0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1c11eabbf73e943df4a4851fda56d089

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждения высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра информационной безопасности

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_______________ О.Г. Локтионова
«_17_» _ноября_ 2017 г.

# КОМБИНАТОРИКА И БИНОМ НЬЮТОНА

Методические рекомендации по выполнению лабораторных работ №3, №4, №5
для студентов укрупненных групп специальностей 09.00.00, 10.00.00, 11.00.00

Курск 2017

УДК 621.(076.1)

Составители: В.П. Добрица, К.А. Тезик

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент кафедры
«Информационные системы и технологии» Ю.А. Халин

**Комбинаторика и бином Ньютона** [Текст] : методические рекомендации по выполнению лабораторных работ / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: В.П. Добрица, К.А. Тезик. – Курск, 2017. – 29 с.: – Библиогр.: с. 29.

Содержат сведения и материалы по разделу дискретной математики – комбинаторика. Указывается порядок выполнения лабораторной работы, правила оформления отчета.

Методические указания соответствуют требованиям программы, утвержденной учебно-методическим объединением по специальности.

Предназначены для студентов укрупненных групп специальностей и направлений подготовки 09.00.00, 10.00.00, 11.00.00.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 17.11.17. Формат 60x84 1/16.
Усл.печ. л. 1,69. Уч.-изд. л. 1,53. Тираж 100 экз. Заказ. Бесплатно. 1935
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

В данных методических рекомендациях изложены материалы по разделу дискретной математики - комбинаторика.

В разделе «Комбинаторика» рассмотрены следующие темы: перестановки, размещения и сочетания; формула включений и исключений; бином Ньютона; принцип математической индукции; рекуррентные соотношения.

По каждой теме представлены:

1. краткие теоретические положения;
2. перечень вопросов, выносимых на практическое задание;
3. примеры задач, выносимых на практическое занятие;
4. задачи, выносимые на самостоятельную работу студентов.

Данные методические рекомендации предназначены для проведения практических занятий по дисциплине «Дискретная математика» для студентов второго курса Юго-Западного государственного университета следующих направлений подготовки: информационная безопасность; инфокоммуникационные технологии и системы связи, информационные системы и технологии.

По изложенным в данных методических рекомендациях материалам можно рекомендовать преподавателю проведение 6-ти часов практических занятий по следующему плану:

- перестановки, размещения и сочетания (2 часа);
- формула включений и исключений и бином Ньютона (2 часа).
- Принцип математической индукции и рекуррентные соотношения (2 часа).

## Практическое задание №3
## Перестановки, размещения и сочетания

Цель: Изучить определения и формулы расчёта основных понятий комбинаторики (перестановки, размещения и сочетания) и научиться использовать их при решении типовых комбинаторных задач.

Вопросы, выносимые на практическое занятие.

1. Предмет изучения комбинаторики.
2. Правило произведения в комбинаторике.
3. Понятие факториала. Перестановки без повторений. Перестановки с повторениями.
4. Размещения без повторений и размещения с повторениями.
5. Сочетания без повторений и сочетания с повторениями.

### Краткие теоретические положения

Комбинаторными задачами принято называть задачи, в которых необходимо подсчитать, сколькими способами можно осуществить то или иное требование, выполнить какое-либо условие, сделать тот или иной выбор.

Факториал от $n$ – это функция, определённая на множестве целых положительных чисел и представляющая собой произведение всех натуральных чисел от 1 до $n$, где каждое число встречается только 1 раз $n!=1\times2\times3\times\ldots\times(n\text{-}1)\times n$. Заметим, что принято считать 0!=1.

### Правило произведения в комбинаторике

Если 1 элемент множества А может быть выбран n способами, а после него второй элемент – m способами, то выбор того и другого элемента в заданном порядке может быть осуществлен N способами, где: N=n×m.

### Перестановки

#### Перестановки без повторений

Пусть дано множество вида: А=$\{a_1, a_2 \ldots a_n\}$. Перестановками без повторений называется упорядоченные последовательности, включающие в себя все элементы множества А точно по 1 разу, но отличается между собой порядком расположения элементов.

Формула расчёта числа перестановок без повторений имеет вид:

$$P_n = n!$$

Перестановки с повторениями

Даны $n_1$ элементов вида 1 (неразличимых между собой), $n_2$ элементов вида 2, … , $n_k$ элементов вида $k$.

Из этих элементов образуют n-элементные последовательности, содержащие все перечисленные элементы

n=$n_1 + n_2 + \cdots n_k$.

Количество перестановок, образующих различные последовательности, рассчитывается по формуле:

$$\dot{P}_n = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!}$$

## Размещения

Размещение без повторений

Дано множество А, содержащее $n$ элементов. Размещениями без повторений называется упорядоченные последовательности длины $m \leq n$, в которых каждый элемент множества встречается не более 1 раза. Различными считаются последовательности, отличающиеся либо составом элементов, либо порядком расположения элементов.

Количество размещений без повторений из $n$ элементов по $m$ элементов рассчитывается по формуле:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \ .$$

Размещения с повторениями

Размещения с повторениями отличаются от размещений без повторений тем, что одни и те же элементы могут многократно входить в рассматриваемую последовательность.

Количество размещений с повторениями из $n$ элементов по $m$ элементов рассчитываем по формуле: $\dot{A}_n^m = n^m$.

## Сочетания

Сочетания без повторений

Дано множество А, содержащее $n$ элементов. Сочетаниями без повторений называются неупорядоченные последовательности длины $m$, в которых каждый элемент множества A встречается не более 1 раза. Различными считаются последовательности, отличающиеся составом элементов. Подчеркнем, что последовательности, отличающиеся только порядком расположения элементов, не считаются различными. Количество сочетаний без повторений из $n$ элементов по $m$ элементов рассчитываем по формуле: $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

Сочетания с повторениями

Сочетания с повторениями отличается от сочетаний без повторений тем, что в них могут входить повторяющиеся элементы.

Количество сочетаний с повторениями из n элементов по m элементов рассчитываем по формуле:

$$f_n^m = \dot{C}_n^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!} = C_{n+m-1}^m$$

То есть число сочетаний с повторениями подсчитывается по формуле сочетаний без повторений с другими параметрами.

Примеры задач, выносимых на практическое занятие.

Задача 1

Сколько различных “слов” можно составить, переставляя буквы слова “Задача”?

В слове “Задача” 6 букв, из них:

3 – буквы а

1 – буквы з

1 – буква д

1 – буква ч.

Для решения задачи используем формулу расчёта перестановок с повторениями

$$\dot{P}_n = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

$$\dot{P}_6 = \frac{6!}{3_1!1!1!1!} = 120.$$

Задача 2

В однокруговом турнире по футболу участвуют 8 команд. Сколько существует вариантов призовой тройки? Считаем, что порядок команд в призовой тройке важен.

Для решения данной задачи используем формулу расчёта размещений без повторений $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$

По условию n=8  m=3

$A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = 6 \times 7 \times 8 = 336.$

Задача 3.

Замок сейфа управляется 12 кнопками путём одновременного нажатия 3-х кнопок с номерами i,j,k, где i,j,k∈{1, 2, 3, ..., 12}; i ≠ j; i ≠ k; j ≠ k. Тройка этих номеров образует кодовый ключ. Не́кто решил открыть сейф путём проб и ошибок. Сколько троек ему придётся проверить в самом неблагоприятном случае?

Одновременно используются 3 различные кнопки, следовательно, здесь мы имеем сочетания без повторений.

Для решения задачи используем формулу: $C_n^m = \frac{n!}{m! \times (n-m)!}$

По условию n=12, m=3. В вычислениях проведем соответствующие сокращения.

$C_{12}^3 = \frac{12!}{3! \times (12-3)!} = \frac{10 \times 11 \times 12}{6} = 220.$

Задача 4

В магазине имеется 4 вида конфет: “Пилот”, ”Ромашка”, ”Весна”, ”Снежинка”. Требуется купить 10 конфет в любом сочетании из перечисленных. Сколькими способами это можно сделать?

Для решения данной задачи используем формулу расчёта сочетаний с повторениями $\dot{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$

По условию n=4, m=10 m+n-1=13

$\dot{C}_4^{10} = C_{13}^{10} = \frac{13!}{(13-10)!10!} = \frac{11*12*13}{6} = 286$

Задача 5

Сколько существует трёхразрядных десятичных чисел, которые могут быть составлены из цифр 1,2,4,5,6,8 если повторения цифр в числе возможны.

В данной задаче имеют место размещения с повторениями. Используем формулу расчёта $\dot{A}_n^m = n^m$

По условию n=6, m=3. $\dot{A}_6^3 = 6^3 = 216.$

Задачи, выносимые на самостоятельную работу студентов

ВАРИАНТ №1

1. Сколько различных «слов», состоящих не менее чем из четырех разных букв, можно образовать из букв слова "ученик":
2. В магазине имеется 6 сортов шоколадных конфет и 4 сорта карамели. Сколько различных покупок конфет одного сорта можно сделать в этом магазине? Сколько можно сделать различных покупок, содержащих один сорт шоколадных конфет и один сорт карамели?
3. Сколько можно получить различных четырехзначных чисел, вставляя пропущенные цифры в число *2*5? в число 3*7*?
4. У одного человека имеется 7 книг по математике, а у другого—9. Сколькими способами они могут осуществить обмен книги на книгу?
5. В букинистическом магазине продаются 6 экземпляров романа И. С. Тургенева «Рудин», 3 экземпляра романа «Дворянское гнездо» и 4 экземпляра романа «Отцы и дети». Кроме того, имеется 5 томов, состоящих из романов «Рудин» и «Дворянское гнездо», и 7 томов, состоящих из романов «Дворянское гнездо» и «Отцы и дети». Сколькими способами можно сделать покупку, содержащую по одному экземпляру каждого из этих романов?
6. Имеется 4 чашки, 5 блюдец и 6 чайных ложек (все чашки, блюдца и ложки различные). Сколькими способами может быть накрыт стол для чаепития на трех человек, если каждый получит одну чашку, одно блюдце, одну ложку?
7. Сколькими способами можно расставить 12 белых и 12 черных шашек на черных полях шахматной доски?
8. Сколько можно построить различных прямоугольных параллелепипедов, если длина каждого его ребра может выражаться любым целым числом от 1 до 10?

## ВАРИАНТ №2

1. В отряде 5 разведчиков, 4 связиста и 2- санитара. Сколькими способами можно выбрать одного солдата так, чтобы он был разведчиком или санитаром? Сколькими способами можно составить разведгруппу из трех человек, чтобы в нее вошли разведчик, связист и санитар?
2. Сколько различных трехбуквенных «слов» можно составить из букв слова “ромб”?
3. Сколько различных трехзначных чисел, меньших 400, можно составить из цифр 1, 3, 5, 7, 9 при условии, что цифры в числе не должны повторяться? Решите ту же задачу при условии допустимости повторения цифр.
4. Сколькими способами можно распределить 12 различных учебников между четырьмя студентами?
5. Из полного набора шахмат вынули 4 фигуры или пешки. В скольких случаях среди них окажется: а) два коня, б) не менее двух коней?
6. Пять девушек и трое юношей играют в городки. Сколькими способами они могут разбиться на две команды по 4 человека, если в каждой команде должно быть, хотя бы по одному юноше?
7. Сколько можно построить различных прямоугольных параллелепипедов, если длина каждого его ребра может выражаться любым целым числом от 1 до 10?
8. В почтовом отделении продаются открытки десяти видов. Сколькими способами можно купить здесь набор из восьми открыток, если открыток каждого вида имеется не менее восьми штук?

## ВАРИАНТ №3

1. Сколько различных полных обедов можно составить, если в меню имеется 3 первых, 4 вторых и 2 третьих блюда?

2. Сколько можно составить двузначных или трехзначных чисел из нечетных цифр при условии, что ни одна цифра не повторяется?
3. На железнодорожной станции имеются t светофоров. Сколько может быть дано различных комбинаций их сигналов, если каждый светофор имеет три состояния: «красный», «желтый» и «зеленый»?
4. Сколькими способами можно разложить в два кармана 9 монет разного достоинства?
5. Сколько «слов», каждое из которых состоит из семи различных букв, можно составить из букв слова “выборка”?
6. В состав сборной включены 2 вратаря, 5 защитников, 6 полузащитников и 6 нападающих. Сколькими способами тренер может выставить на поле команду, в которую входит вратарь, 3 защитника, 4 полузащитника и 3 нападающих?
7. На прямой взяты t точек, а на параллельной ей прямой — ***n*** точек. Сколько существует треугольников, вершинами которых являются эти точки?
8. Для премий на математической олимпиаде выделено 3 экземпляра одной книги, 2 экземпляра другой и 1 экземпляр третьей книги. Сколькими способами могут быть вручены премии, если в олимпиаде участвовало 20 человек (каждому из участников может вручаться только одна книга)?

ВАРИАНТ №4

1. Сколько существует различных положений, в которых могут оказываться четыре переключателя, если каждый из них может быть включен или выключен? Постройте «дерево» для всех возможных положении переключателей.
2. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, если цифры в числах не повторяются?
3. Сколько словарей надо издать, чтобы можно было непосредственно выполнять переводы с любого из пяти языков: русского, английского, французского,

немецкого, итальянского на любой другой из этих пяти языков?

4. 4 . Сколькими способами 10 человек могут встать в очередь друг за другом?
5. На прямой взяты t точек, а на параллельной ей прямой — *n* точек. Сколько существует треугольников, вершинами которых являются эти **точки?**
6. Сколько букв алфавита можно составить из пяти сигналов используемых в каждой букве, если три сигнала — импульсы тока, а два — паузы?
7. Сколькими способами можно расставить на книжной полке библиотеки 5 книг по теории вероятностей, 3 книги по теории игр и 2 книги по математической логике, если книги по каждому предмету одинаковые?
8. Трое юношей и две девушки выбирают место работы. Сколькими способами они могут это сделать, если в городе есть три завода, где требуются рабочие в литейные цехи (туда берут лишь мужчин), две ткацкие фабрики (туда приглашают только женщин) и две фабрики, где требуются и мужчины и женщины?

ВАРИАНТ №5

1. Сколько различных «слов», состоящих не менее чем из четырех букв, можно образовать из букв слова «студент»?
2. В группе 8 девушек и 6 юношей. Для участия в соревнованиях требуется представить команду из 3 человек, в которой одна девушка. Сколько вариантов выбора команды существует?
3. Сколько можно получить различных шестизначных чисел, вставляя пропущенные цифры в число *2*5*5?
4. Студенты получили в библиотеке учебники. У одного из них имеется 3 книг по математике, а у другого—9 по другим предметам. Сколькими способами они могут осуществить обмен книги на книгу?
5. В букинистическом магазине продаются 5 экземпляров романа И. С. Тургенева «Рудин», 4 экземпляра романа «Дворянское гнездо» и 3 экземпляра романа «Отцы и

дети». Кроме того, имеется 7 томов, состоящих из романов «Рудин» и «Дворянское гнездо», и 6 томов, состоящих из романов «Дворянское гнездо» и «Отцы и дети». Сколькими способами можно сделать покупку, содержащую по одному экземпляру каждого из этих романов?

6. Имеется 4 чашки, 12 блюдец и 5 чайных ложек (все чашки, блюдца и ложки различные). Сколькими способами может быть накрыт стол для чаепития на трех человек, если каждый получит одну чашку, одно блюдце, одну ложку?
7. Сколькими способами можно расставить 12 белых и 12 черных шашек на белых полях шашечной доски?
8. Сколько можно построить различных прямоугольных параллелепипедов, если длина каждого его ребра может выражаться любым целым числом от 2 до 8, или от 11 до 14?

ВАРИАНТ №6

1. Сколько различных «слов», состоящих не менее чем из четырех различных букв, можно образовать из букв слова «студент»?
2. В районе выбирают двух депутатов в местные органы и одного в федеральные. В выборах принимают участие 3 партии и 5 независимых представителей. Оцените число возможных вариантов выбора депутатов.
3. Сколько можно получить различных шестизначных чисел, вставляя пропущенные цифры в число 3*7*2*?
4. Студенты получили в библиотеке учебники. У одного из них имеется 9 книг по математике, а у другого—3 по другим предметам. Сколькими способами они могут осуществить обмен книги на книгу?
5. Для студентов имеется 3 пары предметов по выбору. Студент должен из каждой пары выбрать по крайней мере один предмет. Общее число выбранных предметов для студента не должно превышать 5. Сколькими способами может осуществиться выбор предметов студентом?

6. Имеется 5 чашки, 7 блюдец и 6 чайных ложек (все чашки, блюдца и ложки различные). Сколькими способами может быть накрыт стол для чаепития на трех человек, если каждый получит одну чашку, одно блюдце, одну ложку?
7. Сколькими способами можно расставить 16 белых и 16 черных фигур на черных полях шахматной доски?
8. Сколько можно построить различных прямоугольных параллелепипедов, если длина его одного ребра может выражаться любым целым числом от 1 до 10, другого от 2 до 6, а третьего от3 до 5?

ВАРИАНТ №7

1. Сколько различных полных обедов можно составить, если в меню имеется 2 первых, 4 вторых и 3 третьих блюда?

2. Сколько можно составить двузначных или трехзначных чисел из четных цифр при условии, что ни одна цифра не повторяется? Такой же вопрос при условии возможности повторения цифр.

3. На перекрестках дорог города имеется n светофоров. Сколько может быть дано различных комбинаций их сигналов, если каждый светофор имеет три состояния: «красный», «желтый» и «зеленый»?

4. Сколькими способами можно разложить в три кошелька 10 монет разного достоинства?

5. Сколько «слов», каждое из которых состоит из семи различных букв, можно составить из букв слова “перестройка”?

6. В состав сборной по футболу включены 2 вратаря, 7ащитников, 6 полузащитников и 3 нападающих. Сколькими способами тренер может выставить на поле команду, в которую входит вратарь, 4 защитника, 4 полузащитника и 2 нападающих?

7. На прямой взяты m точек, а на параллельной ей прямой — n точек. Сколько существует треугольников, вершинами которых являются эти точки?

8. Для премий на олимпиаде выделено 4 экземпляра одной книги, 3 экземпляра другой и 1 экземпляр третьей книги. Сколькими способами могут быть вручены премии, если в олимпиаде участвовало 15 человек (каждому из участников может вручаться не более одной книги)?

ВАРИАНТ №8

1. Сколько различных команд по футболу может выставить клуб, если в клубе имеется 3 вратаря, 11 защитников 8 полузащитников и 5 нападающих, ели в команде не менее 3 защитников и не менее одного нападающего?

2. Сколько можно составить двузначных или трехзначных чисел из цифр от 1 до 7 при условии, что ни одна цифра не повторяется? Тот же вопрос при условии возможности повторения цифр.

3. Каждый из 35 делегатов может поддержать предложение, проголосовать «против» или воздержаться. Сколько может быть различных комбинаций итогов голосования по одному предложению?

4. Сколькими способами можно расставить 4 ладьи на шахматной доске так, чтобы ни одна из них не была под боем другой?

5. Сколько «слов», каждое из которых состоит из восьми различных букв, можно составить из букв слова “университет”? Тот же вопрос при условии возможности повторения букв.

6. В состав сборной по футболу включены 2 вратаря, 7 защитников, 6 полузащитников и 3 нападающих. Сколькими способами тренер может выставить на поле команду, в которую входит вратарь, 4 защитника, 5 полузащитников и 1 нападающий?

7. На прямой взято m точек, а на параллельной ей прямой — n точек. Сколько существует четырехугольников, вершинами которых являются эти точки по две на каждой прямой?

8. На студенческую конференцию из группы в 23 человека выбирают три делегата. Сколькими способами могут быть вручены делегаты?

Практическое занятие №4

Формула включений и исключений и бином Ньютона

Цель: Изучить методику использования формулы включений и исключений для решения задач по определению количества элементов в множестве. Изучить методику разложения выражения $(a+b)^n$ по формуле бинома Ньютона.

Вопросы, выносимые на практическое занятие.

1. Формула включений и исключений.
2. Формула бинома Ньютона.
3. Свойства биномиальных коэффициентов.
4. Треугольник Паскаля.

Краткие теоретические положения

Формула включений и исключений

Пусть даны конечные множества $P_1, P_2, .. P_n$. Количество элементов в этих множествах обозначаем $|P_1|$, $|P_2|$,.. $|P_n|$.

Тогда существует следующие правила суммы (формула включений и исключений)

а) $|P_1 \cup P_2| = |P_1| + |P_2| - |P_1 \cap P_2|$

б) $|P_1 \cup P_2 \cup P_3| = |P_1| + |P_2| + |P_3| - |P_1 \cap P_2| - |P_1 \cap P_3| - |P_2 \cap P_3| + |P_1 \cap P_2 \cap P_3|$

в) В случае n множеств правило суммы имеет вид: $|P_1 \cup P_2 \cup .. P_n| = |P_1| + |P_2| + \cdots + |P_n| - (|P_1 \cap P_2| + |P_1 \cap P_3| + \cdots |P_{n-1} \cap P_n|) + (|P_1 \cap P_2 \cap P_3| + |P_1 \cap P_2 \cap P_4| + \cdots |P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap P_n|) - \cdots + (-1)^{n-1}|P_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap P_n|$.

Формула бинома Ньютона

Для произвольного положительного целого числа n справедлива следующая формула: $(a+b)^n = C_n^0 a^{n-0} b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \cdots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n a^0 b^{n-0} = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m$

Это формула бинома Ньютона. Коэффициенты $C_n^m$ называются биномиальными коэффициентами. При n=2 и n=3 получаем следующие формулы: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Свойство биномиальных коэффициентов

1. $C_n^0 = C_n^n = 1$
2. $C_n^m = C_n^{n-m}$

3. $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$
4. $\sum_{m=0}^{n} C_n^m = 2^n$
5. $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots$

То есть сумма биномиальных коэффициентов с чётными верхними индексами равна сумме биномиальных коэффициентов с нечётными верхними индексами.

Треугольник Паскаля

Треугольник Паскаля позволяет найти значения биномиальных коэффициентов и имеет общий вид:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & C_0^0 & & & \\ & & C_1^0 & & C_1^1 & & \\ & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & \\ C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 \end{array}$$

и так далее…

Строки под номером n содержит биномиальные коэффициенты разложения бинома $(a + b)^n$.

Воспользовавшись свойством $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$, можно заметить, что каждый внутренний элемент треугольника равен сумме двух соседних элементов, расположенных над ним, а боковые элементы треугольника всегда равны единице.

Примеры задач, выносимых на практическое занятие

Задача 1

Из 100 студентов английский язык знают 28 человек, немецкий - 30, французский – 42, английский и немецкий – 8, английский и французский – 10, немецкий и французский – 5, все 3 языка знают 3 человека. Сколько студентов не знают ни одного иностранного языка?

Обозначим: $|P_1|$ - число студентов, знающих английский язык, $|P_2|$ - знающих немецкий язык, $|P_3|$ - знающих французский язык.

Тогда, согласно условию:

$|P_1| = 28;$
$|P_2| = 30;$
$|P_3| = 42;$
$|P_1 \cap P_2| = 8$ - знают английский и немецкий языки;
$|P_1 \cap P_3| = 10$ - знают английский и французский языки;
$|P_2 \cap P_3| = 5$ - знают немецкий и французский языки;

$|P_1 \cap P_2 \cap P_3| = 3$ - знают все 3 языка.

По правилу суммы имеем: $|P_1 \cup P_2 \cup P_3| = |P_1| + |P_2| + |P_3| - |P_1 \cap P_2| - |P_1 \cap P_3| - |P_2 \cap P_3| + |P_1 \cap P_2 \cap P_3|$=28+30+42-8-10-5+3=80.

Таким образом, знают хотя бы 1 иностранный язык 80 студентов, следовательно, ни одного иностранного языка не знают 20 человек, так как 20=100-80.

Задача 2

Выпишем разложение $(a+b)^n$ при n=4. $(a+b)^4 = C_4^0 a^{4-0} b^0 + C_4^1 a^{4-1} b^1 + +C_4^2 a^{4-2} b^2 + C_4^3 a^{4-3} b^3 + C_4^4 a^{4-4} b^4 = \frac{4!}{0!(4-0)!} a^4 + \frac{4!}{1!(4-1)!} a^3 b + +\frac{4!}{2!(4-2)!} a^2 b^2 + \frac{4!}{3!(4-3)!} a b^3 + \frac{4!}{4!(4-4)!} b^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4.$

Задача 3

В разложении бинома Ньютона $\left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{x}\right)^5$ найти член, который не содержит x.

Общий член разложения бинома Ньютона $\left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{x}\right)^5$ имеет вид: $C_5^k (\frac{2}{\sqrt{x}})^{5-k} * (\sqrt[3]{x})^k = C_5^k * 2^{5-k} * x^{\frac{-(5-k)}{2}} * x^{\frac{k}{3}} = C_5^k * 2^{5-k} * x^{\frac{k}{3} - \frac{5-k}{2}} = C_5^k * 2^{5-k} * x^{\frac{5k-15}{6}}$ .

Это слагаемое будет свободно от x, если 5k-15=0, то есть k=3. Это соответствует четвёртому слагаемому в разложении бинома Ньютона: $C_5^3 * (\frac{2}{\sqrt{x}})^2 ** (\sqrt[3]{x})^3 = C_5^3 * \frac{4}{x} * x = 4 * C_5^3 = 4 * \frac{5!}{(5-3)!3!} = 40$.

Задачи, выносимые на самостоятельную работу студентов

Формула включения и исключения

ВАРИАНТ №1.

1. Из ста учеников девятых классов на первом экзамене получили отличные и хорошие оценки 80%, на втором экзамене - 72%, на третьем - 60%.

Какое может быть наименьшее число учащихся, получивших отличные и хорошие оценки на всех трех первых экзаменах?

2. Каждый из учеников класса в зимние каникулы ровно два раза был в кинотеатре, при этом фильмы А, В, С видели соответственно 25,12 и 23 ученика. Сколько

учеников в классе? Сколько из них видели спектакли А и В, А и С, В и С?

ВАРИАНТ №2

1. Экзамен по математике сдавали 250 абитуриентов, оценку ниже пяти получили 180 человек, а выдержали экзамен 210 абитуриентов.

Сколько человек получили оценки 3 и 4?

2. В течении недели по телевизору демонстрировались фильмы: боевик А, вестерн В и мелодрама С. Из 40 студентов, каждый из которых просмотрел либо все три фильма, либо один из трех, фильм А видели 13, фильм В - 16, фильм С -19. Найдите, сколько учеников просмотрели все три фильма.

ВАРИАНТ N3

1. В школе 1400 учеников. Из них 1250 умеют кататься на лыжах, 952 на коньках. Ни на лыжах, ни на коньках не умеют кататься 60 учащихся. Сколько учащихся умеют кататься и на лыжах и на коньках?
2. В 92-процессорном ЭВС 19 микропроцессоров обрабатывают текстовую информацию, 17 - графическую, 11 - символьную, 12 - микропроцессоров одновременно обрабатывают графическую и текстовую, 7 - текстовую и символьную, 5 - графическую и символьную, а часть микропроцессоров одновременно обрабатывают графическую, текстовую и символьную информацию. Сколько микропроцессоров являются универсальными, если при решении задачи не задействованы 67 микропроцессоров.

ВАРИАНТ №4

1. В группе из 100 туристов 70 человек знают английский язык, 45 знают французский и 23 человека знают оба языка. Сколько туристов в группе не знают ни английского ни французского языка?

2. Сколько студентов из группы в 30 человек изучают по свободному учебному плану три дисциплины, если известно;

19 студентов изучают по свободному плану Дискретную математику, 17 - алгебру, 11 - матлогику. 12 - Дискретную математику и алгебру, 7 - Дискретную математику и матлогику, 5 - алгебру и матлогику, а пять студентов обучается по типовому плану.

ВАРИАНТ №5

1. Сколькими способами 6 человек могут выбрать из 6 пар различных перчаток по правой и левой перчатки так, чтобы ни один из них не получил пары?
2. Два экзаменатора, работая одновременно, экзаменуют группу в 12 человек по двум предметам. Каждый учащийся отвечает по 5 минут по каждому предмету. Сколькими способами экзаменаторы могут распределить между собой работу так, чтобы ни одному экзаменующемуся не пришлось отвечать сразу по двум предметам?

ВАРИАНТ №6

1. Сколькими способами 8 человек могут выбрать из 9 пар различных перчаток по правой и левой перчатки так, чтобы ни один из них не получил пары?
2. В отделе работают несколько человек. Каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. 6 – знают английский, 6 – немецкий, 7 французский, 4 - знают английский и немецкий, 3 – немецкий и французский, 2 – английский и французский, 1 знает все три языка. Сколько человек работает в отделе?

ВАРИАНТ №7

1. У повара 7 друзей. Он приглашает их на обед в течении 7 дней по 3 человека. Сколькими способами он может сделать так, чтобы ни какие 3 не встречались дважды?
2. В отделе работают несколько человек. Каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. 6 – знают английский, 6 – немецкий, 7 французский, 4 - знают английский и немецкий, 3 – немецкий и французский, 2 –

английский и французский, 1 знает все три языка. Сколько человек знают только один язык?

## ВАРИАНТ № 8

1. У повара 7 друзей. Сколькими способами можно составить 7 компаний по 3 человека так, чтобы никто не остался не приглашенным?
2. В загородную поездку поехали 92 человека. Бутерброды с колбасой взяли 48 человек, с сыром – 38, с ветчиной – 42, с сыром и колбасой – 28, с колбасой и ветчиной - 31, с сыром и ветчиной – 26. 25 человек взялис собой бутерброды всех трех видов, а несколько человек вместо бутербродов взяли пироги. Сколько человек взяли с собой пироги?

## Бином Ньютона

## ВАРИАНТ №1

1. Разложить по формуле бином Ньютона$\left(2-\sqrt[7]{x}\right)^7$.
2. Найти восьмой член в разложении бинома Ньютона $\left(\frac{1}{X}+\sqrt{X}\right)^{14}$

## ВАРИАНТ №2

1. Разложить по формуле бином Ньютона$\left(3+\sqrt[6]{x}\right)^6$.
2. Найти пятый член разложения бинома$\left(x-\sqrt[7]{x}\right)^{12}$.

## ВАРИАНТ №3

1. Разложить по формуле бином Ньютона $(3-\sqrt[5]{x})^5$ .
2. Найдите номер члена разложения $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}\right)^{16}$, не содержащего x.

## ВАРИАНТ №4

1. Разложить по формуле бином Ньютона $\left(2+\sqrt[8]{x}\right)^8$.
2. Сколько членов разложения бинома $(\sqrt[5]{3}+\sqrt[3]{7})^{36}$ являются целыми числами?

ВАРИАНТ №5

1. Разложить по формуле бином Ньютона $\left(2y+\sqrt[3]{x}\right)^8$.
2. Найти восьмой член в разложении бинома Ньютона $(\sqrt[5]{3}+\sqrt[4]{7})^{26}$.

ВАРИАНТ №6

1. Разложить по формуле бином Ньютона $(5-\sqrt[3]{x})^6$.
2. Имеются ли в разложении бинома $\left(\sqrt[4]{x}+\frac{1}{x}\right)^{24}$ члены, не содержащие x. Если они есть, то указать их номера.

ВАРИАНТ №7

1. Разложить по формуле бином Ньютона $\left(\sqrt[4]{x}+\frac{1}{x}\right)^{14}$.
2. Найти пятый член разложения бинома $(1-\sqrt[4]{x})^7$.

ВАРИАНТ №8

1. Разложить по формуле бином Ньютона $\left(y+\sqrt[3]{x}\right)^6$.
2. Найти пятый член разложения бинома $\left(\sqrt[4]{x}+\frac{1}{x}\right)^{24}$.

## Задание №5

## Принцип математической индукции и рекуррентные соотношения

Цель: Изучить принцип математической индукции и научиться использовать его для доказательства истинности утверждений занумерованных натуральными числами.

Изучить методику использование рекуррентных соотношений для нахождения общего вида функции.

Вопросы, выносимые на практическое занятие

1. Принцип математической индукции.
2. Рекуррентные соотношения.

### Краткие теоретические положения

### Принцип математической индукции

Принцип математической индукции используется для доказательства истинности утверждений занумерованных натуральными числами. Суть принципа заключается в следующем:

Предположим, что для совокупности утверждений $\{P(n)|n\in N\}$ выполнены следующие условия:

- при n=1 P(1) истинно (база индукции)
- для любого натурального n из предположения истинности утверждения P(n) следует истинность утверждения P(n+1) (индуктивный переход).

Тогда для любого натурально n утверждение P(n) истинно.

Рекуррентные соотношения

На практике часто используют следующий способ задания функции $a_n = a(n)$, где n – неотрицательное целое число.

Даны значения $a_n$ для нескольких первых значений n, и задано рекуррентное соотношение – формула, позволяющая по предыдущим значениям функции $a_n$ определить последующие значения функции $a_n$. Необходимо найти общую формулу для $a_n$. Ограничимся рекуррентным соотношением вида $a_n = b * a_{n-1} + C * a_{n-2}$ с постоянными коэффициентами b и c.

По рекуррентному соотношению $a_n = b * a_{n-1} + C * a_{n-2}$ составляется характеристическое уравнение $\lambda^2 = b * \lambda + c$.

Если действительные корни $\lambda_1$ и $\lambda_2$ характеристического уравнения различны ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), то $a_n = \mathrm{C}_1\lambda_1^n + \mathrm{C}_2\lambda_2^n$, где $\mathrm{C}_1$ и $\mathrm{C}_2$ произвольные постоянные. Если характеристическое уравнение имеет только 1 действительный корень $\lambda$ кратное 2, то $a_n = \lambda^n(\mathrm{C}_1(n-1) + \mathrm{C}_2)$, где $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2$ произвольные постоянные.

Зная значения $a_0$ и $a_1$, можно составить систему линейных уравнений и определить значения постоянных $\mathrm{C}_1$ и $\mathrm{C}_2$, а затем найти общий вид функции $a_n$.

Метод математической индукции

Докажите методом математической индукции истинность следующих формул для любого натурального n.

Примеры задач, выносимых на практическое занятие

Задача 1

Доказать истинность следующей формулы для любого натурального n. $1 + 2 + .. + n = \frac{n(n+1)}{2}$

При n=1 получаем $1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$. Формула верна.

Предположим, что формула верна при некотором n:

$$1 + 2 + .. + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Покажем истинность формулы для n+1.

Рассмотрим сумму 1+2+..+n+(n+1). К первым n слагаемым можно применить индуктивное предположение $1+2+..+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

Тогда имеем:

$$1+2+..+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=(n+1)*\left(\frac{n}{2}+1\right)=\frac{(n+1)*(n+2)}{2}$$

То есть из предположения истинности формулы для n показана истинность формулы для n+1. Исходя из принципа математической индукции, получаем истинность формулы $1+2+..+n=\frac{n(n+1)}{2}$ для любого n.

Задача 2

Доказать неравенство Бернулли. $(1+a)^n \geq 1+n*a$ (a ≥ -1, n ∈ N)

при n=1 $(1+a)^1 \geq 1+a$ неравенство очевидно.

Пусть $(1+a)^n \geq 1+n*a$ при некотором n. (1)

Докажем неравенство для n+1: $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)*a$ (2)

Умножим обе части неравенства (1) на выражение (1+a) и проведем некоторые преобразования.

$$(1+a)^n*(1+a) \geq (1+n*a)*(1+a)$$
$$(1+a)^{n+1} \geq 1+na+a+na^2$$
$$(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)*a+na^2$$

Так как n ≥ 1, $a^2 \geq 0$, то $na^2 \geq 0$.

Исключение этого слагаемого усиливает неравенство, следовательно имеем: $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)*a$.

Таким образом, мы получим неравенство (2), которое требовалось доказать.

По принципу математической индукции заключаем, что неравенство Бернулли верно при любом n.

Задача 3

Известно, что $a_n=5*a_{n-1}-6*a_{n-2}, \quad a_0=1, \quad a_1=4$

Определить общую формулу для вычисления значения $a_n$ по n .

Составляем характеристическое уравнение $\lambda^2 = 5\lambda - 6$. Запишем его в привычном виде квадратного уравнений, то есть $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$.

Корни уравнения равны $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 3$

Тогда $a_n = C_1 * \lambda_1^n + C_2 * \lambda_2^n = C_1 * 2^n + C_2 * 3^n$

Определим постоянные $C_1$ и $C_2$.

При n=0 $a_n = a_0 = C_1 * 2^0 + C_2 * 3^0 = C_1 + C_2 = 1$

При n=1 $a_n = a_1 = C_1 * 2^1 + C_2 * 3^1 = 2C_1 + 3C_2 = 4$

Получаем систему уравнений относительно $C_1$ и $C_2$ :

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 2C_1 + 3C_2 = 4 \end{cases}$$

Решением данной системы уравнений являются значения $C_1 = -1,\ C_2 = 2$ .

Тогда $a_n = C_1 * 2^n + C_2 * 3^n = (-1) * 2^n + 2 * 3^n = 2 * 3^n - 2^n$

Задача 4

Известно, что $a_n = 10a_{n-1} - 25a_{n-2}, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 4$ .

Определить общую формулу для вычисления $a_n$.

Составим характеристическое уравнение $\lambda^2 = 10\lambda - 25$, т.е. имеем $\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0$ .

Его корень $\lambda = 5$ кратный. Тогда общая формула для $a_n$ будет иметь такой вид: $a_n = \lambda^n(C_1(n-1) + C_2) = 5^n(C_1(n-1) + C_2)$ .

Определим значения постоянных $C_1$ и $C_2$.

При n=0 $a_n = a_0 = 5^0(C_1(0-1) + C_2) = C_2 - C_1 = 1$

При n=1 $a_n = a_1 = 5^1(C_1(1-1) + C_2) = 5C_2 = 4$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} C_2 - C_1 = 1 \\ 5C_2 = 4 \end{cases}$$

Решением данной системы уравнений являются числа $C_1 = -0{,}2$; $C_2 = 0{,}8$ .

Тогда $a_n = 5^n(C_1(n-1)+C_2) = 5^n(-0{,}2(n-1)+0{,}8) = 5^n(1-0{,}2n)$ .

Задачи, выносимые на самостоятельную работу студентов

Метод математической индукции

Докажите методом математической индукции истинность следующих формул для любого натурального n.

ВАРИАНТ №1

1. $1^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .
2. $\frac{1}{2*7} + \frac{1}{7*12} + \cdots + \frac{1}{(5n-3)(5n+2)} = \frac{n}{10n+4}$ .
3. Доказать, что при любом целом положительном n число $n^2+n$ является четным.

ВАРИАНТ №2

1. $1^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .
2. $1*1! + \cdots + n*n! = (n+1)! - 1$ .
3. $2^n > n^3$, при $n > 10$ .

ВАРИАНТ №3

1. $(1+\cdots+n)^2 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$
2. $1*2 + 2*3 + \cdots + (n-1)*n = \frac{(n-1)*n*(n+1)}{3}$ .
3. Доказать, что при любом n числа $n^2 -1$ и $n^3 +1$ одной четности.

ВАРИАНТ №4

1. $1^3 + \cdots + \mathrm{n}^3 = (\frac{\mathrm{n(n+1)}}{2})^2$
2. $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{\mathrm{n}}{2^{\mathrm{n}}} = 2 - \frac{\mathrm{n}+2}{2^{\mathrm{n}}}$
3. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2\mathrm{n}-1) = \mathrm{n}^2$

ВАРИАНТ №5

1. $(1+\cdots+n)^2 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$ .
2. $2^n > n^2$, при $n > 4$ .
3. $1 + q + q^2 + \cdots q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, где $q \neq 1$ – вещественное число.

ВАРИАНТ №6

1. $\frac{1}{1*3} + \frac{1}{3*5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$ .

2. Доказать, что для любого целого положительного числа n , число $n^3 - n$ делится на 3 .

3. $\sum_{k=1}^{k=n} kC_n^k = n2^{n-1}$.

ВАРИАНТ №7

1. Доказать равенство $\frac{1}{2*7} + \frac{1}{7*12} + \cdots + \frac{1}{(5n-3)(5n+2)} = \frac{n}{10n+4}$
2. Доказать, что $A_n^m = A_n^{m-1} + n \cdot A_{n-1}^{m-1}$.
3. n·(n+1)·(n+2) делится на 6.

ВАРИАНТ №8

1. $1^3 + \cdots + n^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$ .
2. $\sum_{k=0}^{k=n}(2k+1)C_n^k = (n+1)2^{n-1}$ .
3. Доказать, что существует последовательность подряд идущих натуральных чисел, среди которых нет простых.

Рекуррентные соотношения

ВАРИАНТ 1

Известно, что $a_n = 7a_{n-1} - 12a_{n-2}$, $a_0 = 2$, $a_1 = 5$.
Определить общую формулу вычисления $a_n$ .

ВАРИАНТ 2

Известно, что $a_n = 8a_{n-1} - 16a_{n-2}$, $a_0 = 2$, $a_1 = 5$.
Определить общую формулу вычисления $a_n$ .

ВАРИАНТ 3

Известно, что $a_n = 8a_{n-1} - 7a_{n-2}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 3$.
Определить общую формулу вычисления $a_n$ .

ВАРИАНТ 4

Известно, что $a_n = 10a_{n-1} - 9a_{n-2}$, $a_0 = 2$, $a_1 = 4$.
Определить общую формулу вычисления $a_n$ .

ВАРИАНТ 5

Известно, что $a_n = 46a_{n-1} - 4a_{n-2}$, $a_0 = 2$, $a_1 = 3$.
Определить общую формулу вычисления $a_n$ .

ВАРИАНТ 6

Известно, что $a_n = a_{n-1} - 6a_{n-2}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 3$.
Определить общую формулу вычисления $a_n$ .

ВАРИАНТ 7

Известно, что $a_n = -4a_{n-1} - 3a_{n-2}$, $a_0 = 2$, $a_1 = 1$.

Определить общую формулу вычисления $a_n$ .

ВАРИАНТ 8

Известно, что $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 1$.
Определить общую формулу вычисления $a_n$ .

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


### ОСНОВНАЯ:

1. Шевелев Ю. П. Дискретная математика. Учебное пособие - Спб.: Изд-во « Лань», 2008.
2. Просветов Г. И. Дискретная математика : задачи и решения: учебное пособие. - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008.
3. Данилов В. Г., Дубнов В. Л., Лакерник А. Р., Райцин А. М. Дискретная математика. Учебное пособие для вузов. - М.: Горячая линия - Телеком, 2008.
4. Андерсон Дж. Дискретная математика и комбинаторика. - М.; Спб., Киев: Вильямс, 2003.
5. Кузнецов О. П. Дискретная математика для инженера. - СПб: Изд-во « Лань», 2005.

### ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ:

1. Ерусалимский Я. М. Дискретная математика. - М.: Вузовская книга, 2000.
2. Белоусов А.И., Ткачев С.Б. Дискретная математика: Учеб. Для вузов/ Под ред. В.С.Зарубина, А.П.Крищенко. - М.: Изд-во МГТ'У им. Н.Э. Баумана, 2001.
3. Хаггарти Р. Дискретная математика для программистов. М.: Техносфера, 2003.
4. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. Спб: Питер, 2001.
5. Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. Элементы дискретной математики. Учебник для втузов. - М.:ИНФРА-М, Новосибирск:: Изд-во НГТУ, 2002.
6. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику: Учебное пособие для вузов/ Под ред. А.А.Садовничего, - М.:Высш.шк.. 2002.
7. Москинова Г.И. Дискретная математика: Учебное пособие. - М.: Логос, 2000.
8. Горбатов В.А Фундаментальные основы дискретной математики. - М., Наука, 2000.

9. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. - М., Наука. 1975.
10. Косточка А.В. Дискретная математика. Ч.2. Новосибирск, НГУ, 1996.
11. Косточка А.В., Соловьева Ф.И. Дискретная математика. Ч.1. Новосибирск, НГУ, 1995.
12. Матросов В.А., Стеценко В.А. Лекции по дискретной математике. - М., МИГУ, 1997.
13. Ежов И.Г.Г, Скороход А.В., Ядренко М.М. Элементы комбинаторики. - М., Наука, 1977.
14. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Сборник задач по дискретной математике. Уч. пособие., - М., Наука. 1977.
15. Гордеев Э.Н., Нурлыбаев А.Н, Задачи по дискретной математике. Алма-Ата, КазГУ, 1986.
16. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Под ред. С.В. Яблонского, О.Б. Лупанова. Т. 1. - М., Наука. 1974.
17. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. - М., Наука, 1969.
18. Виленкин Н.Я. Популярная комбинаторика. - М.. Наука, 1975.
19. Методические разработки по курсу «Элементы дискретной математики». Составитель А.В. Яблонский, МГУ, - М., 1971.
20. Нефедов В. Н., Осипова В. А. Курс дискретной математики: Учебное пособие. - М.: Изд-во МАИ. 1992.