОМ ЛАГРАНЖА

I. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

1.Изучение основных определений и положений теории интерполяции функции.
2.Изучение методов локальной и глобальной интерполяции.
3.Интерполирование функций многочленом Лагранжа.

II. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Интерполяцией называется такой вид точечной аппроксимации, когда аппроксимирующая функция представляет собой алгебраический многочлен (полином) $\varphi(x)$ степени n, который в n+1 точке (узле) x_i (i=0,1,...,n), заданных на отрезке [a,b], совпадает со значением аппроксимируемой функции f(x) в этих узлах, т.е. имеем $y_i=f(x_i)=\varphi(x_i)$, i=0,1,...,n.

Линейная и квадратичная интерполяция. Отрезок [a,b] делится узлами x_i (i=0,1,...,n) на n частичных отрезков $[x_{i-1},x_i]$, при этом $x_0=a$, $x_n=b$.
Для построения линейной интерполяции аппроксимируемая функция y=f(x) заменяется на каждом частичном отрезке $[x_{i-1},x_i]$ (i=1,2,...,n) многочленом первой степени, т.е. прямой линией:

$$\varphi_i(x) = k_i x + b_i, \tag{2.1}$$

проходящей через две точки, с координатами $x_{i-1},y_{i-1}=y(x_{i-1})$ и $x_i,y_i=y(x_i)$.
Следовательно на каждом отрезке [x_{i-1},x_i] имеется своя прямая линия, которая описывается уравнением, проходящим через две точки. В результате для всего отрезка получаем ломаную линию, которая в узлах x_i совпадает со значением функции. Коэффициенты k_i и b_i определяются из следующей системы уравнений:

$$\begin{matrix} y_{i-1} = k_i \cdot x_{i-1} + b_i, \\ y_i = k_i \cdot x_i + b_i. \end{matrix} \quad , \quad i=1,...n. \tag{2.2}$$

Из (2.2) получаем значения неизвестных коэффициентов:

$$k_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \qquad b_i = y_{i-1} - k_i \cdot x_{i-1}. \tag{2.3}$$

Более точной является квадратичная интерполяция. В качестве интерполяционной функции на отрезке [x_{i-1},x_{i+1}] принимается квадратный трехчлен:

$$\varphi_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i, \qquad x_{i-1} \le x \le x_{i+1}. \tag{2.4}$$

Так как это уравнение параболы, то такую интерполяцию также называют параболической. Уравнение параболы содержит три неизвестных коэффициента a_i, b_i, c_i, которые определяются из системы уравнений:

$$a_i x_k^2 + b_i x_k + c_i = y_k, \qquad k = i-1, i, i+1.. \tag{2.5}$$

Интерполяция для любой точки x отрезка $[x_0,x_n]$ проходит по трем ближайшим точкам.

При линейной и параболической интерполяции имеются точки, где производная испытывает скачок. При линейной интерполяции это происходит в узлах, а при квадратичной там, где одни три точки заменяются на три другие точки. Этого недостатка лишена интерполяция сплайнами.

Интерполяция сплайнами. Сплайн (от англ. слова “splane” - гибкий) это функция, которая на всем отрезке интерполяции непрерывна вместе со своими *k* первыми производными (*k≤m-1)* и на каждом частичном отрезке представляет алгебраический многочлен (полином) степени *m*.

Интерполяционный многочлен Лагранжа. Рассмотрим глобальную интерполяцию на отрезке $[x_0,x_n]$, т.е. построение единого интерполяционного многочлена степени n

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \tag{2.6}$$

который в n+1 узле x_i (i=0,1,...,n) совпадает со значениями аппроксимирующей функции.

$$y_i = f(x_i) = a_0 + a_1 \cdot x_i + a_2 \cdot x_i^2 \ldots + a_n \cdot x_i^n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x_i^k, \qquad i = 0,1,\ldots,n. \tag{2.7}$$

Коэффициенты a_k (k=0,1,...,n) определяются из системы линейных уравнений (2.7) n+1 порядка.

При больших n необходимо решать систему линейных уравнений большого порядка, т.е. проводить большой объем вычислений. Избежать этого позволяет обобщенный многочлен Лагранжа степени n:

$$\varphi(x) = L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i * l_i(x), \tag{2.8}$$

где $l_i(x)$ - многочлены Лагранжа определяемые по формулам:

$$l_0(x) = \frac{\langle\langle x - x_0 \rangle\rangle (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)}{\langle\langle x_0 - x_0 \rangle\rangle (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\dots(x_0 - x_n)},$$

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)\dots(x - x_{i-1})\langle\langle x - x_i \rangle\rangle (x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\dots(x_i - x_{i-1})\langle\langle x_i - x_i \rangle\rangle (x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}, \qquad (2.9)$$

$$l_n(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})\langle\langle x - x_n \rangle\rangle}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\dots(x_n - x_{n-1})\langle\langle x_n - x_n \rangle\rangle};$$

где выражения в двойных скобках не должны учитываться, они написаны для пояснения алгоритма по которому образуются эти многочлены.

Из (2.8) следует:

$$l_i(x_k) = \begin{cases} 1, & k = i, \\ 0, & k \neq i. \end{cases} \qquad (2.10)$$

Отметим, что при n=1 многочлен Лагранжа представляет собой линейную интерполяцию на отрезке [x_0,x_1], а при n=2 - квадратичную интерполяцию на отрезке [x_0,x_2].

Точность интерполяции. Погрешность интерполяции $R_n(x)$ зависит от числа узлов n и равна:

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x). \qquad (2.11)$$

В узлах интерполяции погрешность равна нулю. Ее величина зависит от вида аппроксимирующей функции и вычисляется по следующей формуле:

$$R_n(x) = \omega(x) * \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n), \qquad (2.12)$$

где ξ неизвестная точка на отрезке [x_0,x_n].

Для равномерного распределения узлов, когда x_i-x_{i-1}=h, для всех i=1,2,...,n (равномерная сетка с шагом h) можем записать:

$$R_n(x) \le \frac{\left| f^{(n+1)}(\xi) \right|}{n+1} h^{n+1}. \qquad (2.13)$$

III. ЗАДАНИЕ

1.Написать интерполяционный многочлен Лагранжа для функции f(x), которая задана на отрезке [x_0,x_n] в четырех точках (узлах). Значения функции взять из таблицы заданий Оценить погрешность интерполяции, предполагая, что $\left| f^{(n+1)}(\xi) \right| \le 1$.

2.Разработать текст программы для приближенного вычисления значений функции f(x) и погрешности интерполяции в трех любых точках отрезка $[x_0,x_n]$,
3.На ЭВМ набрать и отладить программу.
4.Провести вычисления функции в точках между заданными узлами. Провести интерполяцию с помощью программы MATHCAD и сравнить результаты.

IV. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Задание. Написать интерполяционный многочлен Лагранжа для аппроксимации функции f(x), значения которой даны таблицей. Оценить погрешность интерполяции.

i	0	1	2	3
x_i	0	0.1	0.3	0.5
y_i	-0.5	0	0.2	1

1. По формулам (2.8,2.9) при n=3 имеем следующий обобщенный многочлен Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{3} y_i * l_i(x), \tag{4.1}$$

где многочлены Лагранжа $l_i(x)$, вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}
l_0 &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}, \\
l_1 &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}, \\
l_2 &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}, \\
l_3 &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

2. По формуле (2.13) оцениваем погрешность:

$$R_n(x) = |w| \cdot \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} = |w| \cdot \frac{1}{4!},$$

$$w = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3), \qquad (4.3)$$

$$\delta R_n(x) = \frac{|R_n(x)|}{|L_n(x)|}.$$

3. Примерный текст программы программ на Mathcad и на Delphy (в консольном режиме) для приближенного вычисления значений функции y=f(x) в трех точках x_1=0.05, x_2=0.25 и x_3=0.45 отрезка [x_0,x_4] с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа $L_n(x)$.

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.1 \\ 0.3 \\ 0.5 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 0.2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad w(xx) := (xx - x_0)\cdot(xx - x_1)\cdot(xx - x_2)\cdot(xx - x_3)$$

$$l(xx) := \begin{bmatrix} \dfrac{(xx - x_1)\cdot(xx - x_2)\cdot(xx - x_3)}{(x_0 - x_1)\cdot(x_0 - x_2)\cdot(x_0 - x_3)} \\ \dfrac{(xx - x_0)\cdot(xx - x_2)\cdot(xx - x_3)}{(x_1 - x_0)\cdot(x_1 - x_2)\cdot(x_1 - x_3)} \\ \dfrac{(xx - x_0)\cdot(xx - x_1)\cdot(xx - x_3)}{(x_2 - x_0)\cdot(x_2 - x_1)\cdot(x_0 - x_3)} \\ \dfrac{(xx - x_0)\cdot(xx - x_1)\cdot(xx - x_2)}{(x_3 - x_0)\cdot(x_3 - x_1)\cdot(x_3 - x_2)} \end{bmatrix}$$

$$Ln(xx) := \sum_{i=0}^{3} y_i \cdot l(xx)_i \qquad Rn(xx) := \frac{|w(xx)|}{4!} \qquad \delta Rn(xx) := \frac{|Rn(xx)|}{|Ln(xx)|}$$

$xx := 0.05$

$Ln(xx) = -0.179 \qquad Rn(xx) = 1.172 \times 10^{-5} \qquad \delta Rn(xx) = 6.533 \times 10^{-5}$

$xx := 0.25$

$Ln(xx) = 0.078 \qquad Rn(xx) = 1.953 \times 10^{-5} \qquad \delta Rn(xx) = 2.5 \times 10^{-4}$

$xx := 0.45$

$Ln(xx) = 0.556 \qquad Rn(xx) = 4.922 \times 10^{-5} \qquad \delta Rn(xx) = 8.858 \times 10^{-5}$

```
program lab3;
    {Интерполяция функций обобщенным многочленом Лагранжа.}
    {y- функция, x - аргумент}
    {Ln обобщенный многочлен Лагранжа}
    {R-абсолютная погрешность интерполяции}
    {RR-относительная погрешность интерполяции}
var xx,w,li,Ln,R,RR : real;
var x,y : array[0..3] of real;
var i,k : integer;
      begin
        writeln('Введите четыре значения величины x');
          readln (x[0],x[1],x[2],x[3]);
        writeln('Введите четыре значения величины y');
          readln (y[0],y[1],y[2],y[3]);
        writeln('Введите значение x');
          readln (xx);
            Ln:=0;
            w:=1;
             for i:=0 to 3 do begin
              w:=w*(xx-x[i]);                              вычисление w по (4.3)
              li:=1;
                for k:=0 to 3 do begin
                 if k<>i then li:=li*(xx-x[k])/(x[i]-x[k]);  вычисления l_i по (4.2)
                end;
                Ln:=Ln+y[i]*li;                            вычисления по (4.1)
            end;
            k:=1;
              for i:=1 to 4 do k:=k*i;                     вычисление значения 4!
             R:=abs(w/k);                                  вычисления по (4.3)
             RR:=R/abs(Ln);
           writeln('x=',xx,'    ','Ln=',Ln,'    ','R=',R,'    ','RR=',RR);
      end.
```

4. Заполняем таблицу с результатами.

xx_i	0.05	0.25	0.45
$Ln(x_i)$	-0.179	0.078	0.556
$Rn(x_i)$	$0.1172*10^{-4}$	$0.1953*10^{-4}$	$0.4922*10^{-4}$
$\delta Rn(x_i)$	$0.6538*10^{-4}$	$0.25*10^{-3}$	$0.8858*10^{-4}$

V. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

1. Название лабораторной работы.
2. Индивидуальное задание.
3. Вывод основных формул.
4. Текст программы.
5. Результаты расчета.

Замечание: Пункты 1-4, а также таблица для пункта 5 без численных результатов должны быть оформлены до начала выполнения лабораторной работы.

VI. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Узлы и сетка.
2. Локальная и глобальная интерполяция, экстраполяция.
3. Что такое линейная и квадратичная интерполяции?
4. Поведение производной при линейной и квадратичной интерполяции?
5. Определение сплайна.
6. Формулы для многочленов Лагранжа.
7. Формула обобщенного многочлена Лагранжа.
8. Погрешность интерполяции.
9. Формула для оценки погрешности интерполяции.
10. Выбор узлов для минимизации погрешности интерполяции.

VII. ТАБЛИЦА ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

№	Таблица значения f(x)				
	x/y	i=0	i=1	i=2	i=3
1	2	3	4	5	6
1.	x y	0.1 0	0.2 1	0.3 3	0.4 -1
2.	x y	0.5 -1	0.6 0	0.7 1	0.8 5
3.	x y	1.0 -3	1.5 -2	2.0 0	2.5 0.5
4.	x y	1.2 5	1.4 2	1.6 0	1.8 -5
5.	x y	1.0 -8	1.2 -3	1.4 -4	1.6 0
6.	x y	0 5	0.2 0	0.4 2	0.6 -1
7.	x	0	0.5	1.0	1.5

№	Таблица значения f(x)				
	x/y	i=0	i=1	i=2	i=3
	y	-1	0	-1	2
8.	x y	1.0 0	1.2 -3	1.4 2	1.6 0
9.	x y	0.2 -2	0.4 0	0.6 3	0.8 0
10.	x y	1.0 -3	1.5 2	2.0 0	2.5 -0.5
11.	x y	0.1 0	0.2 -1	0.3 -3	0.4 1
12.	x y	0.5 1	0.6 0	0.7 -1	0.8 -5
13.	x y	1.0 3	1.5 2	2.0 0	2.5 -0.5
14.	x y	1.2 -5	1.4 -2	1.6 0	1.8 5
15.	x y	1.0 8	1.2 3	1.4 4	1.6 0
16.	x y	0.1 0.5	0.25 0.8	0.45 -2	0.65 1
17.	x y	0.3 -0.1	0.8 0.7	1.0 -1.9	1.2 2.9
18.	x y	1.5 0,8	1.5 -3.0	2.0 2.0	2 0.9
19.	x y	0.25 -0.2	0.45 0.9	0.65 0.3	0.85 0.8
20.	x y	0.4 -0.3	1.5 2.6	2.4 0.7	2.9 -0.9