МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра программной инженерии

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_____________ О.Г. Локтионова
«16» июня 2015 г.

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЙ ВЫБОР. СРАВНЕНИЕ ВАРИАНТОВ ПО ЭФФЕКТИВНОСТИ

Методические указания по выполнению лабораторной работы
по курсу «Теория принятия решений»
для студентов направления подготовки 09.03.04 «Программная инженерия», 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Курск 2015

УДК 681.3.06(075.8)

Составители: В.В. Апальков, Р.А. Томакова, Ф.А.Старков

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент кафедры «Информационные системы и технологии» Юго-Западного государственного университета *Т.И. Лапина*

Многокритериальный выбор. Сравнение вариантов по эффективаности: методические указания по выполнению лабораторной работы / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: В.В. Апальков, Р.А. Томакова, Ф.А.Старков. Курск, 2015. 9 с. Библиогр.: с. 9.

Излагается цель лабораторной работы, в теоретической части рассматриваются связь различных способов описания выбора, отношения Парето и Слейтера. В практической части приводятся пример выполнения задания на лабораторную работу и вопросы для самопроверки.

Методические указания соответствуют требованиям рабочей программы по направлению подготовки бакалавров 09.03.04 «Программная инженерия».

Предназначены для студентов направления подготовки бакалавров 09.03.04.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать. Формат 60×84 1/16.

Усл. печ. л. 0,6. Уч.-изд. л. 0,4. Тираж 50 экз. Заказ. Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.

305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Цель работы: изучить связь многокритериального описания системы предпочтений лица, принимающего решение (ЛПР), и языка бинарных отношений.

Теоретическая часть.

1. Однокритериальный выбор

Пусть Y – множество исходов в задаче принятия решений. Предположим, что каждый исход оценивается действительным числом из множества значений шкалы критерия в соответствии с отображением:

$$f : Y \to R,$$

где f – целевая функция (критерий качества, критериальная функция, показатель эффективности, критерий оптимальности).

Будем считать, что для ЛПР исход y_i предпочтительнее исхода y_j, если y_i имеет не меньшее или большее значение критерия качества f, чем y_j:

$$f(y_i) \geq f(y_j) \text{ или } f(y_i) > f(y_j).$$

Фактически на множестве исходов Y задаются бинарные отношения нестрого порядка R_1 и строгого порядка R_2. Точки максимума функции f(y) из Y образуют множество максимальных элементов $\mathrm{Max}_{R_n} Y$ в модели $< Y, R_n >$ (n=1,2).

Очевидно, что множество максимальных элементов из Y по бинарному отношению R_n (n=1,2) внешне устойчиво в Y. Следовательно, для заданной выше системы предпочтений ЛПР задача оптимального выбора сводится к задаче построения ядра бинарного отношения нестрого порядка или бинарного отношения строгого порядка.

2. Многокритериальный выбор

Предположим, что каждый исход оценивается несколькими числовыми показателями качества $f_1(y)$, $f_2(y),\ldots, f_m(y)$ со значениями из множества значений шкалы соответствующего критерия, т.е.:

$$f_k\colon Y\to R,\ \ k=1,2,...,m.$$

Будем считать, что для ЛПР исход y_i предпочтительнее исхода y_j, если вектор показателей качества $f(y_i)=(f_1(y_i),\ f_2(y_i),\ldots,\ f_m(y_i))$ исхода y_i доминирует вектор показателей качества $f(y_j)=(f_1(y_j),\ f_2(y_j),\ldots,\ f_m(y_j))$ исхода y_j :

$f_k(y_i) \geq f_k(y_j)$, $k=1,2,...,m$, и $f_l(y_i) > f_l(y_j)$ хотя бы для одного номера $k=l$.

В этом случае отношение доминирования называется отношением Парето (R_P).

Аналогично, для ЛПР исход y_i предпочтительнее исхода y_j, если вектор показателей качества $f(y_i)=(f_1(y_i),\ f_2(y_i),\ldots,\ f_m(y_i))$ исхода y_i строго доминирует вектор показателей качества $f(y_j)=(f_1(y_j),\ f_2(y_j),\ldots,\ f_m(y_j))$ исхода y_j :

$$f_k(y_i) > f_k(y_j),\ \ k=1,2,...,m.$$

В этом случае отношение доминирования называется отношением Слейтера (R_S).

Дадим ряд необходимых определений [3].

Определение 1.

Если для некоторого исхода $y^0\in Y$ не существует исхода y из множества Y, что $(y,\ y^0) \in R_P$, то тогда исход y^0 называется эффективным, или оптимальным по Парето решением многокритериальной задачи $f_k(y) \to \max$, $k = 1,2,..., m$; $y\in Y$.

Обозначим через $P(Y)$ множество всех эффективных элементов множества Y (множество Парето).

Пусть $P(f)$ образ множества $P(Y)$ в пространстве критериев R^m, где $f=(f_1,f_2,\dots,f_m)$. Множество $P(f)=f(P(Y))$ называется множеством эффективных оценок (множество Парето в пространстве критериев). Множество $P(f)$ состоит из недоминируемых векторов показателей качества, несравнимых между собой.

Определение 2.

Исход $y'\in Y$ называется слабо эффективным решением многокритериальной задачи, или оптимальным по Слейтеру решением, если не существует исхода y из множества Y, что $(y, y') \in R_S$.

Обозначим через $S(Y)$ множество всех слабо эффективных элементов множества Y. Очевидно, что $P(Y) \subseteq S(Y)$.

Пусть $S(f)$ образ множества $S(Y)$ в пространстве критериев. $S(f)=f(S(Y))$ - множество слабо эффективных оценок. Как и ранее, множество $S(f)$ состоит из недоминируемых векторов показателей качества, несравнимых между собой.

Аналогично однокритериальной задаче выбора, в многокритериальной задаче выбор оптимального элемента необходимо производить в ядре отношения Парето (Слейтера), которое совпадает с множеством эффективных элементов $P(Y)$ (слабо эффективных элементов $S(Y)$). Выбор оптимального элемента в ядре отношения требует уточнения используемой информации о системе предпочтений пользователя.

Выбор в качестве лучших слабо эффективных элементов $S(Y)$ множества Y при решении задач многокритериальной оптимизации на практике встречается реже, чем выбор эффективных элементов $P(Y)$.

Отметим также, что в однокритериальных и многокритериальных задачах принятия решений возможны различные системы предпочтений ЛПР, выраженные на языке бинарных отношений.

Практическая часть.

1. Построить отношение Парето R_P и его граф для случая двух показателей качества f_1 и f_2 на множестве исходов $Y = \{ y_1, y_2, \ldots, y_7 \}$ (образы исходов y_i изобразить на плоскости).
2. Найти ядро отношения Парето на Y.
3. Построить отношение несравнимости R_H.
4. Построить отношение Слейтера R_S и его граф.
5. Найти ядро отношения Слейтера на Y.

Решение.

Изобразим образы исходов y_i в пространстве (рис. 1):

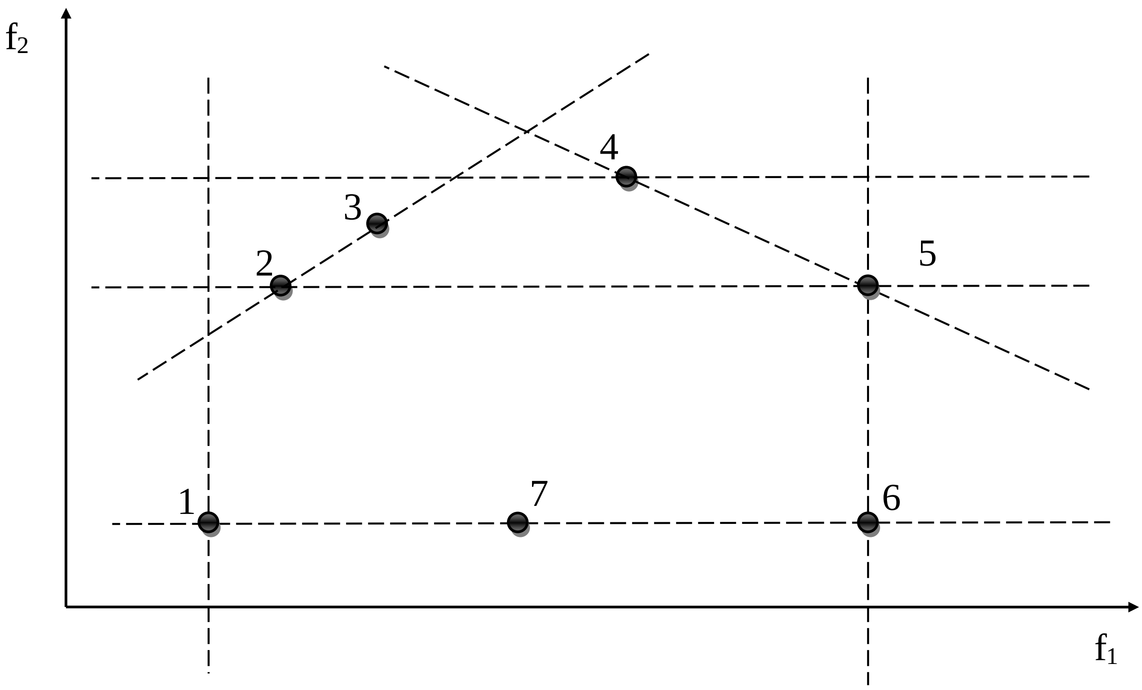

Рис. 1. Образы исходов

1. Используя определение доминирования по Парето, построим отношение R_P и его граф (рис. 2):

R_P = {(y_2, y_1), (y_3, y_1), (y_4, y_1), (y_5, y_1), (y_6, y_1), (y_7, y_1), (y_3, y_2), (y_4, y_2), (y_5, y_2), (y_4, y_3), (y_5, y_6), (y_4, y_7), (y_5, y_7), (y_6, y_7)} – отношение Парето.

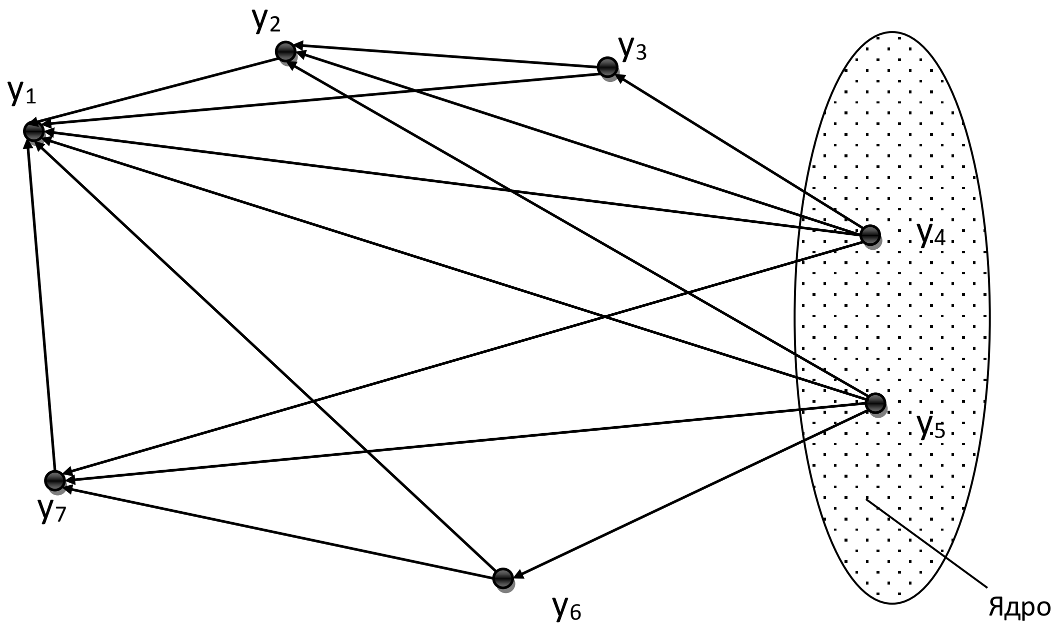

Рис. 2. Граф отношения Парето

2. Определим множество максимальных элементов по Парето:

$\mathrm{Max}_{R_P} Y = \{y_4, y_5\}$ – множество максимальных элементов.

Следует отметить, что наилучшие элементы в данном случае отсутствуют, а множество $\mathrm{Max}_{R_P} Y$ - внешне устойчиво, т.к. из вершин графа, представляющих множество максимальных элементов, существуют ребра во все остальные вершины графа. Следовательно, $\mathrm{Max}_{R_P} Y$ является ядром отношения Парето (рис. 2).

3. Построим отношение несравнимости R_H:

R_H = {(y_2, y_6), (y_2, y_7), (y_3, y_5), (y_3, y_6), (y_3, y_7), (y_4, y_5), (y_4, y_6), …}.

Отношение несравнимости в многокритериальных задачах является симметричным, но не является транзитивным.

4. С помощью аналогичных действий построим отношение Слейтера R_S и его граф (рис. 3):

R_S = {(y_2, y_1), (y_3, y_1), (y_4, y_1), (y_5, y_1), (y_3, y_2), (y_4, y_2), (y_4, y_3), (y_4, y_7), (y_5, y_7)} – отношение Слейтера.

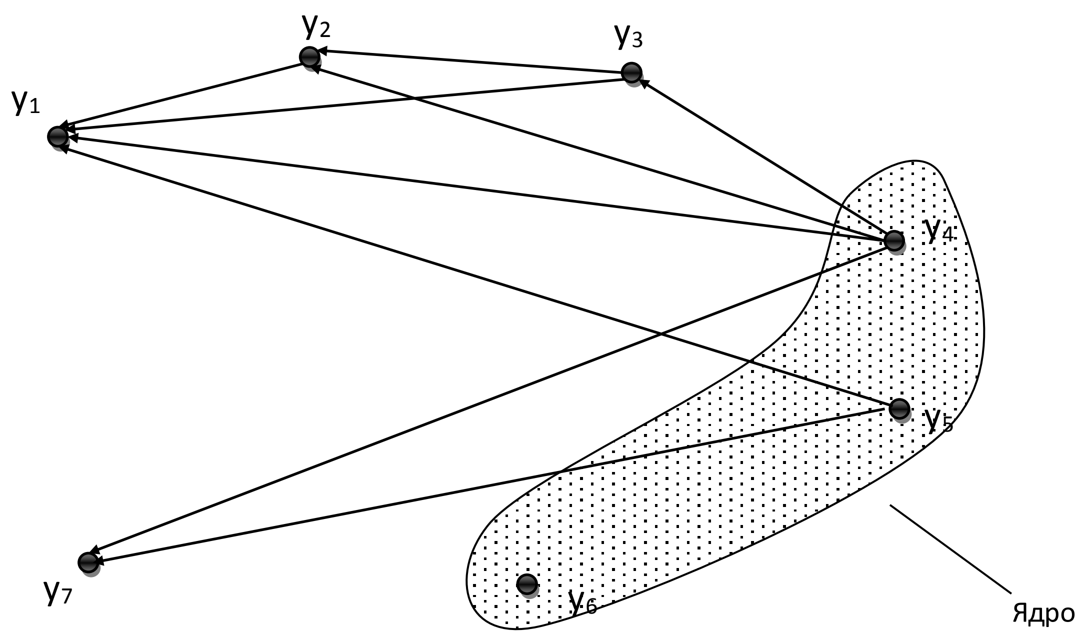

Рис. 3. Граф отношения Слейтера

5. Определим множество максимальных элементов по Слейтеру:

$\mathrm{Max}_{R_S} Y = \{ y_4, y_5, y_6\}$ – множество максимальных элементов.

Множество $\mathrm{Max}_{R_S} Y$ – внешне устойчиво, т.к. из вершин графа, представляющих множество максимальных элементов, существуют ребра во все остальные вершины графа, а следовательно $\mathrm{Max}_{R_S} Y$ является ядром.

Вопросы для самопроверки.

1. Однокритериальный и многокритериальный выбор.
2. Отношения Парето и Слейтера.
3. Связь критериального языка описания выбора и языка бинарных отношений.

Литература.

1. Орлов А.И. Теория принятия решений: учебник / А.И. Орлов. – М.: Изд-во «Экзамен», 2006. – 573 с.

2. Петровский А. Б. Теория принятия решений [Текст] : учебник. – М. : Академия, 2009. – 400 с. – (Университетский учебник. Прикладная математика и информатика).

3. Черноруцкий И.Г. Методы принятия решений: учебное пособие /И.Г. Черноруцкий. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 416 с.