МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра программной инженерии

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_____________ О.Г. Локтионова
«_16_» _июня_____ 2015 г.

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЙ ВЫБОР. СРАВНЕНИЕ ВАРИАНТОВ ПО ЭФФЕКТИВНОСТИ

Методические указания по выполнению лабораторной работы
по курсу «Теория принятия решений»
для студентов направления подготовки 09.03.04 «Программная инженерия», 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Курск 2015

УДК 681.3.06(075.8)

Составители: В.В. Апальков, Р.А. Томакова, Ф.А.Старков

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент кафедры «Информационные системы и технологии» Юго-Западного государственного университета *Т.И. Лапина*

Многокритериальный выбор. Сравнение вариантов по эффективаности: методические указания по выполнению лабораторной работы / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: В.В. Апальков, Р.А. Томакова, Ф.А.Старков. Курск, 2015. 9 с. Библиогр.: с. 9.

Излагается цель лабораторной работы, в теоретической части рассматриваются связь различных способов описания выбора, отношения Парето и Слейтера. В практической части приводятся пример выполнения задания на лабораторную работу и вопросы для самопроверки.

Методические указания соответствуют требованиям рабочей программы по направлению подготовки бакалавров 09.03.04 «Программная инженерия».

Предназначены для студентов направления подготовки бакалавров 09.03.04.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать. Формат 60×84 1/16.

Усл. печ. л. 0,6. Уч.-изд. л. 0,4. Тираж 50 экз. Заказ. Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.

305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Цель работы: изучить связь многокритериального описания системы предпочтений лица, принимающего решение (ЛПР), и языка бинарных отношений.

Теоретическая часть.

1. Однокритериальный выбор

Пусть Y – множество исходов в задаче принятия решений. Предположим, что каждый исход оценивается действительным числом из множества значений шкалы критерия в соответствии с отображением:

$$f : Y \rightarrow R,$$

где f – целевая функция (критерий качества, критериальная функция, показатель эффективности, критерий оптимальности).

Будем считать, что для ЛПР исход y_i предпочтительнее исхода y_j, если y_i имеет не меньшее или большее значение критерия качества f, чем y_j:

$$f(y_i) \geq f(y_j) \text{ или } f(y_i) > f(y_j).$$

Фактически на множестве исходов Y задаются бинарные отношения нестрого порядка R_1 и строгого порядка R_2. Точки максимума функции f(y) из Y образуют множество максимальных элементов $\mathrm{Max}_{R_n} Y$ в модели $< Y, R_n >$ (n=1,2).

Очевидно, что множество максимальных элементов из Y по бинарному отношению R_n (n=1,2) внешне устойчиво в Y. Следовательно, для заданной выше системы предпочтений ЛПР задача оптимального выбора сводится к задаче построения ядра бинарного отношения нестрого порядка или бинарного отношения строгого порядка.

2. Многокритериальный выбор

Предположим, что каждый исход оценивается несколькими числовыми показателями качества $f_1(y)$, $f_2(y)$,…, $f_m(y)$ со значениями из множества значений шкалы соответствующего критерия, т.е.:

$$f_k\colon Y \rightarrow R,\ \ k=1,2,...,m.$$

Будем считать, что для ЛПР исход y_i предпочтительнее исхода y_j, если вектор показателей качества $f(y_i)=(f_1(y_i),\ f_2(y_i),\ldots,\ f_m(y_i))$ исхода y_i доминирует вектор показателей качества $f(y_j)=(f_1(y_j),\ f_2(y_j),\ldots,\ f_m(y_j))$ исхода y_j :

$f_k(y_i) \geq f_k(y_j)$, $k=1,2,...,m$, и $f_l(y_i) > f_l(y_j)$ хотя бы для одного номера $k=l$.

В этом случае отношение доминирования называется отношением Парето (R_P).

Аналогично, для ЛПР исход y_i предпочтительнее исхода y_j, если вектор показателей качества $f(y_i)=(f_1(y_i),\ f_2(y_i),\ldots,\ f_m(y_i))$ исхода y_i строго доминирует вектор показателей качества $f(y_j)=(f_1(y_j),\ f_2(y_j),\ldots,\ f_m(y_j))$ исхода y_j :

$$f_k(y_i) > f_k(y_j),\ \ k=1,2,...,m.$$

В этом случае отношение доминирования называется отношением Слейтера (R_S).

Дадим ряд необходимых определений [3].

Определение 1.

Если для некоторого исхода $y^0 \in Y$ не существует исхода y из множества Y, что $(y,\ y^0) \in R_P$, то тогда исход y^0 называется эффективным, или оптимальным по Парето решением многокритериальной задачи $f_k(y) \rightarrow \max$, $k = 1,2,..., m$; $y \in Y$.

Обозначим через $P(Y)$ множество всех эффективных элементов множества Y (множество Парето).

Пусть $P(f)$ образ множества $P(Y)$ в пространстве критериев R^m, где $f=(f_1,f_2,\ldots,f_m)$. Множество $P(f)=f(P(Y))$ называется множеством эффективных оценок (множество Парето в пространстве критериев). Множество $P(f)$ состоит из недоминируемых векторов показателей качества, несравнимых между собой.

Определение 2.

Исход $y'\in Y$ называется слабо эффективным решением многокритериальной задачи, или оптимальным по Слейтеру решением, если не существует исхода y из множества Y, что $(y, y') \in R_S$.

Обозначим через $S(Y)$ множество всех слабо эффективных элементов множества Y. Очевидно, что $P(Y) \subseteq S(Y)$.

Пусть $S(f)$ образ множества $S(Y)$ в пространстве критериев. $S(f)=f(S(Y))$ - множество слабо эффективных оценок. Как и ранее, множество $S(f)$ состоит из недоминируемых векторов показателей качества, несравнимых между собой.

Аналогично однокритериальной задаче выбора, в многокритериальной задаче выбор оптимального элемента необходимо производить в ядре отношения Парето (Слейтера), которое совпадает с множеством эффективных элементов $P(Y)$ (слабо эффективных элементов $S(Y)$). Выбор оптимального элемента в ядре отношения требует уточнения используемой информации о системе предпочтений пользователя.

Выбор в качестве лучших слабо эффективных элементов $S(Y)$ множества Y при решении задач многокритериальной оптимизации на практике встречается реже, чем выбор эффективных элементов $P(Y)$.

Отметим также, что в однокритериальных и многокритериальных задачах принятия решений возможны различные системы предпочтений ЛПР, выраженные на языке бинарных отношений.

Практическая часть.

1. Построить отношение Парето R_P и его граф для случая двух показателей качества f_1 и f_2 на множестве исходов $Y = \{ y_1, y_2, \ldots, y_7 \}$ (образы исходов y_i изобразить на плоскости).
2. Найти ядро отношения Парето на Y.
3. Построить отношение несравнимости R_H.
4. Построить отношение Слейтера R_S и его граф.
5. Найти ядро отношения Слейтера на Y.

Решение.

Изобразим образы исходов y_i в пространстве (рис. 1):

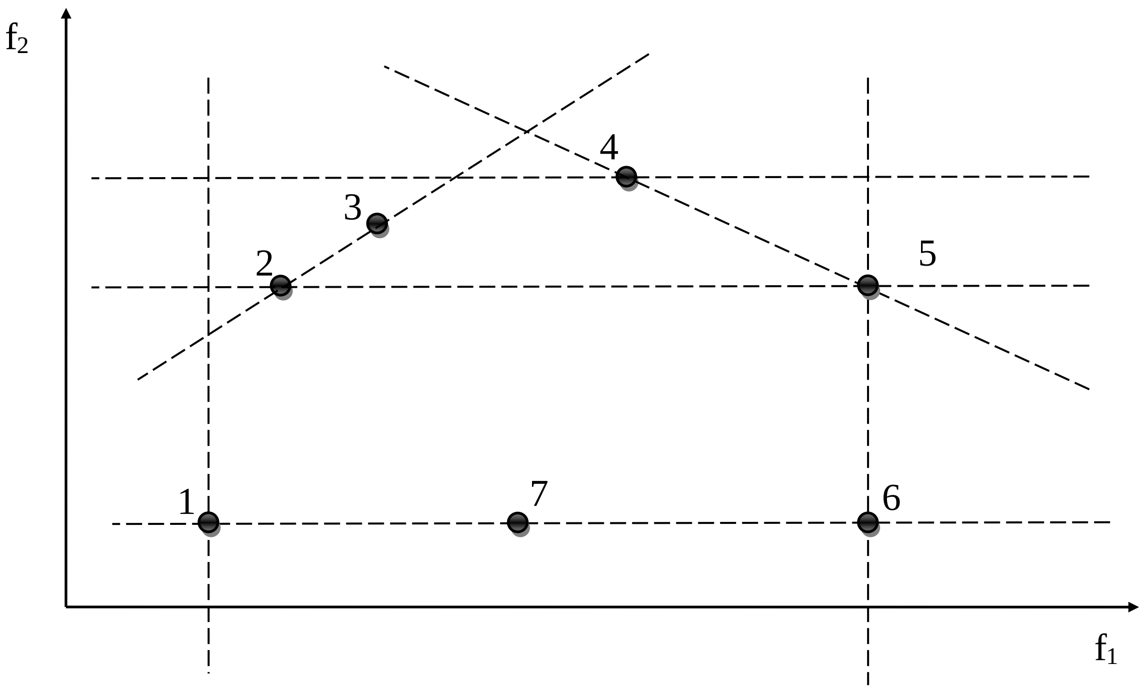

Рис. 1. Образы исходов

1. Используя определение доминирования по Парето, построим отношение R_P и его граф (рис. 2):

R_P = {(y_2, y_1), (y_3, y_1), (y_4, y_1), (y_5, y_1), (y_6, y_1), (y_7, y_1), (y_3, y_2), (y_4, y_2), (y_5, y_2), (y_4, y_3), (y_5, y_6), (y_4, y_7), (y_5, y_7), (y_6, y_7)} – отношение Парето.

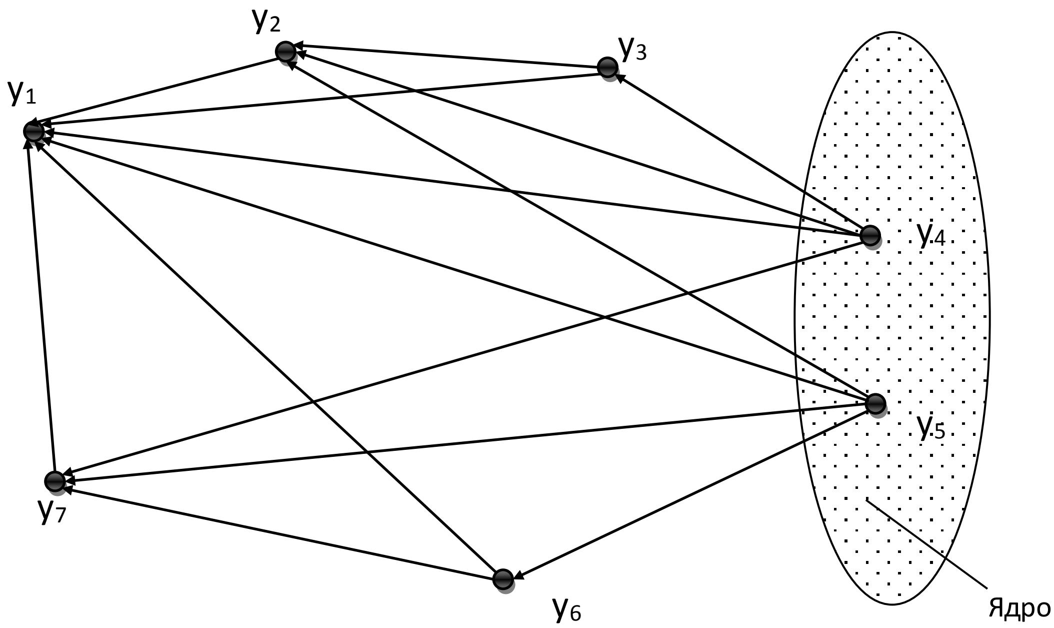

Рис. 2. Граф отношения Парето

2. Определим множество максимальных элементов по Парето:

$\mathrm{Max}_{R_P} Y$ = {y_4, y_5} – множество максимальных элементов.

Следует отметить, что наилучшие элементы в данном случае отсутствуют, а множество $\mathrm{Max}_{R_P} Y$ - внешне устойчиво, т.к. из вершин графа, представляющих множество максимальных элементов, существуют ребра во все остальные вершины графа. Следовательно, $\mathrm{Max}_{R_P} Y$ является ядром отношения Парето (рис. 2).

3. Построим отношение несравнимости R_H:

R_H = {(y_2, y_6), (y_2, y_7), (y_3, y_5), (y_3, y_6), (y_3, y_7), (y_4, y_5), (y_4, y_6), …}.

Отношение несравнимости в многокритериальных задачах является симметричным, но не является транзитивным.

4. С помощью аналогичных действий построим отношение Слейтера R_S и его граф (рис. 3):

$R_S = \{(y_2, y_1), (y_3, y_1), (y_4, y_1), (y_5, y_1), (y_3, y_2), (y_4, y_2), (y_4, y_3), (y_4, y_7), (y_5, y_7)\}$ – отношение Слейтера.

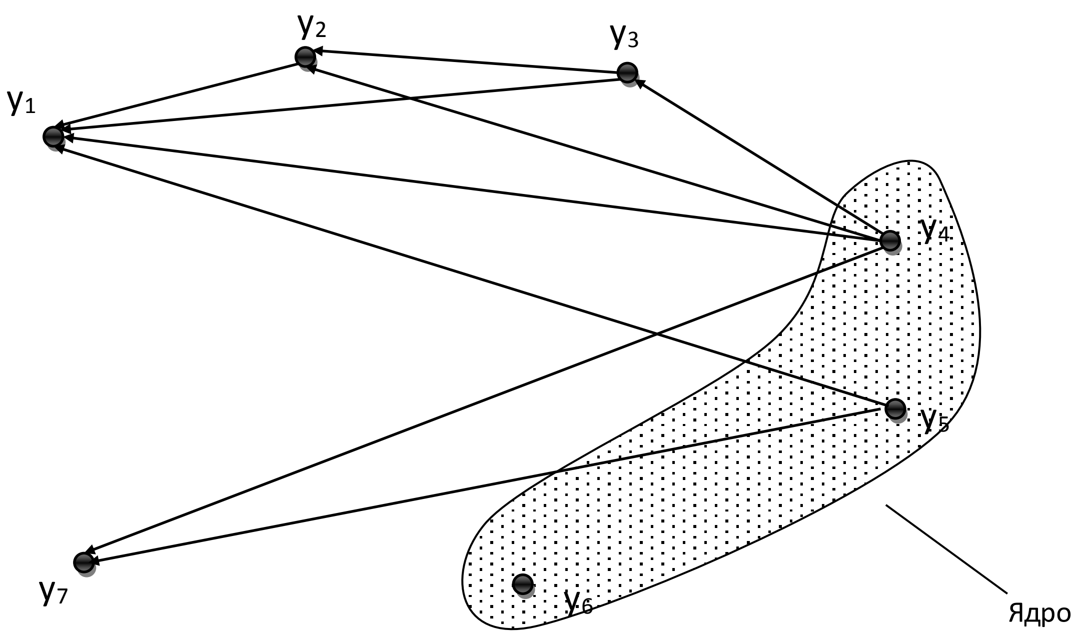

Рис. 3. Граф отношения Слейтера

5. Определим множество максимальных элементов по Слейтеру:
$\mathrm{Max}_{R_S} Y = \{y_4, y_5, y_6\}$ – множество максимальных элементов.

Множество $\mathrm{Max}_{R_S} Y$ – внешне устойчиво, т.к. из вершин графа, представляющих множество максимальных элементов, существуют ребра во все остальные вершины графа, а следовательно $\mathrm{Max}_{R_S} Y$ является ядром.

Вопросы для самопроверки.

1. Однокритериальный и многокритериальный выбор.
2. Отношения Парето и Слейтера.
3. Связь критериального языка описания выбора и языка бинарных отношений.

Литература.

1. Орлов А.И. Теория принятия решений: учебник / А.И. Орлов. – М.: Изд-во «Экзамен», 2006. – 573 с.

2. Петровский А. Б. Теория принятия решений [Текст] : учебник. – М. : Академия, 2009. – 400 с. – (Университетский учебник. Прикладная математика и информатика).

3. Черноруцкий И.Г. Методы принятия решений: учебное пособие /И.Г. Черноруцкий. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 416 с.