МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждения высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра информационной безопасности

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_______________ О.Г. Локтионова
«______» _______________ 2017 г.

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

Методические рекомендации по выполнению лабораторных работ №6, №7
для студентов укрупненных групп специальностей 09.00.00, 10.00.00, 11.00.00

Курск 2017

УДК 621.(076.1)

Составители: В.П. Добрица

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент кафедры
«Информационные системы и технологии» Ю.А. Халин

Теория графов [Текст] : методические рекомендации по выполнению лабораторных работ / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: В.П. Добрица. – Курск, 2017. – 21 с.: – Библиогр.: с. 21.

Содержат сведения и материалы по разделу дискретной математики – теория графов. Указывается порядок выполнения лабораторной работы, правила оформления отчета.

Методические указания соответствуют требованиям программы, утвержденной учебно-методическим объединением по специальности.

Предназначены для студентов укрупненных групп специальностей и направлений подготовки 09.00.00, 10.00.00, 11.00.00.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 17.11.17. Формат 60x84 1/16.
Усл.печ. л. 1,22. Уч.-изд. л. 1,11. Тираж 100 экз. Заказ. Бесплатно. 1934
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

В данных методических рекомендациях изложен материал по разделу дискретной математики - теория графов.

Рассмотрены следующие темы: определение и способы задания графов, гомоморфизм и изоморфизм графов, часть графа, подграф, операции над графами, пути и маршруты в графе, связность в графе, эксцентриситет вершины, диаметр и радиус графа, периферийные и центральные вершины, остов графа, корневые деревья циклический и ко-циклический ранги графов, взвешенные графы, алгоритмы нахождения остова графа наименьшего веса.

По каждой практической работе представлены:

1) краткие теоретические положения;
2) перечень вопросов, выносимых на практическое задание;
3) примеры задач, выносимых на практическое занятие;
4) задачи, выносимые на самостоятельную работу студентов.

Данные методические рекомендации предназначены для проведения практических занятий по дисциплине «Дискретная математика» для студентов второго курса Юго-Западного государственного университета следующих направлений подготовки: информационная безопасность; инфокоммуникационные технологии и системы связи, информационные системы и технологии.

По изложенным в данных методических рекомендациях материалам можно рекомендовать преподавателю проведение 4-х часов практических занятий по следующему плану:

- Графы и операции над ними (2 часа);
- Связность в графах. Диаметр и радиус графа (2 часа).

При выполнении каждой работы следует приводить все этапы выполняемых рассуждений, необходимый теоретический материал для объяснения проводимых преобразований и вычислений, обоснование делаемых выводов.

На титульном листе привести следующие данные: ЮЗГУ, кафедра , предмет, номер задания, номер варианта, ФИО студента, номер группы, данные о проверяющем.

Практическое занятие №6

Графы и операции над ними

Цель: изучить способы задания графов, основные операции над ними, понятия гомоморфизма и изоморфизма графов, каркаса (остова) графа, рангов графа. Научиться решать задачи по указанным темам.

Вопросы, выносимые на практическое занятие.

1. Понятие графа и способы задания графов.
2. Гомоморфизм и изоморфизм графов.
3. Операции над графами.
4. Остов (каркас) графа.
5. Циклический и ко-циклический ранги графа.

Краткие теоретические положения

Граф будем обозначать парой $G =< V, E >$, где V- множество вершин, E- множество ребер. Если $e \in E$, то $e = (a, b)$ *направленное ребро*, причем вершина a- начало ребра, а вершина b - конец ребра. Если ребро без направления (двунаправленное), то будем его обозначать так: $[a, b]$.

Если в графе имеются направленные ребра, то его будем называть *ориентированным – орграфом*. Если все ребра графа не направленные, то он называется *неориентированным – неорграфом*.

Граф можно задать графически (рисунком), матрицей соответствия, когда в таблице для каждого ребра указывается его начало и конец, матрицей инцидентности, в которой строки названы именами ребер, а столбцы – именами верши. Для каждого ребра -1 отмечается столбец, соответствующий его началу, и 1 столбец, соответствующий концу ребра. Для неориентированного ребра в обоих случаях используется 1. «Петли» отмечаются каким-то другим символом, например, - 2.

Граф $G_1 =< V_1, E_1 >$, называется *гомоморфным* образом графа $G =< V, E >$, если существует отображение $\varphi: V \to V_1$, *сохраняющее наличие ребер* между вершинами, т.е. если вершины были соединены в графе G, то их образы будут соединены ребром и в графе G_1.

Два графа $G =< V, E >$, $G_1 =< V_1, E_1 >$ называются *изоморфными*, если существует взаимно однозначное соответствие $\varphi: V \to V_1$, сохраняющее связность вершин ребрами как из графа G в граф G_1, так и наоборот из графа G_1 в граф G.

Под *объединением* графов $G =< V, E >$, $G_1 =< V_1, E_1 >$ понимается граф $G_2 ==< V \cup V_1, E \cup E_1 >$. *Пересечением* этих графов называется граф $G_3 ==< V \cap V_1, E \cap E_1 >$.

Граф $G_1 =< V_1, E_1 >$ называется *частью* графа $G =< V, E >$, если выполнены условия $V_1 \subset V$ и $E_1 \subset E$.

Последовательность ребер графа такая, что конец предыдущего ребра является началом следующего, называется *маршрутом* (*путем*) в графе. Две вершины графа, связанные некоторым путем, называются *связанными*. Если путь состоит из одного ребра, то вершины называются *смежными*.

Граф $G_1 =< V_1, E_1 >$ называется *подграфом* графа $G =< V, E >$, если выполнены условия $V_1 \subset V$ и $E_1 \subset E$, причем, если вершины из V_1являются смежными в графе G, то они будут смежными и в графе G_1 (т.е. E_1 получается из множества ребер E ограничением на множество вершин V_1).

Часть графа, не содержащая циклов и сохраняющая связность вершин, называется *остовом* (*каркасом*) графа.

Число ребер графа, которые необходимо удалить для получения каркаса этого графа, называется *циклическим рангом*.

Число ребер остова графа называется *ко-циклическим рангом* графа.

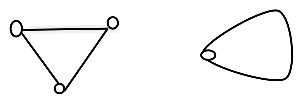
Произведением графов $G =< V, E >$, $G_1 =< V_1, E_1 >$ называется граф $G_3 =< V_3, E_3 >$, где $V_3 = V \times V_1$ и ребро $(< a, a_1 >, < b, b_1 >)$ входит в множество E_3 тогда и только тогда, когда либо $(a, b) \epsilon E$ и a_1=b_1, либо $a = b$ и $(a_1, b_1) \epsilon E_1$.

Композицией графов $G =< V, E >$, $G_1 =< V_1, E_1 >$ называется граф $G_3 =< V_3, E_3 >$, где $V_3 = V \times V_1$ и ребро $(< a, a_1 >, < b, b_1 >)$ входит в множество E_3 тогда и только тогда, когда либо $(a, b) \epsilon E$, либо $a = b$ и $(a_1, b_1) \epsilon E_1$.

Примеры задач, выносимых на практическое занятие

Задача 1

Рассмотрим графы



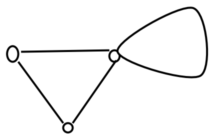
Если все вершины первого графа отобразить в единственную вершину второго графа, то получим гомоморфизм, т.к. сохранение связности вершин имеется.

Задача 2

Для двух графов задачи 1 изоморфизма не существует, т.к. число вершин в первом из них 3, а во втором 1. А при изоморфизме число вершин графов является инвариантом.

Задача 3.

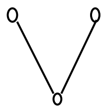
Если вершины первого графа обозначим цифрами 1,2,3, а второго 1, то объединением графов будет являться следующий граф



Пересечением графов будет являться одна вершина.

Задача 4.

Циклический ранг равен 2, т.к. убрав два ребра, мы получим остов графа.



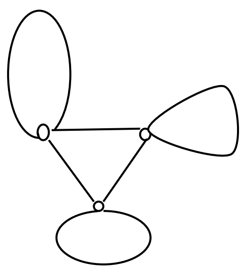
В остове осталось 2 ребра, поэтому и ко-циклический ранг графа равен 2.

Задача 5.

Каркас графа приведен в задаче 4.

Задача 6.

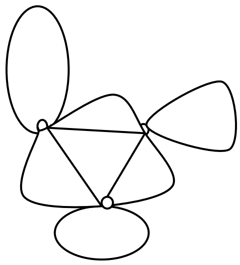
Множество вершин произведения графов является множеством пар: $\{<1,1>,<2,1>,<3,1>\}$. На этом множестве вершин восстановим ребра в соответствии с определением.



Композиция $G_1[G_2]$ в данном случае будет совпадать с произведением графов.

В композиции $G_2[G_1]$ множеством вершин будет являться

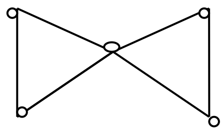
$\{< 1,1 >, < 1,2 >, < 1,3 >\}$. И рисунок графа изменится, т.к. если первые координаты как вершины первого графа связаны ребром в G_1, то не зависимо от вторых координат вершин ребра вставляются в композиции между этими вершинами. Кроме того, если первые координаты равны, то ребро ставится между вершинами, для которых вторые координаты связаны во втором графе.

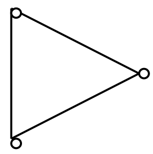


Задачи, выносимые на самостоятельную работу студентов

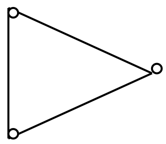
Задача 1. Для каждой приведенной пары графов найдите гомоморфизм из одного графа в другой, если он существует.

Вариант 1)

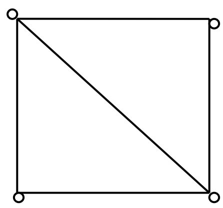


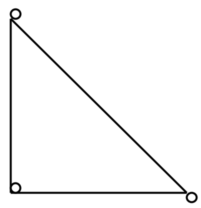


Вариант 2)

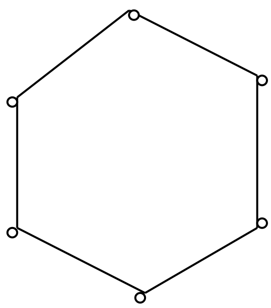


Вариант 3)

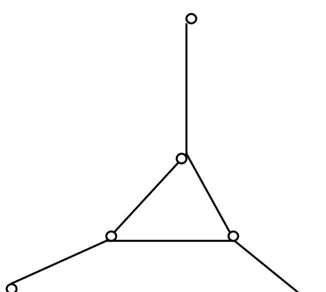


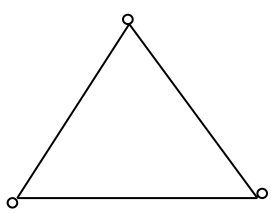


Вариант 4)

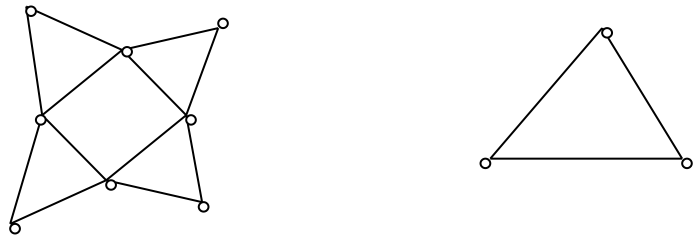


Вариант 5)





Вариант 6)



Вариант 7)

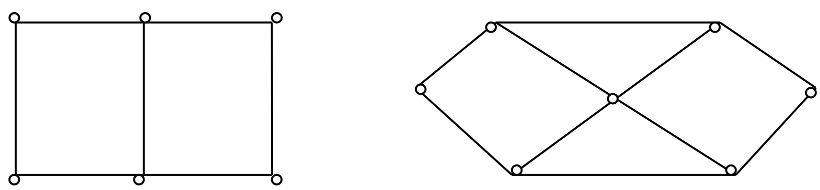
Вариант 8)

Задача 2. Для каждой приведенной пары графов описать изоморфизм между ними или показать, что вследствие нарушения инвариантности графы не изоморфны.

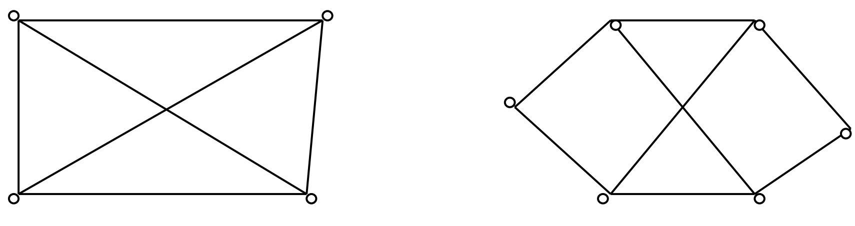
Вариант 1)

Вариант 2)

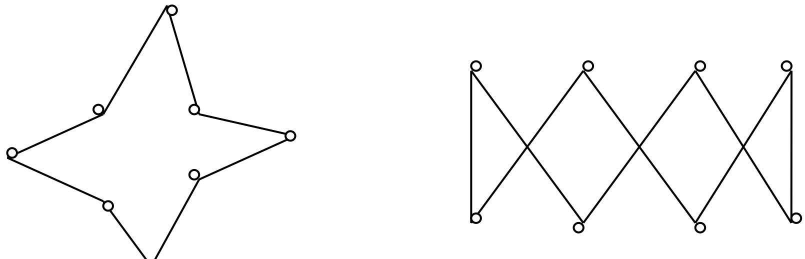
Вариант 3)



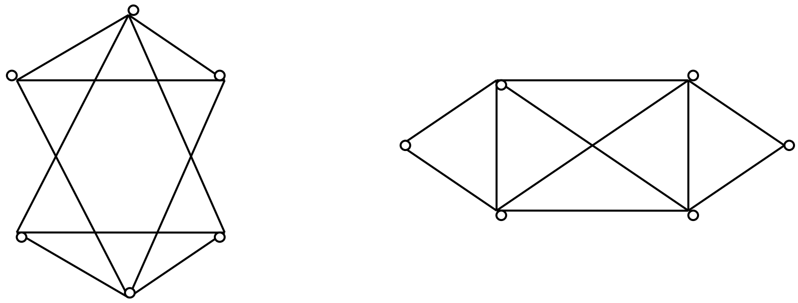
Вариант 4)



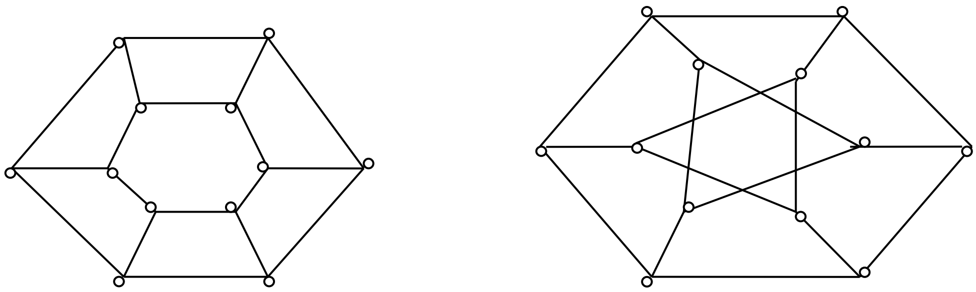
Вариант 5)



Вариант 6)



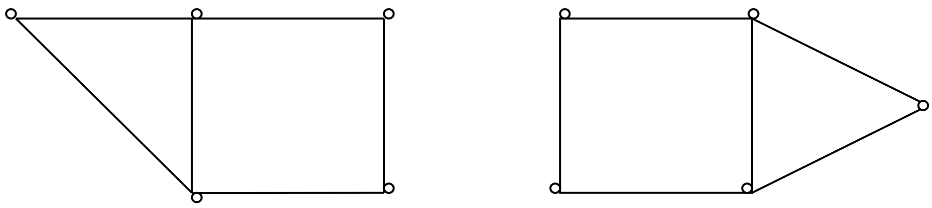
Вариант 7)



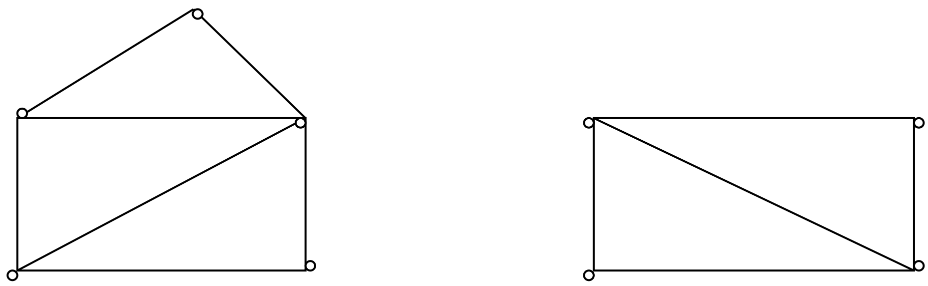
Вариант 8)

Задача 3. Найти объединение и пересечение приведенных ниже множеств графов.

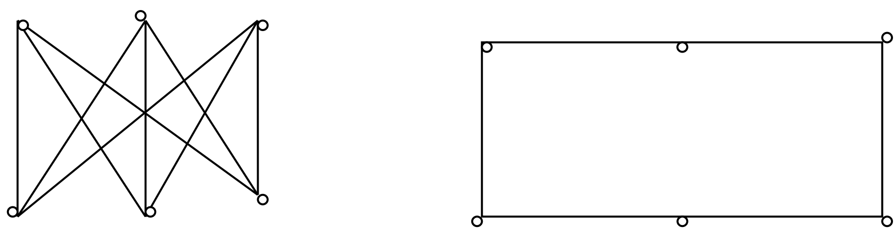
Вариант 1)



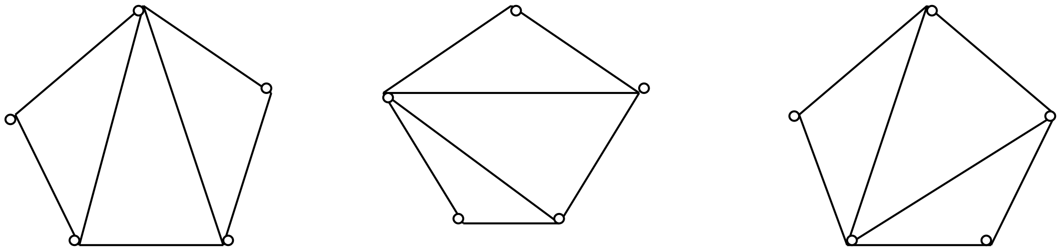
Вариант 2)



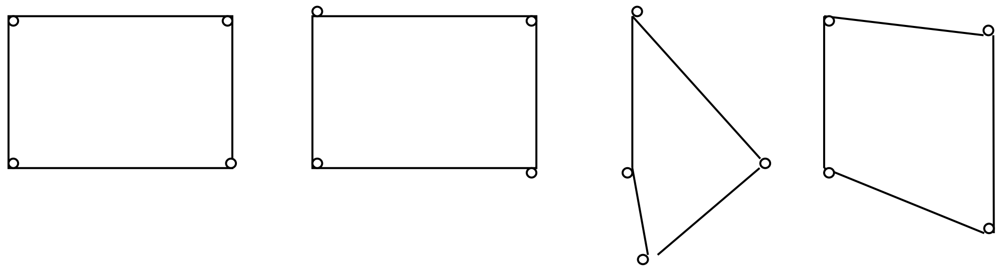
Вариант 3)



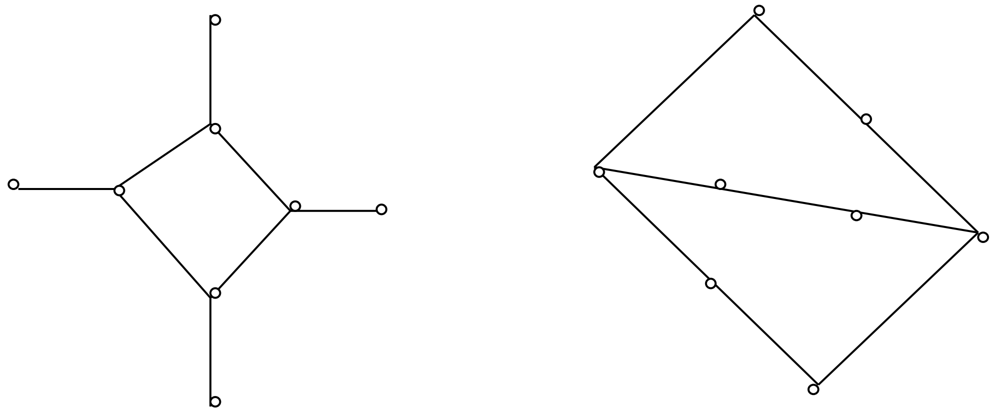
Вариант 4)



Вариант 5)

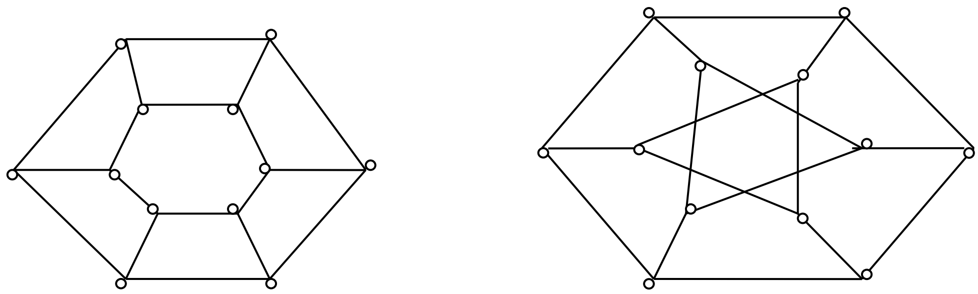


Вариант 6)



Вариант 7)

Вариант 8)



Задача 4. В задаче 3 подсчитать циклический и ко-циклический ранги графов, считая графом систему, заданную под одним пунктом.

Задача 5. Найти каркас каждого графа, рассмотренного в задаче 2.

Задача 6. Для пар графов, приведенных в задаче 1, найти произведения и композиции, меняя порядок в парах.

Практическое занятие №7

Связность в графах Взвешенные графы.

Цель: Освоить основные понятия в ориентированных и неориентированных графах, деревьев.

Вопросы, выносимые на практическое занятие.

1. Пути и маршруты в графе. Связность вершин и графа.
2. Взвешенные графы, их применения.
3. Алгоритм нахождения остова наименьшего веса.
4. Эксцентриситет вершины. Диаметр и радиус графа.
5. Периферийные и центральные вершины.
6. Деревья, лес, корневые деревья.

Краткие теоретические положения

Если каждому ребру графа поставлено в соответствие некоторое число (называемое *весом* этого ребра), то граф называется *взвешенным*. Сумма весов всех ребер графа является *весом самого графа*.

Число ребер, исходящих из данной вершины, называется *степенью истока*. Число ребер, входящих в данную вершину, называется степенью стока. Если ребра ненаправленные, то степени стока и истока будут равны, в этом случае говорят просто о *степени вершины*.

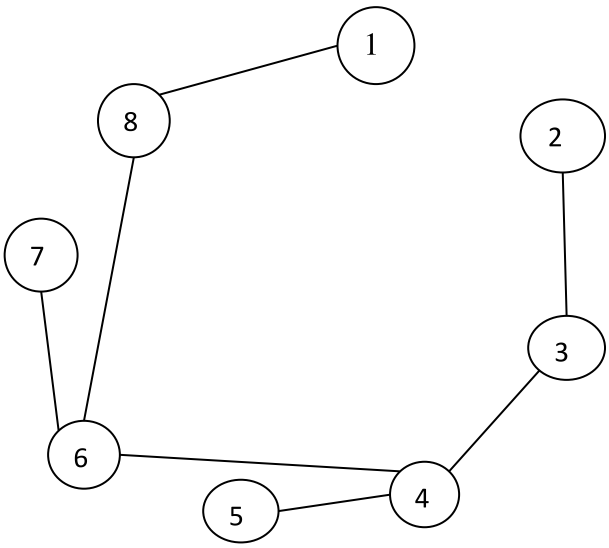
Максимальное расстояние от данной вершины до других вершин этого графа называется *эксцентриситетом* этой вершины. Минимальное значение эксцентриситета вершин называется *радиусом* графа. Максимальное значение эксцентриситета вершин называется диаметром графа.

Вершины, для которых эксцентриситет равен радиусу графа, называются *центральными*. Вершины, для которых эксцентриситет равен диаметру графа, называются *периферийными*.

Примеры задач, выносимых на практическое занятие

Задача 1.

Рассмотрим граф варианта 9 из задачи 1 практических заданий для самостоятельной работы студентов. В начале рассмотрим только вершины графа, которые затем будем соединять ребрами наименьшего веса так, чтобы не образовывалось циклов. Последовательно рассматриваем сначала ребра длины 1, затем – 2, потом -3 и т.д. до получения связного дерева. В результате получим остов наименьшего веса 17.



Задача 2

Для ваианта 9 задачи 2 из заданий для самостоятельной работы выпишем все пути из вершины 1 в вершину 2, указывая вершины, через которые проходит путь.

1 – 2;

1 – 8 – 2;

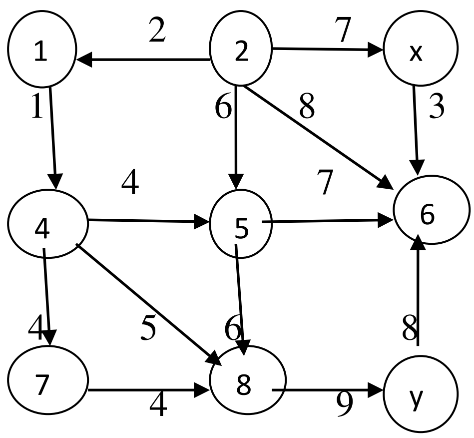
1 – 8 – 4 – 5- 6 -2;

1 – 8 – 4 – 5 – 6 – 7 – 3 – 2.

Для других вершин делается все аналогично.

Задача 3

В графе, представленном на рисунке из вершины x выходит толко одно ребро в вершину 6. А вот из вершины 6 нет выходящих ребер, поэтому пути до вершины y не существует.



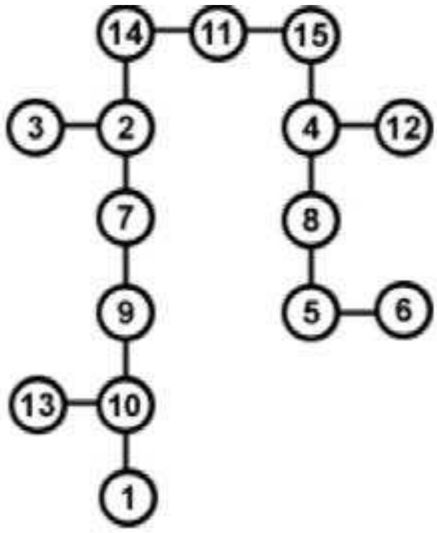
Задача 4

4.1. Для заданного дерева из варианта 9 задачи 4 из заданий для самостоятельного выполнения определим определите: эксцентриситет вершины 11. Самыми удаленными вершинами будут 13 и 1. Расстояние до них равно 6, следовательно $e(11) = 6$. Аналогично определяются и остальные эксцентриситеты $e(1) = 11, e(2) = 7, e(3) = 8, e(4) = 8, e(5) = 10, e(6) = 11, e(7) = 8, e(8) = 9, e(9) = 9, e(10) = 10, e(11) = 6,\ e(12) = 9, e(13) = 11, e(14) = 6$. Наибольшее значение эксцентриситета равно 11, поэтому диаметр графа $d(G) = 11$. А наименьшее значение эксцентриситета равно 6, т.е. радиус графа равен $r(G) = 6$. В соответствии с определением, центральными вершинами являются вершины 11 и 14, а периферийными – 1 и 13.

4.2. Обход графа из вершины 11 :

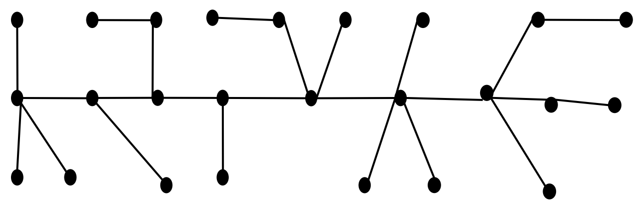
а) по глубине: 11, 14, 2, 7, 9, 10, 1, 13, 3, 15, 4, 8, 5, 6, 12;

б) по ширине: 11, 14, 15, 2, 4. 3, 7, 8, 12, 9, 5, 10, 6, 13, 1.



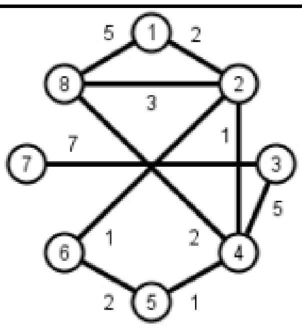
Задача 5

В графе вершина с максимальной степенью 5 только одна. Возьмем ее в качестве корня древа и постепенно по уровням нарисуем соответствующее дерево.

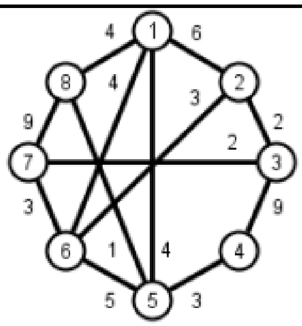


Задачи, выносимые на самостоятельную работу студентов

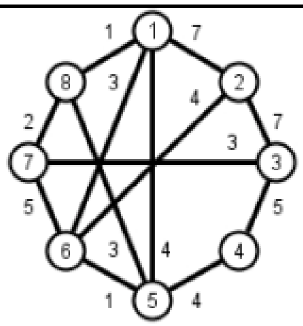
Задача 1. Найти остов графа наименьшего веса (Варианты графов в таблице).



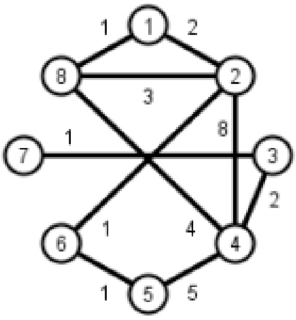
10.1



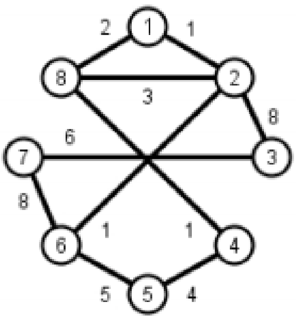
10.2



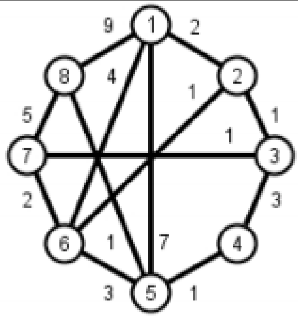
10.3



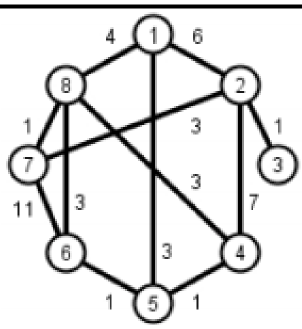
10.4



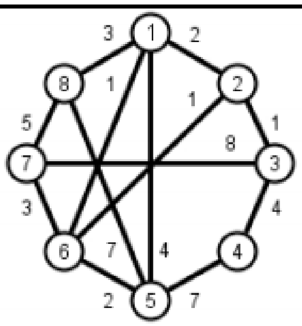
10.5



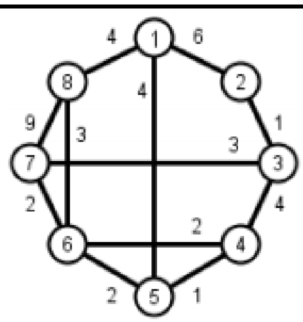
10.6



10.7



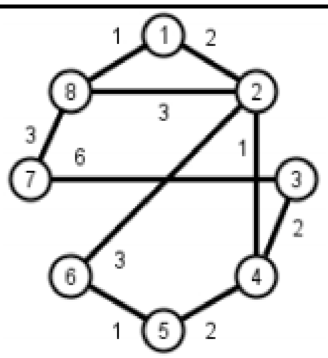
10.8



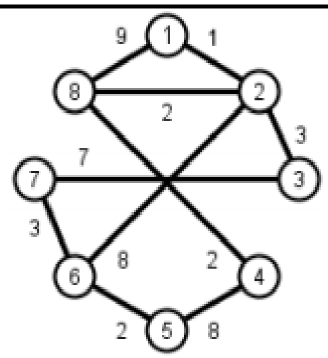
10.9

Задание 2.

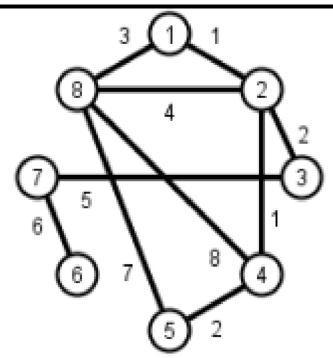
Для заданного весового не орграфа выписать все пути из вершины 1 ко всем остальным вершинам. Для каждой такой пары вершин выбрать кратчайшие пути.



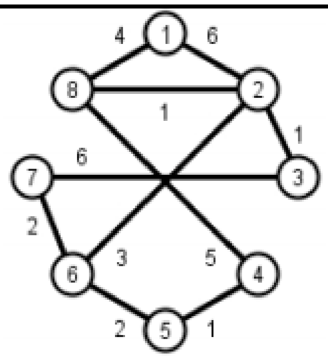
11.1



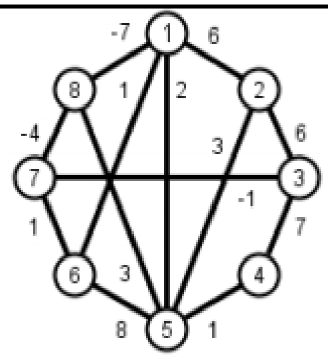
11.2



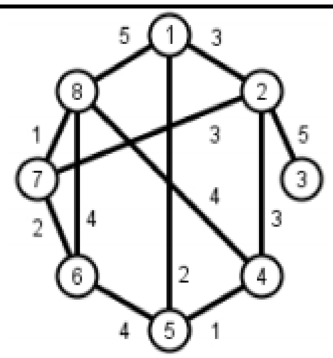
11.3



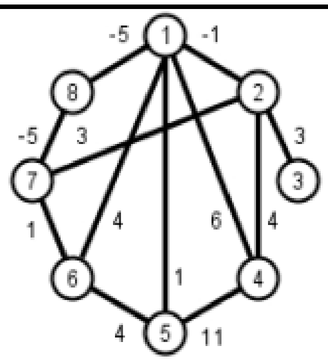
11.4



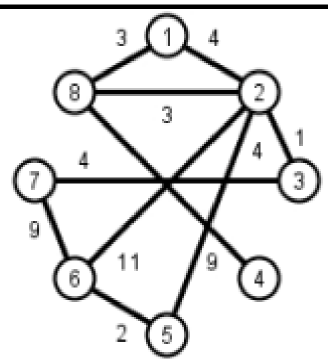
11.5



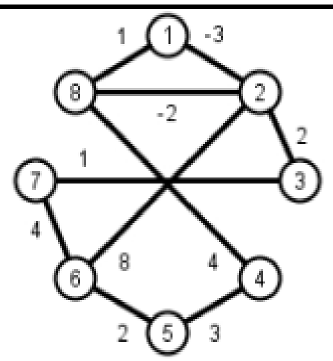
11.6



11.7



11.8

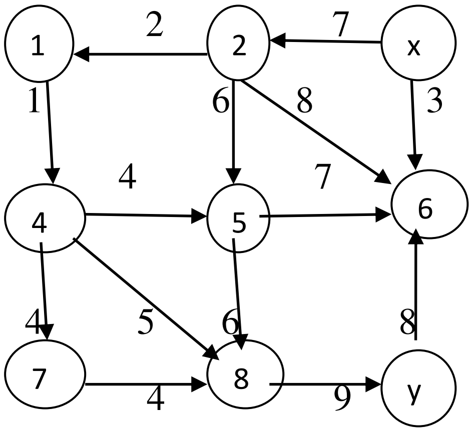


11.9

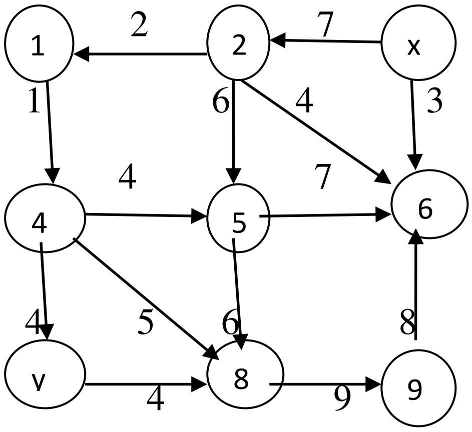
Задание 3.

Для заданного весового орграфа выписать все пути из вершины x в вершину y. Найти кратчайший путь.

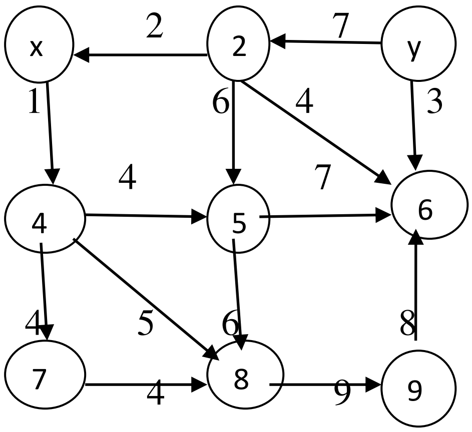
Вариант 1)



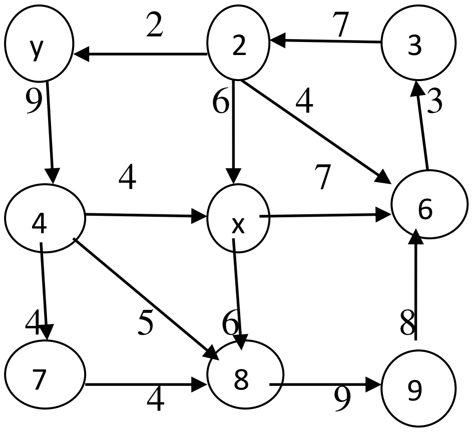
Вариант 2)



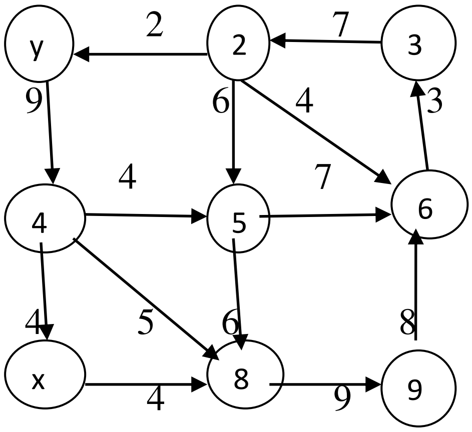
Вариант 3)



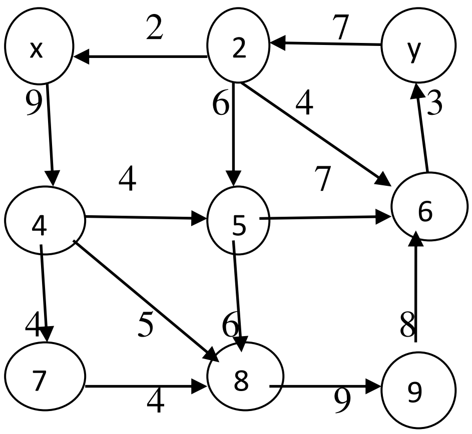
Вариант 4)



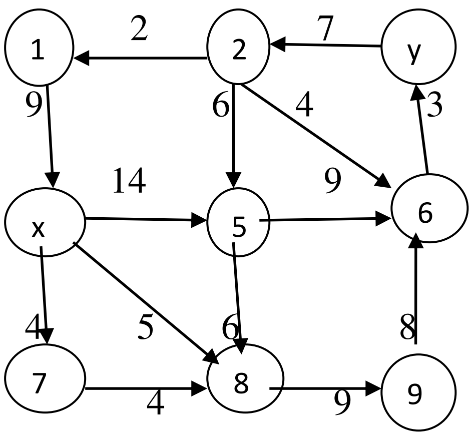
Вариант 5)



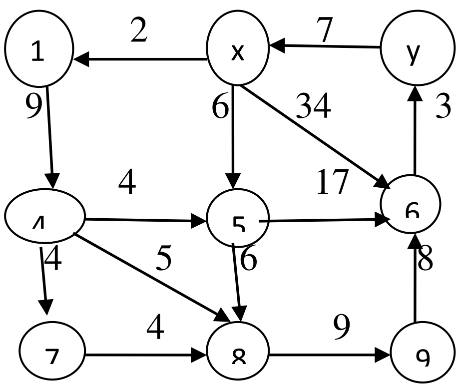
Вариант 6)



Вариант 7)



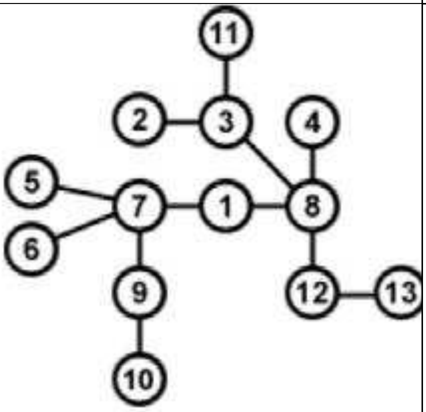
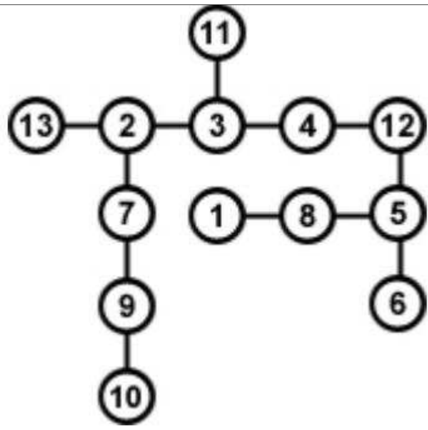
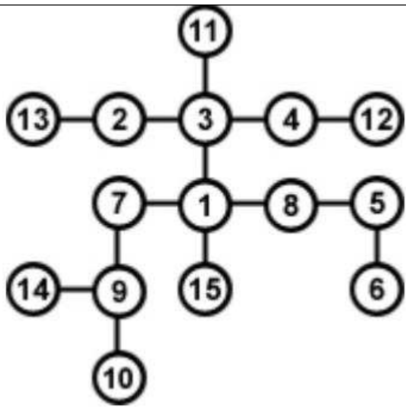
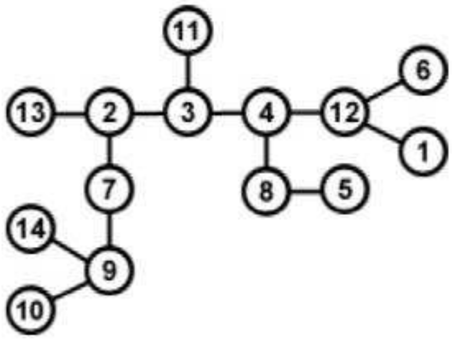
Вариант 8)

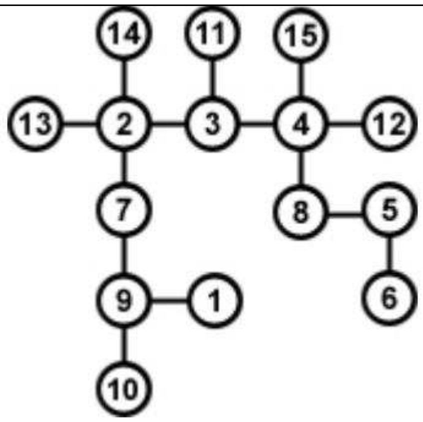
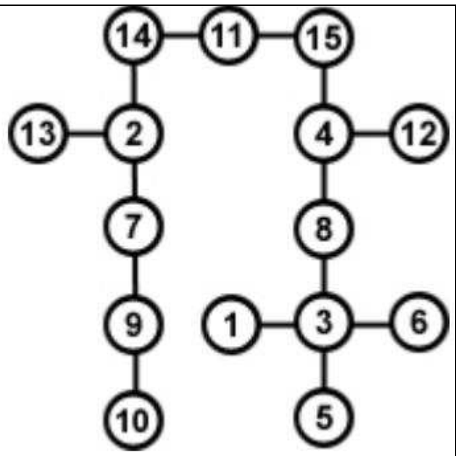
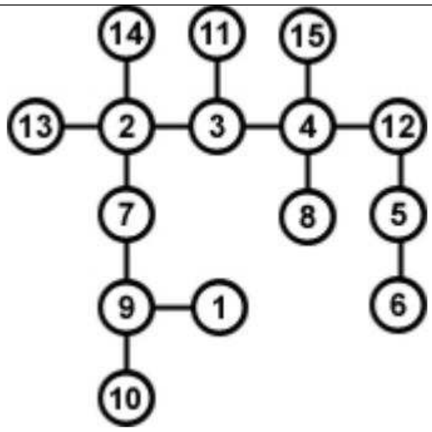
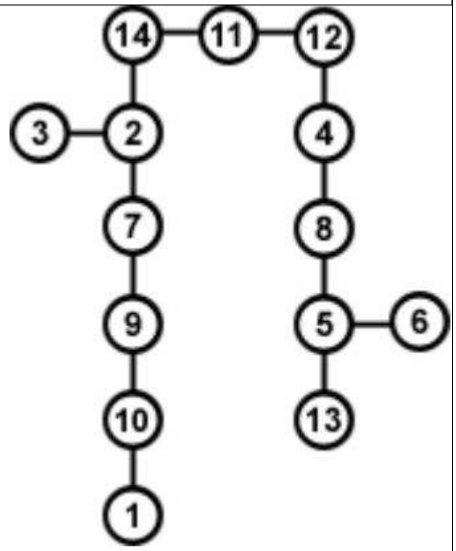
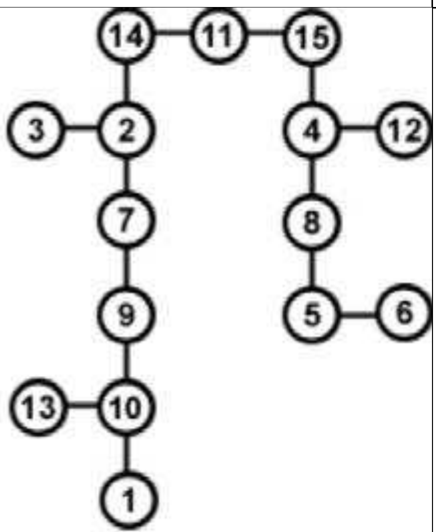
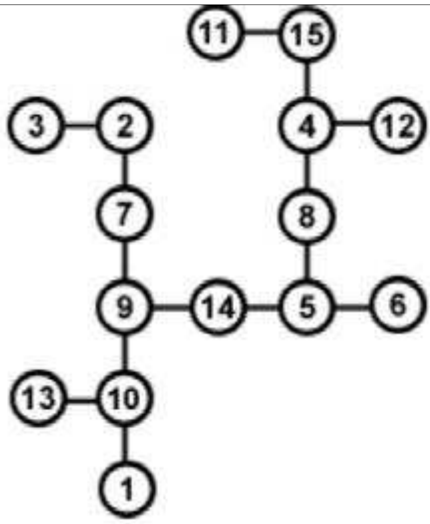


Задание 4.

4.1. Для заданного дерева определите:
а) эксцентриситеты вершин;
б) указать центральные и периферийные вершины.
б) определить радиус и диаметр графа;

4.2. Из вершины 11 сделайте обход графа:
а) по глубине;
б) по ширине.

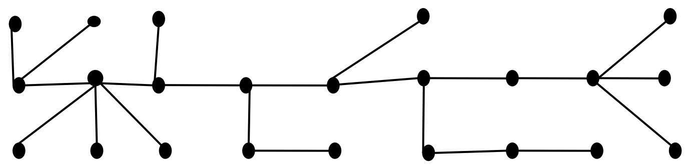
Вариант	Граф	Вариант	Граф
1		2	
3		4	

5		6	
7		8	
9		10	

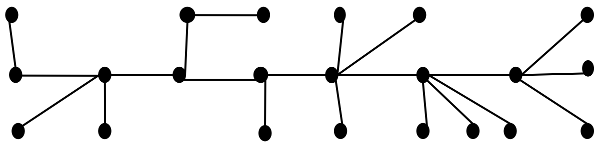
Задание 5.

Определить вершины максимальной степени. Взяв такую в качестве корня, построить ориентированное дерево.

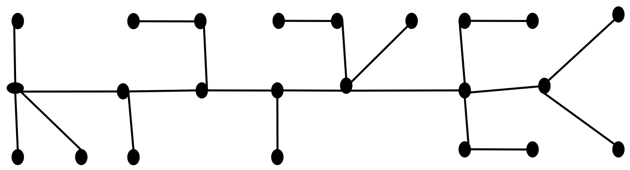
Вариант 1)



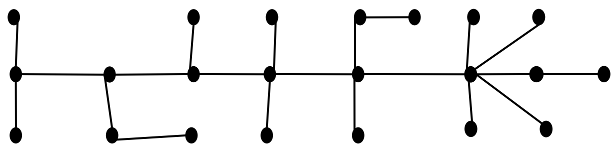
Вариант 2)



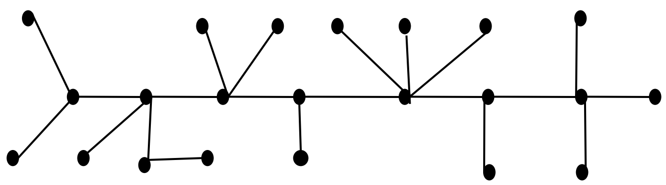
Вариант 3)



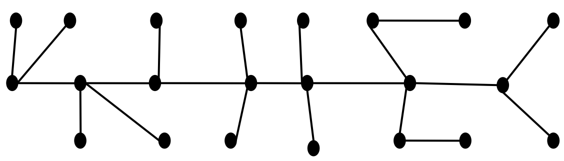
Вариант 4)



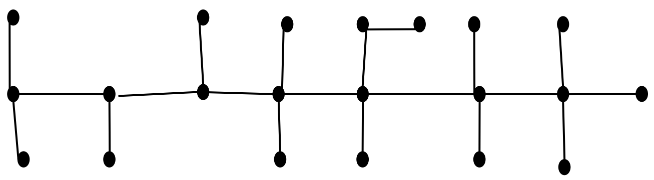
Вариант 5)



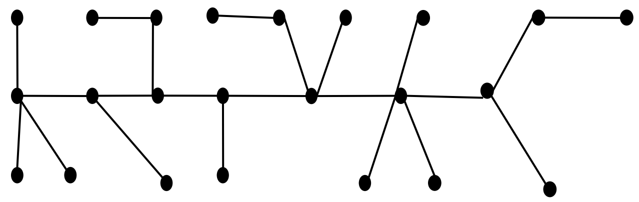
Вариант 6)



Вариант 7)



Вариант 8)



СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

ОСНОВНАЯ:

1. Шевелев Ю. П. Дискретная математика. Учебное пособие - Спб.: Изд-во « Лань», 2008.
2. Просветов Г. И. Дискретная математика : задачи и решения: учебное пособие. - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008.
3. Данилов В. Г., Дубнов В. Л., Лакерник А. Р., Райцин А. М. Дискретная математика. Учебное пособие для вузов. - М.: Горячая линия - Телеком, 2008.
4. Андерсон Дж. Дискретная математика и комбинаторика. - М.; Спб., Киев: Вильямс, 2003.
5. Кузнецов О. П. Дискретная математика для инженера. - СПб: Изд-во « Лань», 2005.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ:

6. Ерусалимский Я. М. Дискретная математика. - М.: Вузовская книга, 2000.
7. Белоусов А.И., Ткачев С.Б. Дискретная математика: Учеб. Для вузов/ Под ред. В.С.Зарубина, А.П.Крищенко. - М.: Изд-во МГТ'У им. Н.Э. Баумана, 2001.
8. Хаггарти Р. Дискретная математика для программистов. М.: Техносфера, 2003.
9. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. Спб: Питер, 2001.
10. Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. Элементы дискретной математики. Учебник для втузов. - М.:ИНФРА-М, Новосибирск:: Изд-во НГТУ, 2002.
11. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику: Учебное пособие для вузов/ Под ред. А.А.Садовничего, - М.:Высш.шк.. 2002.
12. Москинова Г.И. Дискретная математика: Учебное пособие. - М.: Логос, 2000.
13. Горбатов В.А Фундаментальные основы дискретной математики. - М., Наука, 2000.
14. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. - М., Наука. 1975.
15. Косточка А.В. Дискретная математика. Ч.2. Новосибирск, НГУ, 1996.
16. Косточка А.В., Соловьева Ф.И. Дискретная математика. Ч.1. Новосибирск, НГУ, 1995.
17. Матросов В.А., Стеценко В.А. Лекции по дискретной математике. - М., МИГУ, 1997.
18. Ежов И.Г.Г, Скороход А.В., Ядренко М.М. Элементы комбинаторики. - М., Наука, 1977.
19. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Сборник задач по дискретной математике. Уч. пособие., - М., Наука. 1977.
20. Гордеев Э.Н., Нурлыбаев А.Н, Задачи по дискретной математике. Алма-Ата, КазГУ, 1986.
21. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Под ред. С.В. Яблонского, О.Б. Лупанова. Т. 1. - М., Наука. 1974.
22. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. - М., Наука, 1969.
23. Виленкин Н.Я. Популярная комбинаторика. - М.. Наука, 1975.
24. Методические разработки по курсу «Элементы дискретной математики». Составитель А.В. Яблонский, МГУ, - М., 1971.
25. Нефедов В. Н., Осипова В. А. Курс дискретной математики: Учебное пособие. - М.: Изд-во МАИ. 1992.