МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра программной инженерии

УТВЕРЖДАЮ:
Проректор по учебной работе
_________ О.Г. Локтионова
«15» ___________ 2017 г.

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЙ ВЫБОР. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ УСТУПОК

Методические указания по выполнению лабораторной работы
по дисциплине «Теория принятия решений»
для студентов направления подготовки бакалавров
09.03.04 «Программная инженерия»

Курск 2017

УДК 519.816

Составители: В.В. Апальков, Р.А. Томакова

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент *Е. И. Аникина*

Многокритериальный выбор. Метод последовательных уступок: методические указания по выполнению лабораторной работы / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: В.В. Апальков, Р.А. Томакова. – Курск: ЮЗГУ, 2017. – 12 с. Библиогр.: с. 12.

Излагается цель лабораторной работы, в теоретической части рассматриваются многокритериальная модель задачи принятия решений в условиях определенности, проблемы решения многокритериальных задач, метод последовательных уступок. В практической части приводятся пример выполнения задания на лабораторную работу и вопросы для самопроверки.

Методические указания соответствуют требованиям рабочей программы по направлению подготовки бакалавров 09.03.04 «Программная инженерия».

Предназначены для студентов всех форм обучения направления подготовки бакалавров 09.03.04 «Программная инженерия».

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать Формат 60×84 1/16.
Усл. печ. л. . Уч.- изд. л. . Тираж 25 экз. Заказ. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Цель работы: изучить метод решения многокритериальных задач принятия решений (ЗПР) в условиях определенности – метод последовательных уступок.

Теоретическая часть

Многокритериальная модель задачи принятия решений в условиях определенности может быть представлена в виде:

$$<t, A, K, X, f, P, r>, \quad (1)$$

где t – постановка задачи;

A – множество допустимых альтернативных решений;

K – множество критериев;

X – множество шкал критериев;

f – отображение множества допустимых решений в множество векторных оценок;

P – система предпочтений ЛПР;

r – решающее правило.

Структурная схема процесса построения и выбора оптимального решения для многокритериальной задачи принятия решений представлена на рисунке 1.

В реальных задачах, возникающих на практике, оценивание альтернативных решений осуществляется с помощью векторного критерия, компоненты которого являются не скалярами, а векторами.

В зависимости от содержания условия в постановке задачи могут возникать требования определения, например, наиболее предпочтительного решения, либо полностью упорядоченного множества допустимых решений, либо выделения множества недоминируемых решений и т.д.

Множество A представляет собой совокупность альтернативных решений, в каждой задаче удовлетворяющих определенным ограничениям и рассматриваемых как возможные способы достижения поставленной цели. Элементы множества A называются также *допустимыми решениями, альтернативами, вариантами выбора*.

Множество допустимых альтернативных решений либо задается, либо формируется в процессе исследования.

Рассматриваемые варианты выбора могут характеризоваться различными признаками, которые выражаются критериями из множества K.

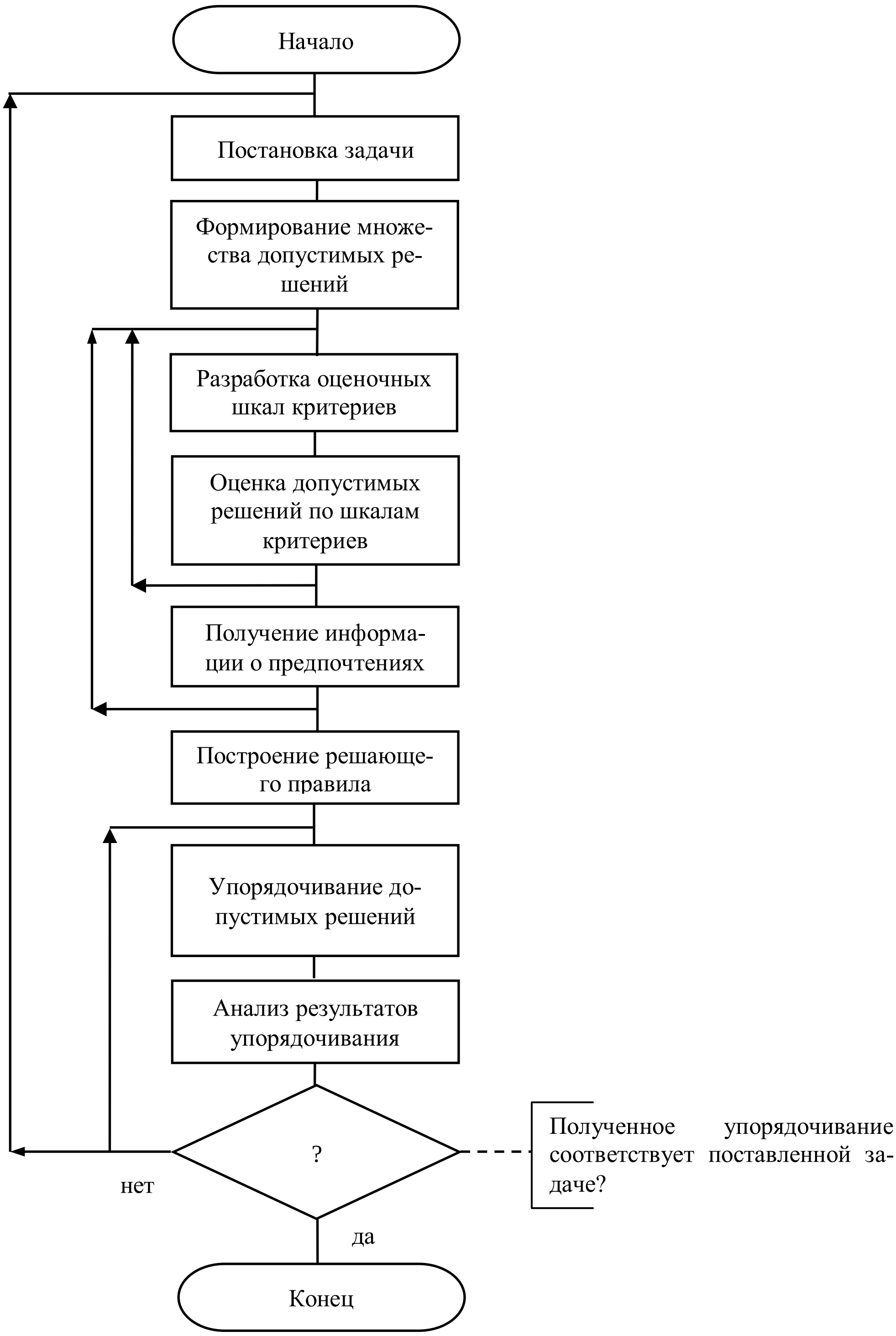

Рисунок 1 – Схема процесса выбора оптимального решения в многокритериальной задаче принятия решений

Тогда каждому решению A_i ставится в соответствие n-мерная векторная оценка $x_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in})$, где x_{ij} – оценка характеристики варианта A_i по шкале X_j критерия K_j, $j = 1, \ldots, n$.

Совокупность векторных оценок свойств вариантов по шкалам критериев из множества X и образует *множество допустимых решений*.

Качество варианта A_i при наличии многих критериев представляется векторной функцией $y_i = f(x_i) = (y_{i1}, \ldots, y_{im})$, где $y_{ik} = f_k(x_i) \in R$ – оценка варианта A_i по частному критерию f_k, $k = 1, \ldots, m$; $f = (f_1, \ldots, f_m)$.

Совокупность векторных оценок вариантов образует *множество оценок качества решения*, или *множество достижимых целей*.

В теории принятия решений предполагается, что каждое ЛПР имеет некоторую свою систему предпочтений P, из которой он исходит при рациональных действиях.

Под *системой предпочтений* ЛПР будем понимать совокупность обычно неструктурированных его представлений, связанных с достоинствами и недостатками сравниваемых решений.

В многокритериальной модели система предпочтений описывается совокупностью P некоторых множеств с соотношениями предпочтения (например, наборов критериев, интервалов между оценками допустимых решений определенного вида и т.п.).

Решающее правило (метод принятия решения) r представляет собой принцип сравнения векторных оценок и вынесения суждений о предпочтительности одних из них по отношению к другим. Оно может быть задано в виде *аналитического выражения, алгоритма или словесной формулировки.*

Например, из двух векторных оценок предпочтительнее та, которая имеет хотя бы одну максимальную компоненту и ни одной минимальной.

Решающее правило должно приводить к такому упорядочению множества допустимых решений, которое соответствует содержательной постановке задачи и согласуется с принятыми в модели допущениями и системой предпочтений ЛПР. К принимаемым допущениям относятся допущения о полноте множества решений и набора критериев, о соответствии множества шкал множеству критериев и т.п. В зависимости от принятых допущений, а также от целей и предпочтений ЛПР, могут быть построены различные решающие правила.

Проблемы, связанные с решением многокритериальных задач принятия решений

При решении многокритериальных ЗПР возникает ряд специфических проблем, носящих не формальный (т. е. не вычислительный), а концептуальный характер. Главная из них – рациональный выбор принципа оптимальности, определяющего свойства оптимального решения и дающего ответ на вопрос – в каком смысле оптимальное решение лучше всех других решений (превосходит другие решения).

Принципиальное отличие многокритериальных задач принятия решений от однокритериальных детерминированных задач заключается в том, что для них имеется множество различных принципов компромисса и соответствующих им принципов оптимальности, которые приводят к выбору различных оптимальных решений. Это предъявляет серьезные требования к выбору принципа оптимальности.

Рассмотрим основные проблемы, связанные с решением многокритериальных задач принятия решений.

Проблема 1 – выделение области компромисса. В многокритериальных задачах принятия решений имеются противоречия между некоторыми частными критериями, составляющими векторный критерий. Однако эти противоречия обычно является нестрогими, так как иначе задача становится конфликтной антагонистической. В силу этого множество допустимых решений D_A распадается на две непересекающиеся части: область согласия D_A^C и область компромисса D_A^K. В области согласия D_A^C противоречий между частными критериями не возникает и качество решения может и должно быть улучшено одновременно по всем частным критериям или, во всяком случае, без снижения значений любого из них. В области компромисса D_A^K противоречия между некоторыми частными критериями имеются, при этом улучшение качества решения по одним частным критериям приводит к ухудшению качества решения по другим частным критериям.

Все это дает основание утверждать, *что оптимальное решение может принадлежать только области компромисса*, т. е. $A^* \in D_A^K$.

В связи с этим утверждением, поиск оптимального решения надо ограничить только областью компромисса D_A^K. Отсюда возникает *проблема 1* – выделение области компромисса D_A^K из множества допустимых решений D_A. Выделение области компромисса D_A^K обычно является первым этапом при решении многокритериальных задач принятия решений. При этом следует отметить важный практический результат – сужение области альтернативных вариантов решений, что уже само по себе улучшает качество принимаемых решений. В отдельных случаях поиск оптимальных решений с приемлемой для практики точностью можно ограничить выделением области компромисса.

Проблема 2 – выбор схемы компромисса и соответствующего ей принципа оптимальности. Поиск оптимальных решений в области компромисса может быть осуществлен только на основе некоторой выбранной схемы компромисса. Число возможных схем компромисса достаточно велико, поэтому обоснование и рациональный выбор схемы компромисса представляет собой сложную концептуальную проблему.

Рациональный выбор схемы компромисса соответствует раскрытию смысла оператора оптимизации:

$$f(A^*) = \underset{A \in D_A}{opt} \; f(A), \tag{2}$$

где A^* – оптимальный вариант выбора, D_A – множество допустимых решений, f – отображение множества допустимых решений в множество векторных оценок.

Проблема 3 – нормализация критериев. Эта проблема возникает в тех задачах, в которых частные критерии имеют различные единицы измерения. Для осуществления возможности оперирования с векторными критериями необходимо нормализовать значения частных критериев, т. е. привести их к единому, безразмерному, масштабу измерения. К настоящему времени разработано большое число различных схем нормализации.

Проблема 4 – учет приоритета критериев. Частные критерии, составляющие векторный критерий, имеют различную важность и значимость, что является основанием и позволяет упорядочить критерии. В связи с этим эта проблема сводится к рациональному выбору схемы компромисса.

Перечисленные проблемы являются наиболее важными и часто встречающимися, но они не охватывают всего множества проблем, связанных с решением многокритериальных задач принятия решений. Следует отметить, что рассмотренные проблемы 2 - 4 носят концептуальный характер, и при их реализации следует применять различные эвристические процедуры, основанные на научной аргументации, в которых существенная роль принадлежит экспертам и консультантам.

Перейдем от множества допустимых решений D_A к множеству D_F допустимых векторных оценок $f=(f_1,...,f_m)$, задаваемых частными критериями f_k, $k=1,...,m$.

Рассмотрим возможный принцип компромисса – принцип последовательных уступок.

Метод последовательных уступок

В основу метода последовательных уступок положено требование расположения частных критериев по значимости. Предполагается, что все частные критерии, составляющие векторный критерий упорядочены по убыванию важности: $f_1,..., f_m$. Будем также считать, что каждый из них нужно максимизировать.

Процедура построения компромиссного решения сводится к следующему.

Сначала находится решение, обращающее в максимум наиболее значимый частный критерий f_1.

Затем назначается, исходя из практических соображений и точности определения исходных данных, величина некоторой «уступки» Δf_1, которую ЛПР согласен сделать для того, чтобы обратить в максимум второй частный критерий f_2.

Налагаем на значение частного критерия f_1 ограничение, чтобы это значение было не меньше, чем $\max f_1 - \Delta f_1$, и при этом ограничении находим решение, обращающее в максимум частный критерий f_2.

Аналогично назначается «уступка» для частного критерия f_2, ценой которой можно максимизировать частный критерий f_3, и так далее.

Достоинство такого способа построения компромиссного решения заключается в том, что известна цена «уступки» в одном показателе для приобретения выигрыша в другом. При этом важно отметить, что свобода выбора решения, приобретаемая ценой даже незначительных «уступок», может оказаться существенной, так как в районе максимума обычно эффективность решения меняется очень слабо.

Практическая часть

Рассмотрим применение метода последовательных уступок на примере двухкритериальной задачи принятия решений:

$f_1(x) = 3x_1 - x_2 \to \max$,
$f_2(x) = x_1 + 7x_2 \to \max$,
где $x = (x_1, x_2)$.

Множество допустимых решений D_A задается неравенствами:

$2x_1 + x_2 \geq 4$,
$x_1 + x_2 \leq 10$,
$x_1, x_2 \geq 0$.

Пусть частные критерии, составляющие векторный критерий упорядочены по убыванию важности: f_1, f_2. Находим решение, обращающее в максимум наиболее значимый частный критерий f_1.

Первая задача имеет вид:

$f_1(x) = 3x_1 - x_2 \to \max$,
при ограничениях
$2x_1 + x_2 \geq 4$,
$x_1 + x_2 \leq 10$,
$x_1, x_2 \geq 0$.

Найдем решение этой задачи геометрическим методом (рисунок 2).

Уравнение линии уровня функции $f_1(x)$ имеет следующий вид:

$3x_1 - x_2 = c$, где c – const.

Градиент функции $f_1(x)$ – вектор $\nabla f_1(x) = (3;-1)$, показывающий направление наибольшего возрастания функции в точке x.

Максимум частного критерия f_1 достигается в вершине многоугольника допустимых решений $x^* = (10;0)$. При этом $f_1(x^*) = 30$, $f_2(x^*) = 10$.

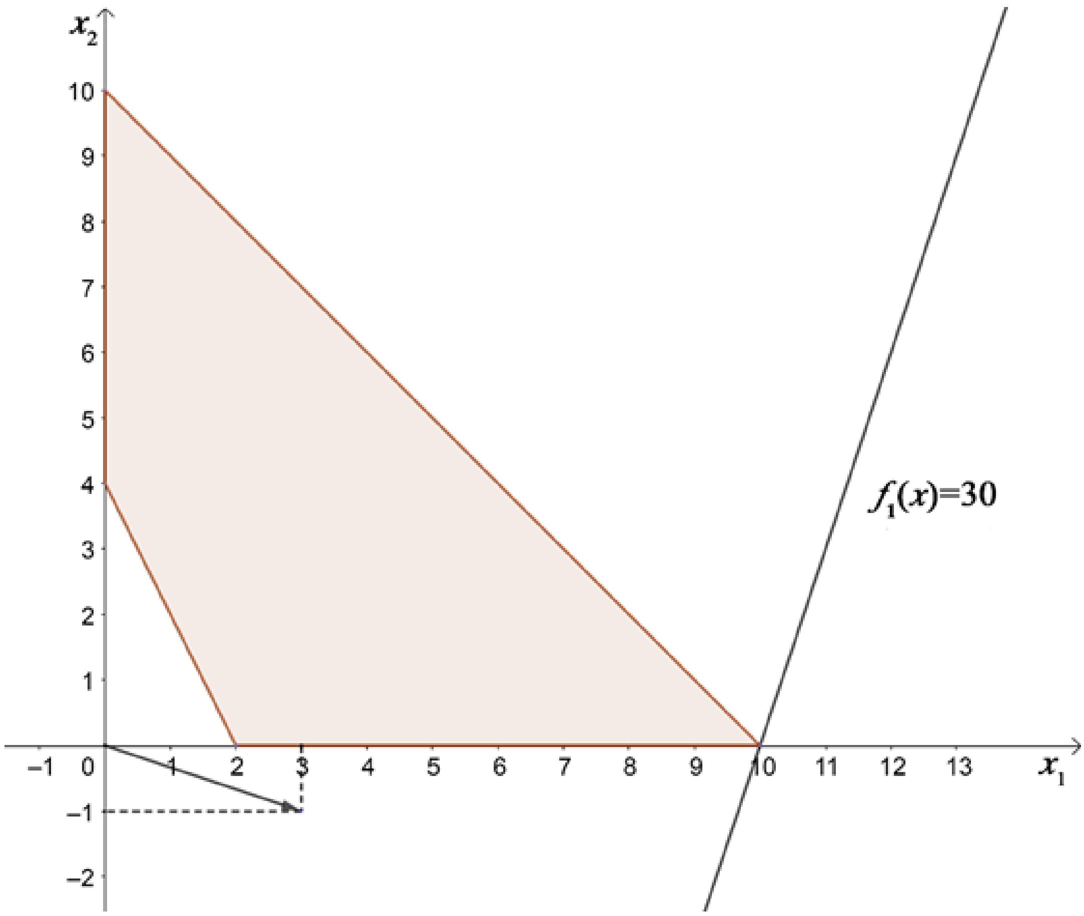

Рисунок 2 – Графическое решение первой задачи

Назначим «уступку» $\Delta f_1 = 6$ (20% от максимального значения критерия f_1) и решим вторую задачу:

$f_2(x) = x_1 + 7x_2 \to \max$,

при ограничениях

$2x_1 + x_2 \geq 4$,

$x_1 + x_2 \leq 10$,

$3x_1 - x_2 \geq 24$,

$x_1, x_2 \geq 0$.

Аналогично, геометрическим методом получим решение этой задачи (рисунок 3).

Уравнение линии уровня функции $f_2(x)$ имеет следующий вид:

$x_1 + 7x_2 = c$, где c – const.

Градиент функции $f_2(x)$ – вектор $\nabla f_2(x) = (1;7)$.

Максимум частного критерия f_2 достигается в вершине многоугольника допустимых решений $x^{**} = (8,5;1,5)$. При этом $f_2(x^{**}) = 19$, $f_1(x^{**}) = 24$.

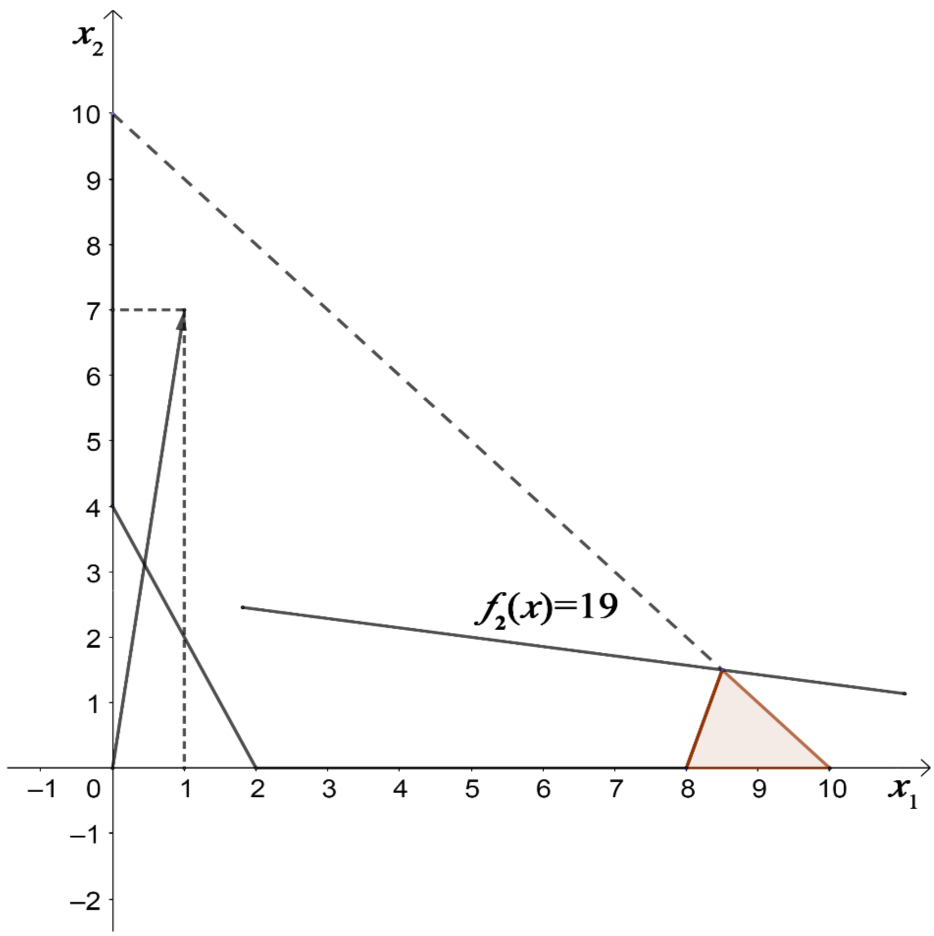

Рисунок 3 – Графическое решение второй задачи

Отметим, что оптимальное решение последней задачи $x^{**} = (8,5;1,5)$ принадлежит множеству Парето (точки отрезка, соединяющего две вершины многоугольника допустимых решений первой задачи с координатами $(0;10)$ и $(10;0)$).

Вопросы для самопроверки

1. Многокритериальная модель ЗПР в условиях определенности.
2. Множество допустимых решений.
3. Множество достижимых целей.
4. Система предпочтений ЛПР.
5. Решающее правило.
6. Проблемы, связанные с решением многокритериальных ЗПР.
7. Область согласия.
8. Область компромисса.
9. Принцип последовательных уступок.

Литература

1. Лотов, В.А. Многокритериальные задачи принятия решений [Текст]: учебное пособие / В.А. Лотов, И.И. Поспелова. – М: МАКС Пресс, 2008. – 197 с.
2. Ногин, В.Д. Принятие решений в многокритериальной среде. Количественный подход / В.Д. Ногин. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. –176 с.
3. Петровский, А. Б. Теория принятия решений [Текст]: учебник / А. Б. Петровский. – М.: Академия, 2009. – 400 с.
4. Томакова, Р. А. Методы и алгоритмы теории принятия решений [Текст]: учебное пособие / Р. А. Томакова, В. В. Апальков; Юго-Зап. гос. ун-т. – Курск: ЮЗГУ, 2015. – 164 с.
5. Черноруцкий, И. Г. Методы принятия решений [Текст]: учебное пособие для студентов вузов / И. Г. Черноруцкий. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 416 с.