МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра программной инженерии

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе
_______________ О.Г. Локтионова
«_4_» _03_ 2019 г.

АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СХЕМЫ ГОРНЕРА

Методические указания к лабораторной работе №2
по дисциплине «Вычислительная математика»
направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.04 «Программная инженерия»

Курск 2019

УДК 519.6

Составители Е.П. Кочура, В.М. Буторин

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент кафедры программной инженерии И.Н. Ефремова

Аппроксимация функций рядами с использованием схемы Горнера: методические указания к лабораторной работе №2 по дисциплине «Вычислительная математика» для студентов направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.04 «Программная инженерия» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост. Е.П. Кочура, В.М. Буторин. Курск, 2019. 9 с.

Содержит краткие теоретические сведения по теме лабораторной работы, цель выполнения работы, задание, пример выполнения лабораторной работы, требования к составлению отчета, список контрольных вопросов, таблицу индивидуальных заданий.

Предназначено для студентов направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.04 «Программная инженерия».

Текст печатается в авторской редакции.

Подписано в печать 04.03.19. Формат 60х84 1/16.
Усл. печ. л. 0,03. Уч.-изд. л. 0,47. Тираж 100 экз. Заказ 152 . Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет
305040, Курск, ул.50 лет Октября, 94.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2

АППРОКСИМАЦИЯ ФУНУЦИЙ РЯДАМИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СХЕМЫ ГОРНЕРА

I. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

1. Изучение основных определений и положений теории аппроксимации функции.
2. Изучение основных методов непрерывной аппроксимации функций рядами Маклорена, многочленами Тейлора.
3. Аппроксимация на ЭВМ с помощью рядов и схемы Горнера элементарных функций.

II. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Аппроксимация. Пусть имеется функция f(x), вид которой очень сложен и для ее вычисления требуется много времени и при этом необходимо получить много ее значений или имеется функция, которая задана в некоторых точках таблицей своих значений

$$y_i = f(x_i), \qquad i = 0,1,2,\ldots,n\,; \tag{2.1}$$

а необходимо знать значения величины *y* практически при любых значениях аргумента *x*. Как это реально сделать? Для решения такой проблемы служит задача аппроксимации функций. Аппроксимация состоит в том, что данную функцию f(x) приближенно заменяют (аппроксимируют) некоторой другой функцией, так, чтобы отклонение φ(x) от f(x) в заданной области [a,b] было минимально возможным, при этом функцию f(x) называют аппроксимируемой, а функцию φ(x) аппроксимирующей.

При приближении на непрерывном множестве точек отрезка [a,b] аппроксимацию называют непрерывной (или интегральной). Если приближение строится на заданном дискретном множестве точек $\{x_i\}$ i=0,1,... отрезка [a,b], то аппроксимацию называют точечной.

Если аппроксимирующая функция φ(x) строится для всего отрезка [a,b] на котором задана функция f(x), то говорят о глобальной аппроксимации, если же весь отрезок [a,b] разбит на частичные отрезки и на каждом используется своя аппроксимирующая функция, то говорят о локальной аппроксимации.

Равномерное и среднеквадратичное приближения. Если приближение строится таким образом, что величина отклонения (модуль разности двух функций f(x) и φ(x)) удовлетворяет условию

$$\overline{\Delta} = \max_{a,b}\left|f(x) - \varphi(x)\right| \le \varepsilon \to 0, \qquad a \le x \le b; \tag{2.2}$$

то такое приближение (2.2) называют равномерным приближением.

Часто используется среднеквадратичное приближение функции f(x) функцией φ(x). Здесь стараются получить минимальную величину среднеквадратичного значения модуля разности аппроксимируемой и аппроксимирующей функций на всем отрезке [a,b]:

$$\overline{\Delta} = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b \left[\varphi(x) - f(x)\right]^2 dx} \le \varepsilon \to 0,$$

$$\overline{\Delta} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\left[\varphi(x_i) - f(x_i)\right]^2} \le \varepsilon \to 0. \tag{2.3}$$

Первая формула используется при непрерывной аппроксимации, а вторая при дискретной аппроксимации.

Аппроксимация многочленами (полиномами). Чаще всего для аппроксимации используются алгебраические многочлены (полиномы) следующего вида

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + + a_n x^n = P_n(x)\,. \tag{2.4}$$

Максимальное значение степени у переменной x (значение величины n) называется порядком аппроксимирующего многочлена или порядком полинома.

Использование рядов для равномерной аппроксимации. Возможность построения многочлена, равномерно приближающего данную функцию следует из теоремы Вейерштрасса об аппроксимации. В частности, если f(x) на отрезке [a,b] разлагается в равномерно сходящийся ряд, то в качестве аппроксимирующего многочлена можно взять частичную сумму ряда Маклорена. Вместо ряда Маклорена для равномерной аппроксимации могут использоваться ряды Тейлора, многочлены Чебышева, Лежандра и т.п..

Рассмотрим такие трансцендентные функции, которые являются суммами своих рядов Маклорена:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k. \tag{2.5}$$

Беря несколько первых членов ряда Маклорена, получаем приближенную формулу:

$$f(x) \approx P_n(x), \tag{2.6}$$

где,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k. \qquad (2.7)$$

Погрешность. Остаток ряда $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ представляет собой ошибку при замене f(x) многочленом $P_n(x)$, т.е. определяет абсолютную погрешность вычисления f(x) с использованием формулы (2.6). Для ряда (2.5) абсолютная погрешность будет не больше по абсолютной величине остаточного члена ряда Маклорена в форме Лагранжа:

$$R(x) \le \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi) \cdot x^{n+1}}{(n+1)!} \right|, \qquad \xi \in [0, x]; \qquad (2.8)$$

где ξ некоторая неизвестная точка на отрезке [0,x].

Разложение элементарных функций в ряд Маклорена:

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x); \\
\sin(x) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_n(x), \\
\cos(x) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \frac{x^{2k}}{2k!} + R_n(x); \\
\mathrm{sh}(x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_n(x), \qquad \mathrm{ch}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{2k!} + R_n(x);
\end{aligned} \qquad (2.9)$$

$$\mathbf{R_n(x) = \frac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right| \cdot \left|x^{n+1}\right|}{(n+1)!};} \qquad (2.10)$$

где ξ - точка на отрезке [0,X].

Схема Горнера. Для вычисления полиномов вида (2.4)

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \qquad (2.11)$$

часто применяется следующая формула

$$P_n(x) = a_0 + x \cdot (a_1 + x \cdot (a_2 + x \cdot (a_3 + \ldots + x \cdot (a_{n-1} + x a_n)))), \qquad (2.12)$$

которая позволяет значительно сократить количество выполняемых арифметических операций. Прием с помощью которого многочлен (2.11) представляется в виде (2.12) называется схемой Горнера.

III. ЗАДАНИЕ

1. Вычислить с помощью полинома n-ой степени $P_n(x)$, равномерно приближающего на отрезке [a,b] функцию f(x) из таблицы заданий.
2. Разработать текст программы для вычисления значений $P_n(x)$ с использованием схемы Горнера для значений аргумента x, приведенных в таблице заданий.
3. На ЭВМ набрать и отладить программу.
4. Првести вычисления полинома $P_n(x)$.
5. Оценить относительную погрешность вычисления $P_n(x)$.
6. Провести расчеты с помощью программы MATHCAD и сравнить результаты.

IV. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Задание. Вычислить с помощью полинома $5^{ой}$ степени $P_5(x)$ равномерно приближающего на отрезке [a,b] функцию f(x)=sin(x) и оценить погрешность аппроксимации $R_n(x)$. Разработать программу вычисления этого полинома с использованием схемы Горнера и рассчитать значение полинома при $x_1 = 40^\circ,\ x_2 = 90^\circ$.

Порядок выполнения работы.

1. Переведем аргументы в радианы, сохраняя четыре верных знака:

$$x_1 = \frac{40^\circ}{180^\circ}\pi = 0.6982,\ \ x_2 = \frac{90^\circ}{180^\circ}\pi = 1.571.$$

2. Разложим функцию f(x)=sin(x) в ряд Маклорена, сохраняя члены ряда, для которых показатель степени при аргументе x меньше или равен 5. Согласно (2.10) имеем:

$$f(x) \approx P_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}. \tag{4.1}$$

3. Оценим погрешность аппроксимации. Так как производная любого порядка от sin(x) есть либо sin(x) то можем записать

$$R_5(x) \le \frac{\left|x^6\right|}{6!} = \qquad , \tag{4.2}$$

т.к. $\left|(\sin\xi)^{(n)}\right| \le 1.$

4. Используя схему Горнера для полинома степени n=5, $P_5(x)$, переписываем выражение (4.1) в виде удобном для программирования:

$$P_5(x) = a_0 + x\cdot(a_1 + x^2(a_2 + x^2 a_3)), \qquad (4.4)$$

где,

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = -\frac{1}{6},\ a_3 = \frac{1}{120}. \qquad (4.5)$$

5. Проводим вычисление по программе, которая приведена ниже: $P_5(0.6982)\approx$.
6. Оцениваем относительную погрешность аппроксимации f(x) полиномом $P_5(x)$

$$\delta f(x) = R_5(x)/|f(x)| \approx R_5(x)/|P_5(x)| = .$$

7. Примеры программ на Mathcad и на Delphy (в консольном режиме) для вычисления полинома $P_5(x)$ при x_1=0.6982, x_2=1.571.

$$a0 := 0 \qquad a1 := 1 \qquad a2 := \frac{-1}{3!} \qquad a3 := \frac{1}{5!}$$

$$P5(x) := a0 + x\cdot\left[a1 + x^2\cdot\left(a2 + x^2\cdot a3\right)\right]$$

$$R5(x) := \frac{|x^6|}{6!} \qquad \delta f(x) := \frac{R5(x)}{|P5(x)|}$$

$$x1 := \pi\cdot\frac{40}{180} \qquad x2 := \pi\cdot\frac{90}{180}$$

$$x1 = 0.6981 \qquad x2 = 1.5708$$

$$P5(x1) = 0.6428 \qquad \delta f(x1) = 2.5016\times 10^{-4}$$

$$P5(x2) = 1.0045 \qquad \delta f(x2) = 0.0208$$

```
   program lab2;
      {Равномерное приближение функций.}
      {P- функция, x - аргумент}
      {R-абсолютная погрешность функции}
      {RR-относительная погрешность функции}
var x,y,P,R,RR : real;
var a : array[0..4] of real;
var i,j : integer;
      begin
      a[0]:=0; a[1]:=1; a[2]:=-1/6.; a[3]:=1/120.;
         for i:=1 to 2 do begin
             readln (x);
```

```
            P:=a[3];
              for j:=2 downto 0 do begin
                if j=0 then y:=x else y:=x*x;
                P:=y*P+a[j];                          вычисление по (4.4)
              end;
            R:=1.;
              for j:=1 to 7 do R:=R*x/j;              вычисление по (4.2)
            RR:=R/abs(P);
          writeln('x=',x,'     ','P=',P,'     ','R=',R,'     ','RR=',RR);
        end;
end.
```

7. Заполняем таблицу с результатами:

x	sin(x)	$\frac{\delta(\sin(x))}{\lvert(\sin(x))\rvert}$
0.6981 1.5708	0.6428 1,0045	$0,2502*10^{-3}$ $0,208*10^{-1}$

V. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

1. Название лабораторной работы.
2. Индивидуальное задание.
3. Теоретическая часть.
4. Текст программы.
5. Результаты расчета.

Замечание: Пункт 1-4, а также таблица пункта 5 без численных результатов должны быть оформлены до начала выполнения лабораторной работы.

VI. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое аппроксимация функций.
2. Определение равномерного приближения.
3. Определение квадратичного приближения.
4. Понятие непрерывной и точечной аппроксимации.
5. Понятие глобальной и локальной аппроксимации.
6. Теорема Вейерштрасса.
7. Определение многочлена наилучшего равномерного приближения.

8. Формула остаточного члена ряда в форме Лагранжа для оценки погрешности аппроксимации функций с помощью ряда Маклорена.
9. В чем преимущество схемы Горнера?
10. Что такое рациональное приближение?

VII. ТАБЛИЦА ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

№	Аппроксимируемая функция f(x)	Степень аппроксимирующего полинома (n)	x_1	x_2
1.	$\cos x$	5	62°	88°
2.	$x*e^x$	4	0.15(рад)	0.56(рад)
3.	$x*\sin x$	6	0.01(рад)	0.83(рад)
4.	$x^2*\cos x$	6	0.32(рад)	0.53(рад)
5.	$\mathrm{sh}x$	5	55°	97°
6.	$\mathrm{ch}x$	5	40°	93°
7.	$x*\mathrm{sh}x$	6	0.25(рад)	1.27(рад)
8.	$x*\mathrm{ch}x$	6	0.63(рад)	1.65(рад)
9.	x^2e^x	4	0.78(рад)	1.80(рад)
10.	$x^2\sin x$	5	0.91(рад)	1.94(рад)
11.	$x^2\mathrm{sh}x$	5	0.35(рад)	1.37(рад)
12.	$x^2\mathrm{ch}x$	6	0.43(рад)	1.45(рад)
13.	$\sin x+\cos x$	5	12°	94°
14.	$\sin x+e^x$	5	57°	159°
15.	$\mathrm{sh}x-e^x$	5	73°	175°
16.	$\cos x+\mathrm{sh}x$	4	65°	150°
17.	$\mathrm{ch}x+\mathrm{sh}x$	4	0.34(рад)	1.2(рад)
18.	$\cos x-\sin x$	4	60°	155°
19.	$\mathrm{ch}x-\mathrm{sh}x$	4	0.22(рад)	1.05(рад)
20.	$e^x+\cos x$	4	0.15(рад)	0.72(рад)