МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра программной инженерии

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
___________ О.Г. Локтионова
«15» 12 2017 г.

РЕШЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ СРЕДСТВАМИ VBA

Методические указания для проведения лабораторных занятий и выполнения самостоятельной внеаудиторной работы по дисциплине «Офисные технологии» для студентов направления подготовки 09.03.04 «Программная инженерия»

Курск 2017

УДК 681.3

Составитель: А.В. Малышев

Рецензент

Кандидат технических наук, начальник отдела информатизации ГУ КРО ФСС РФ *А.Ф. Рубанов*

Решение математических задач средствами VBA : методические указания для проведения лабораторных занятий и выполнения самостоятельной внеаудиторной работы по дисциплине «Офисные технологии» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост. А.В. Малышев. Курск, 2017. 21 с.: ил. 14. Библиогр.: с. 21

Содержат сведения, предназначенные для обучения студентов решению математических задач с использованием возможностей языка VBA, встроенного в основные офисные программы. Даны типичные примеры практических задач, использующих в т.ч. и стандартные функции.

Предназначены для студентов направления подготовки 09.03.04.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . Формат 60х84 1/16
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж экз. Заказ. Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.

305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Целью настоящей работы является изучение расширенных возможностей решающего блока офисной программы Microsoft Excel и получение навыков программирования циклических алгоритмов, процедур и функций на языке интегрированной среды VBA.

2. ОПИСАНИЕ МЕТОДОВ ПОИСКА КОРНЕЙ

2.1. Отделение корней

В общем случае отделение корней уравнения $f(x)=0$ базируется на известной теореме, утверждающей, что если непрерывная функция $f(x)$ на концах отрезка $[a,b]$ имеет значения разных знаков, т.е. $f(a)\times f(b)\leq 0$, то в указанном промежутке содержится хотя бы один корень. Например, для уравнения $f(x)=x^3-6x+2=0$ видим, что при $x\to\infty$ $f(x)>0$, а при $x\to-\infty$ $f(x)<0$, что уже свидетельствует о наличии хотя бы одного корня.

В общем случае выбирают некоторый диапазон, где могут обнаружиться корни, и осуществляют «прогулку» по этому диапазону с выбранным шагом h для обнаружения перемены знаков $f(x)$, т.е. $f(x)\times f(x+h)<0$.

При последующем уточнении корня на обнаруженном интервале не надейтесь никогда найти *точное* значение и добиться обращения функции в нуль при использовании калькулятора или компьютера, где сами числа представлены ограниченным числом знаков. Здесь критерием может служить приемлемая *абсолютная* или *относительная погрешность* корня. Если корень близок к нулю, то лишь относительная погрешность даст необходимое число значащих цифр. Если же он весьма велик по абсолютной величине, то критерий абсолютной погрешности часто даёт совершенно излишние верные цифры. Для функций, быстро изменяющихся в окрестности корня, может быть привлечен и критерий: *абсолютная величина значения функции* не превышает заданной допустимой погрешности.

2.2. Уточнение корней методом половинного деления

Самым простейшим из методов уточнения корней является метод половинного деления или метод дихотомии [1], предназначенный для нахождения корней уравнений, представленных в виде $f(x)=0$.

Пусть непрерывная функция $f(x)$ на концах отрезка $[a,b]$ имеет значения разных знаков, т.е. $f(a)\times f(b)\leq 0$ (рис. 1), тогда на отрезке имеется хотя бы один корень. Возьмем середину отрезка $c=(a+b)/2$. Если $f(a)\times f(c)\leq 0$, то корень явно принадлежит отрезку от a до $(a+b)/2$ и в противном случае от $(a+b)/2$ до b.

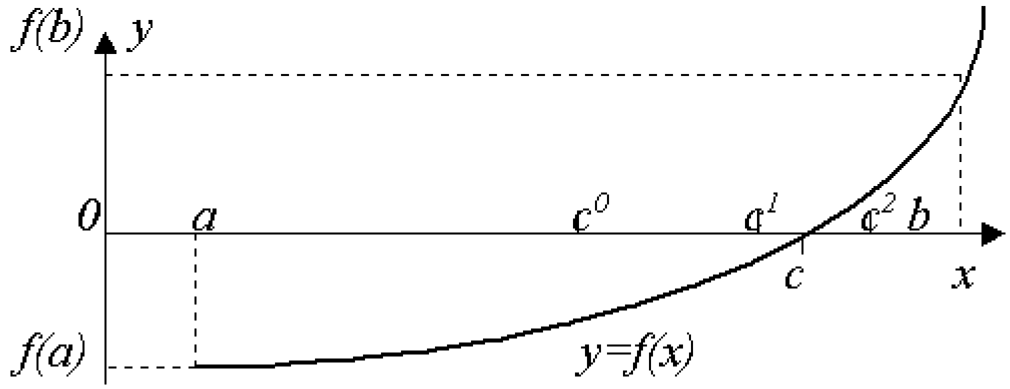


Рис. 1. Метод деления отрезка пополам

Поэтому берем подходящий из этих отрезков, вычисляем значение функции в его середине и т.д. до тех пор, пока длина очередного отрезка не окажется меньше заданной предельной абсолютной погрешности $(b-a)<\varepsilon$.

Так как каждое очередное вычисление середины отрезка c и значения функции $f(c)$ сужает интервал поиска вдвое, то при исходном отрезке $[a,b]$ и предельной погрешности ε количество вычислений n определяется условием $(b-a)/2^n<\varepsilon$, или $n\sim log_2((b-a)/\varepsilon)$. Например, при исходном единичном интервале и точности порядка 6 знаков ($\varepsilon\sim 10^{-6}$) после десятичной точки достаточно провести 20 вычислений (итераций) значений функции.

С точки зрения машинной реализации (рис. 2) этот метод наиболее прост и используется во многих стандартных программных средствах, хотя существуют и другие более эффективные по затратам времени методы.

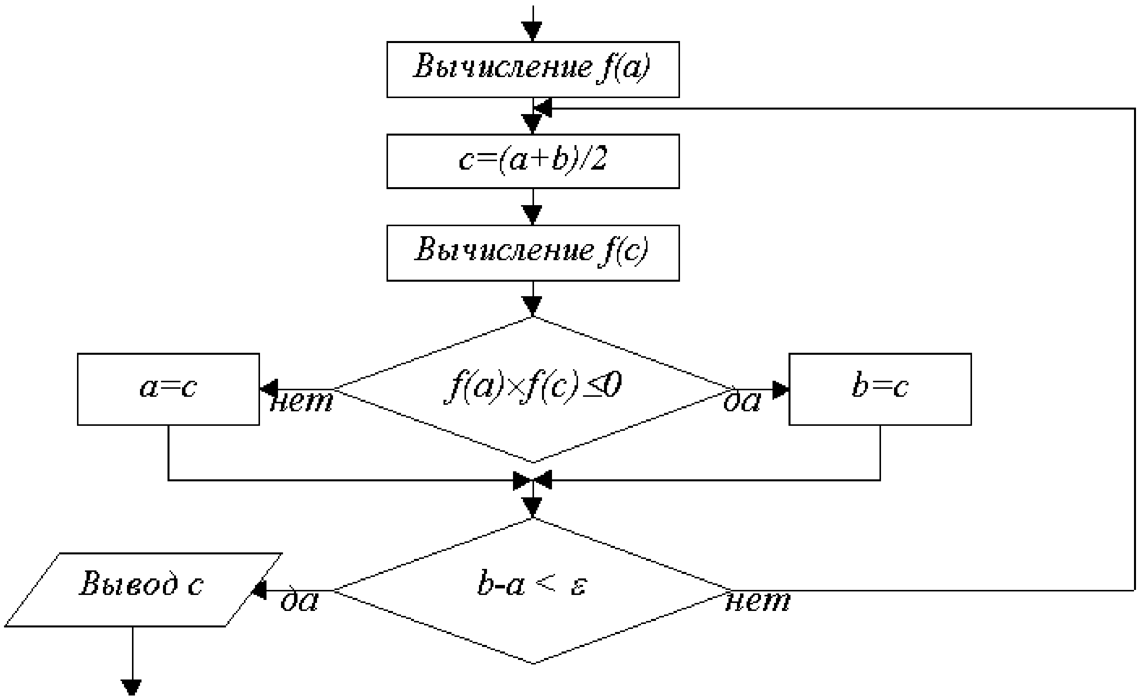


Рис. 2. Блок-схема метода половинного деления

2.3. Уточнение корней методом хорд

В отличие от метода дихотомии, обращающего внимание лишь на знаки значений функции, но не на сами значения, метод хорд использует пропорциональное деление интервала (рис. 3). Здесь вычисляются значения функции на концах отрезка, и строится «хорда», соединяющая точки *(a,f(a))* и *(b,f(b))*. Точка пересечения её с осью абсцисс

$$Z = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)}$$

принимается за очередное приближение к корню. Анализируя знак *f(z)* в сопоставлении со знаком *f(x)* на концах отрезка, сужаем интервал до [*a*,*z*] или [*z*,*b*] и продолжаем процесс построения хорд до тех пор, пока разница между очередными приближениями не окажется достаточно малой (в пределах допустимой погрешности) $|Z_n\text{-}Z_{n-1}|<\varepsilon$.

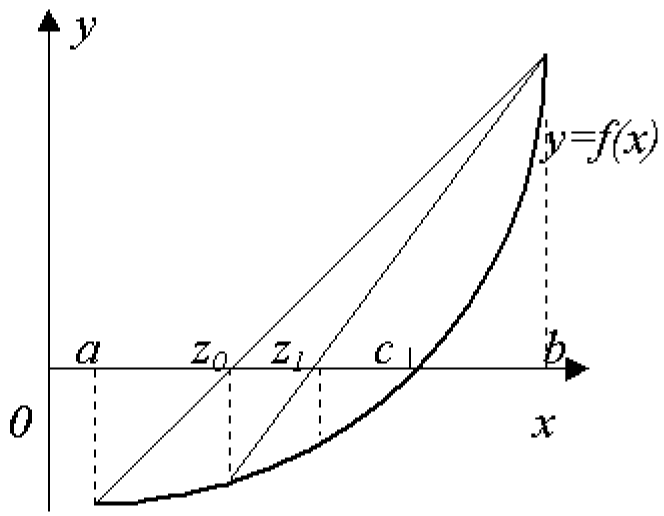


Рис. 3. Метод хорд

Можно доказать, что истинная погрешность найденного приближения:

$$\left|X^* - Z_n\right| \le \frac{M-m}{m}\left|Z_n - Z_{n-1}\right|$$

где X^* - корень уравнения, Z_n и Z_{n+1} - очередные приближения, m и M - наименьшее и наибольшее значения $f(x)$ на интервале $[a,b]$.

2.4. Уточнение корней методом касательных (Ньютона)

Обширную группу методов уточнения корня представляют *итерационные методы* - методы последовательных приближений. Здесь в отличие от метода дихотомии задается не начальный интервал местонахождения корня, а его начальное приближение.

Наиболее популярным из итерационных методов является *метод Ньютона (метод касательных)*. Пусть известно некоторое приближенное значение Z_n корня X^*. Применяя формулу Тейлора и ограничиваясь в ней двумя членами, имеем

$$f(X^*) \approx f(Z_n) + (X^*-Z_n)f'(Z_n) = 0,$$

откуда

$$X^* \approx Z_{n+1} = Z_n - \frac{f(Z_n)}{f'(Z_n)}.$$

Геометрически этот метод предлагает построить касательную к кривой $y=f(x)$ в выбранной точке $x=Z_n$, найти точку пересечения её с осью абсцисс и принять эту точку за очередное приближение к корню (рис. 4).

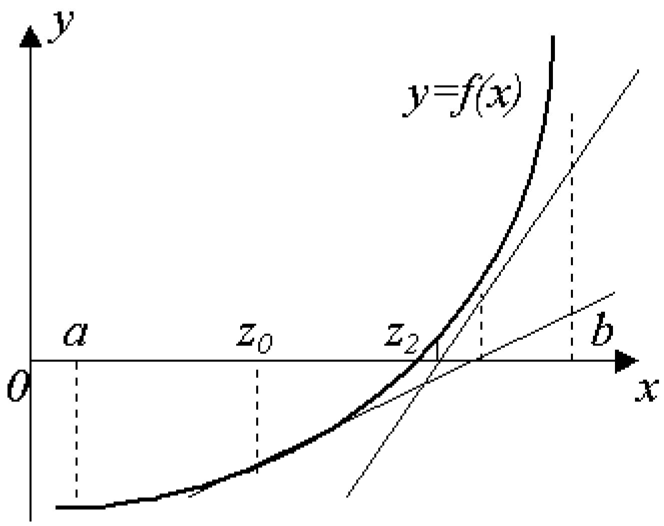


Рис. 4. Метод касательных

Очевидно, что этот метод обеспечивает сходящийся процесс приближений лишь при выполнении некоторых условий (например, при непрерывности и знакопостоянстве первой и второй производной функции в окрестности корня) и при их нарушении либо дает расходящийся процесс (рис. 5), либо приводит к другому корню (рис. 6).

Очевидно, что для функций, производная от которых в окрестности корня близка к нулю, использовать метод Ньютона едва ли разумно. Если производная функции мало изменяется в окрестности корня, то можно использовать видоизменение метода

$$Z_{n+1} = Z_n - \frac{f(Z_n)}{f'(Z_0)}, \ n=0,1,2,...$$

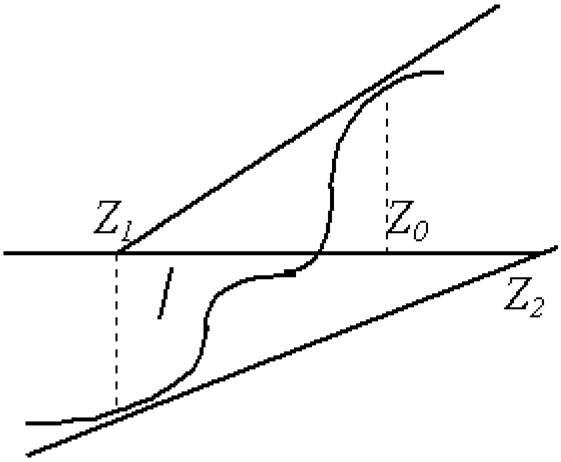


Рис. 5. Расходящийся процесс

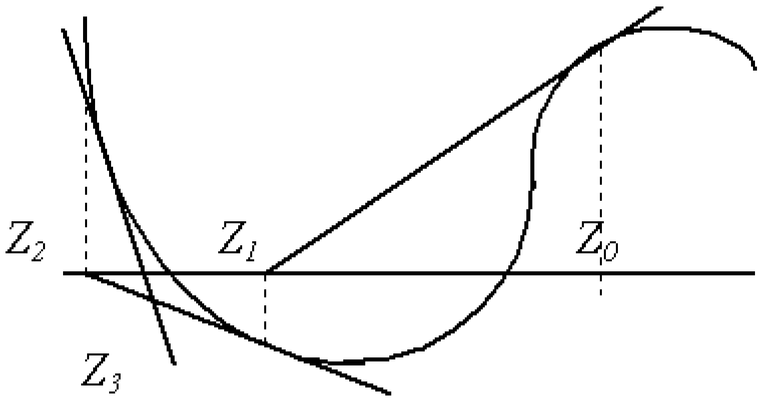


Рис. 6. Приближение к другому корню

Существуют и другие модификации метода Ньютона.

2.5. Уточнение корней методом простой итерации

Другим представителем итерационных методов является *метод простой итерации*. Здесь уравнение $f(x)=0$ заменяется равносильным уравнением $x=\varphi(x)$ и строится последовательность значений

$$X_{n+1} = \varphi(X_n), \ n=0,1,2,...$$

Если функция $\varphi(x)$ определена и дифференцируема на некотором интервале, причем $|\varphi'(x)|<1$, то эта последовательность сходится к корню уравнения $x=\varphi(x)$ на этом интервале. Геометрическая интерпретация процесса представлена на рис. 7. Здесь первые два рисунка (а, б) демонстрируют одностороннее и двустороннее приближение к корню, третий же (в) выступает иллюстрацией расходящегося процесса ($|\varphi'(x)| > 1$).

Если $f'(x)>0$, то подбор равносильного уравнения можно свести к замене $x=x-\lambda \bullet f(x)$, т.е. к выбору $\varphi(x)=x-\lambda \bullet f(x)$, где $\lambda>0$ подбирается так, чтобы в окрестности корня $0<\varphi'(x)=1-\lambda \bullet f'(x)\leq 1$. Отсюда может быть построен итерационный процесс

$$X_{n+1} = X_n - \frac{f(X_n)}{M}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

где $M \geq max|f'(x)|$ (в случае $f'(x)<0$ возьмите функцию $f(x)$ с противоположным знаком).

Возьмем для примера уравнение $x^3 + x - 1000 = 0$. Очевидно, что корень данного уравнения несколько меньше 10. Если переписать это уравнение в виде $x = 1000 - x^3$ и начать итерационный процесс при $x_0=10$, то из первых же приближений очевидна его расходимость. Если же учесть $f'(x)=3x^2+1>0$ и принять за приближенное значение максимума $f'(x)$ $M=300$, то можно построить сходящийся итерационный процесс на основе представления

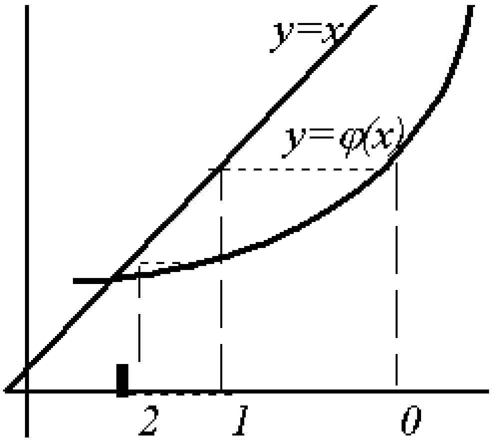
$$X = X - \frac{X^3 + X - 1000}{300}$$

Можно и искусственно подобрать подходящую форму уравнения, например:

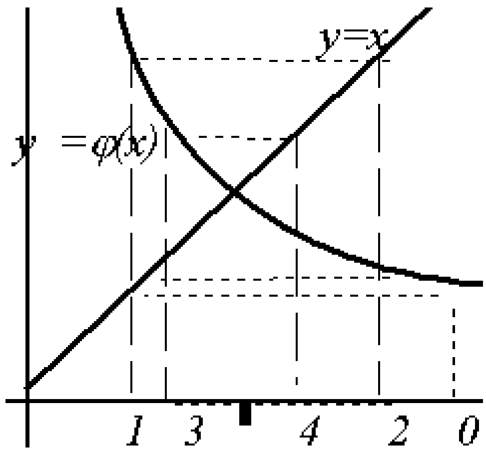
$$X = \sqrt[3]{1000 - X}$$

или

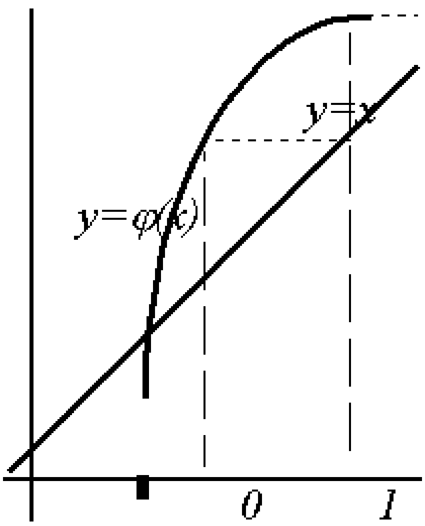
$$X = \frac{1000}{X^2} - \frac{1}{X}$$



а)



б)



в)

Рис. 7. Геометрическая интерпретация метода простой итерации

Заметим, что существуют и другие методы (наискорейшего спуска, Эйткена-Стеффенсена, Вегстейна, Рыбакова и т.д.) уточнения корней, обладающие высокой скоростью сходимости.

3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ EXCEL В ПОИСКЕ КОРНЕЙ

3.1. Циклические ссылки

Если в ячейку Excel введена формула, содержащая ссылку на эту же самую ячейку (может быть и не напрямую, а опосредованно - через цепочку других ссылок), то говорят, что имеет место циклическая ссылка (цикл). На практике к циклическим ссылкам прибегают [2], когда речь идет о реализации итерационного процесса и вычислениях по рекуррентным соотношениям. В обычном режиме Excel обнаруживает цикл и выдает сообщение о возникшей ситуации, требуя её устранения. Excel не может провести вычисления, так как циклические ссылки порождают бесконечное количество вычислений. Есть два выхода из этой ситуации: устранить циклические ссылки или допустить вычисления по формулам с циклическими ссылками (в последнем случае число повторений цикла должно быть конечным).

Рассмотрим задачу нахождения корня уравнения методом Ньютона с использованием циклических ссылок [3]. Возьмем для примера квадратное уравнение: $x^2 - 5x + 6 = 0$, графическое представление которого приведено на рис. 8. Найти корень этого (и любого другого) уравнения можно, используя всего одну ячейку Excel.

Для включения режима циклических вычислений в *меню Сервис/Параметры/вкладка Вычисления* включаем флажок *Итерации*, при необходимости изменяем число повторений цикла в поле *Предельное число итераций* и точность вычислений в поле *Относительная погрешность* (по умолчанию их значения равны 100 и 0,0001 соответственно). Кроме этих установок выбираем вариант ведения вычислений: *автоматически* или *вручную*. При *автоматическом* вычислении Excel выдает сразу конечный результат. При вычислениях, производимых *вручную*, можно наблюдать результат каждой итерации.

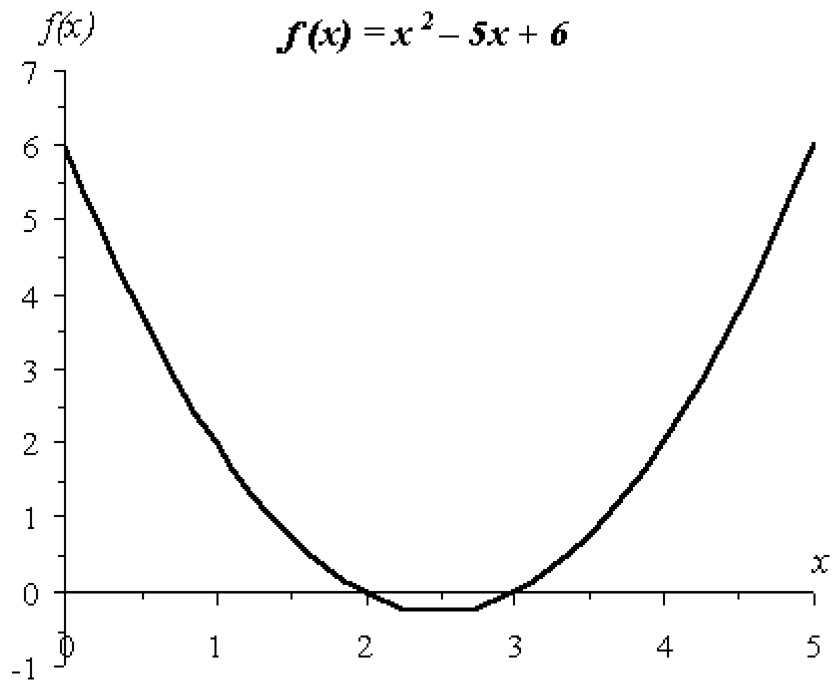


Рис. 8. График функции

Выберем произвольную ячейку, присвоим ей новое имя, скажем - *X*, и введем в нее рекуррентную формулу, задающую вычисления по методу Ньютона:

$$= X - \frac{F\,(X)}{F1\,(X)}$$

где *F* и *F1* задают соответственно выражения для вычисления значений функции и ее производной. Для нашего квадратного уравнения после ввода формулы в ячейке появится значение *2*, соответствующее одному из корней уравнения. В нашем случае начальное приближение не задавалось, итерационный вычислительный процесс начинался со значения, по умолчанию хранимого в ячейке *X* и равного нулю. А как получить второй корень? Обычно это можно сделать изменением начального приближения. Решать проблему задания начальных установок в каждом случае можно по-разному. Продемонстрируем один прием, основанный на использовании функции ЕСЛИ. С целью повышения наглядности вычислений ячейкам были присвоены содержательные имена (рис. 9):

- в ячейку *Хнач* (B4) заносим начальное приближение – 5;
- в ячейку *Хтекущ* (C4) записываем формулу:

=ЕСЛИ(Хтекущ=0;Хнач;Хтекущ-(Хтекущ^2-5*Хтекущ+6)/(2*Хтекущ-5))

- в ячейку D4 помещаем формулу, задающую вычисление значения функции в точке *Хтекущ*, что позволит следить за процессом решения;
- заметим, что на первом шаге вычислений в ячейку *Хтекущ* будет помещено начальное значение, а затем уже начнется счет по формуле на последующих шагах;
- чтобы сменить начальное приближение, недостаточно изменить содержимое ячейки *Хнач* и запустить процесс вычислений. В этом случае вычисления будут продолжены, начиная с последнего вычисленного значения. Чтобы обнулить значение, хранящееся в ячейке *Хтекущ*, нужно заново записать туда формулу. Для этого достаточно для редактирования выбрать ячейку, содержащую формулу, дважды щелкнув мышью на ней (при этом содержимое ячейки отобразится в строке формул). Щелчок по кнопке (нажатие клавиши) *Enter* запустит вычисления с новым начальным приближением.

	B	C	D	E
3	$X_{нач}$	$X_{текущ}$	$F(X_{текущ})$	
4	*5*	*3*	*0*	

Рис. 9. Определение начальных установок

3.2. Подбор параметра

Когда желаемый результат вычислений по формуле известен, но неизвестны значения, необходимые для получения этого результата, можно воспользоваться средством *Подбор параметра*, выбрав команду *Подбор параметра* в меню *Сервис*. При подборе параметра Excel изменяет значение в одной конкретной ячейке до тех пор, пока вычисления по формуле, ссылающейся на эту ячейку, не дадут нужного результата.

Возьмем в качестве примера все то же квадратное уравнение $x^2-5x+6=0$. Для нахождения корней уравнения выполним следующие действия:

- в ячейку С3 (рис. 10) введем формулу для вычисления значения функции, стоящей в уравнении слева от знака равенства. В качестве аргумента используем ссылку на ячейку С2, т.е.

=С2^2-5*С2+6

- в окне диалога *Подбор параметра* в поле *Установить в ячейке* введём ссылку на ячейку с формулой, в поле *Значение* запишем ожидаемый результат, а в поле *Изменяя значения ячейки* - ссылку на ячейку, в которой будет храниться значение подбираемого параметра (содержимое этой ячейки не может быть формулой);
- после нажатия на кнопку *Ok* Excel выведет окно диалога *Результат подбора параметра*. Если подобранное значение необходимо сохранить, то нажмите на *Ok*, и результат будет сохранен в ячейке, заданной ранее в поле *Изменяя значения ячейки*. Для восстановления значения, которое было в ячейке С2 до использования команды *Подбор параметра*, нажмите кнопку *Отмена*.

При подборе параметра Excel использует итерационный (циклический) процесс. Количество итераций и точность устанавливаются в меню *Сервис/Параметры/вкладка Вычисления*. Если Excel выполняет сложную задачу подбора параметра, можно нажать кнопку *Пауза* в окне диалога *Результат подбора параметра* и прервать вычисление, а затем нажать кнопку *Шаг*, чтобы выполнить очередную итерацию и просмотреть результат. При решении задачи в пошаговом режиме появляется кнопка *Продолжить* - для возврата в обычный режим подбора параметра.

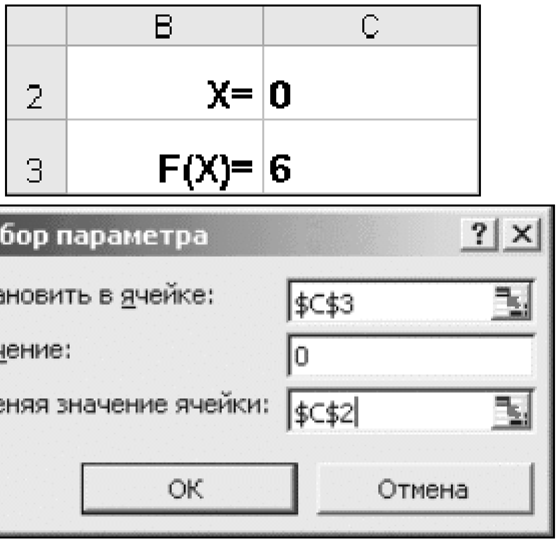


Рис. 10. Окно диалога «Подбор параметра»

Вернемся к примеру. Опять возникает вопрос: как получить второй корень? Как и в предыдущем случае необходимо задать начальное приближение. Это можно сделать следующим образом (рис. 11,а):

- в ячейку X (C2) вводим начальное приближение;
- в ячейку X_i(C3) вводим формулу для вычисления очередного приближения к корню, т.е.

  =X-(X^2-5*X+6)/(2*X-5)

- в ячейку C4 поместим формулу, задающую вычисление значения функции, стоящей в левой части исходного уравнения, в точке X_i;
- после этого выбираем команду *Подбор параметра*, где в качестве изменяемой ячейки принимаем ячейку C2. Результат вычислений изображен на рис. 11,б (в ячейке C2 содержится конечное значение, а в ячейке C3 - предыдущее).

	B	C
2	X=	5,0
3	Xi =	3,8
4	F(Xi)=	1,44

а)

	B	C
2	X=	3,0
3	Xi =	3,0000038
4	F(Xi)=	3,836E-06

б)

Рис. 11. Поиск второго корня

Однако все это можно сделать и несколько проще. Для того чтобы найти второй корень, достаточно в качестве начального приближения в ячейку С2 поместить константу *5* и после этого запустить процесс *Подбор параметра*.

3.3. Поиск решения

Команда *Подбор параметра* является удобной для решения задач поиска определенного целевого значения, зависящего от одного неизвестного параметра. Для более сложных задач следует использовать команду *Поиск решения* (*Решатель*), доступ к которой реализован через пункт меню *Сервис/Поиск решения*.

Задачи, которые можно решать с помощью *Поиска решения*, в общей постановке формулируются так:

найти $x_1, x_2, \ldots, x_n$
такие, что $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \{Max; Min; = Value\}$
при следующих ограничениях
$G(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \{\leq Value; \geq Value; = Value\}$

Искомые переменные - ячейки рабочего листа Excel - называются регулируемыми ячейками. Целевая функция $F(x_1, x_2, \dots , x_n)$, называемая иногда просто целью, должна задаваться в виде формулы в ячейке рабочего листа. Эта формула может содержать функции, определенные пользователем, и должна зависеть (ссылаться) от регулируемых ячеек. В момент постановки задачи определяется, что делать с целевой функцией. Возможен выбор одного из вариантов:

- найти максимум целевой функции $F(x_1, x_2, \dots , x_n)$;
- найти минимум целевой функции $F(x_1, x_2, \dots , x_n)$;
- добиться того, чтобы целевая функция $F(x_1, x_2, \dots , x_n)$ имела фиксированное значение: $F(x_1, x_2, \dots , x_n) = a$.

Функции $G(x_1, x_2, \dots , x_n)$ называются ограничениями. Их можно задать как в виде равенств, так и неравенств. На регулируемые ячейки можно наложить дополнительные ограничения: неотрицательности и/или целочисленности - тогда искомое решение ищется в области положительных и/или целых чисел.

Под эту постановку попадает самый широкий круг задач оптимизации (в том числе решение различных уравнений и систем уравнений), а также задачи линейного и нелинейного программирования. Такие задачи обычно проще сформулировать, чем решать. И тогда для решения конкретной оптимизационной задачи требуется специально для нее сконструированный метод. *Решатель* имеет в своем арсенале мощные средства решения подобных задач: метод обобщенного градиента, симплекс-метод, метод ветвей и границ.

Выше для нахождения корней квадратного уравнения был применен метод Ньютона с использованием циклических ссылок и средство *Подбор параметра*. Рассмотрим, как воспользоваться *Поиском решения* на примере того же квадратного уравнения. После открытия диалога *Поиск решения* (рис. 12) необходимо выполнить следующие действия:

- в поле *Установить целевую ячейку* ввести адрес ячейки, содержащей формулу для вычисления значений оптимизируемой функции (в нашем примере целевая ячейка - это С4, а формула в ней имеет вид:

= С3^2 - 5*С3 + 6

- для максимизации значения целевой ячейки, установить переключатель *максимальному значению* в соответствующее положение (для минимизации используется переключатель *минимальному значению)*;
- в поле *Изменяя ячейки* ввести адреса изменяемых ячеек, т.е. аргументов целевой функции (С3), разделяя их знаком ";" (или щелкая мышью при нажатой клавише *Ctrl* на соответствующих ячейках) - для автоматического поиска всех влияющих на решение ячеек используется кнопка *Предположить*;
- в поле *Ограничения* с помощью кнопки *Добавить* ввести все ограничения, которым должен отвечать результат поиска - для нашего примера ограничений задавать не нужно;
- для запуска процесса поиска решения нажать кнопку *Выполнить*.

Для сохранения полученного решения необходимо использовать переключатель *Сохранить найденное решение* в открывшемся окне диалога *Результаты поиска решения*. После чего рабочий лист примет вид, представленный на рис. 13.

Полученное решение зависит от выбора начального приближения, которое задается в ячейке С4 (аргумент функции). Если в качестве начального приближения в ячейку С4 ввести значение, равное *1.0*, то с помощью *Поиска решения* найдем второй корень, равный *2.0*. Опции, управляющие работой *Поиска решения*, задаваемые в окне *Параметры* (окно появляется, если нажать на кнопку *Параметры* окна *Поиск решения*), представлены на рис. 14.

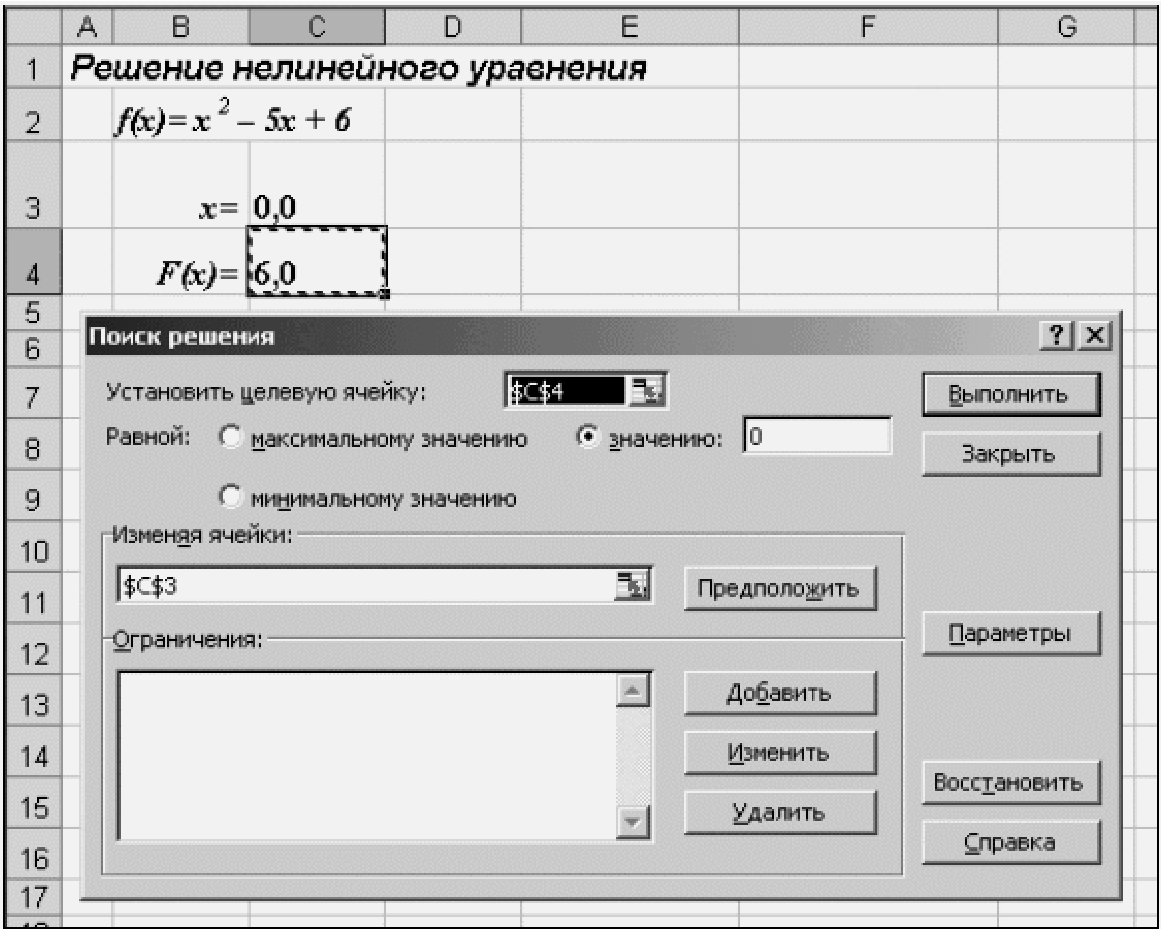


Рис. 12. Окно диалога «Поиск решения»

Рис. 13. Результаты поиска

4. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

4.1. В соответствии со своим вариантом найти корень нелинейного уравнения $f_1(x)=f_2(x)$ на заданном отрезке $[a,b]$ средствами Excel четырьмя возможными способами:

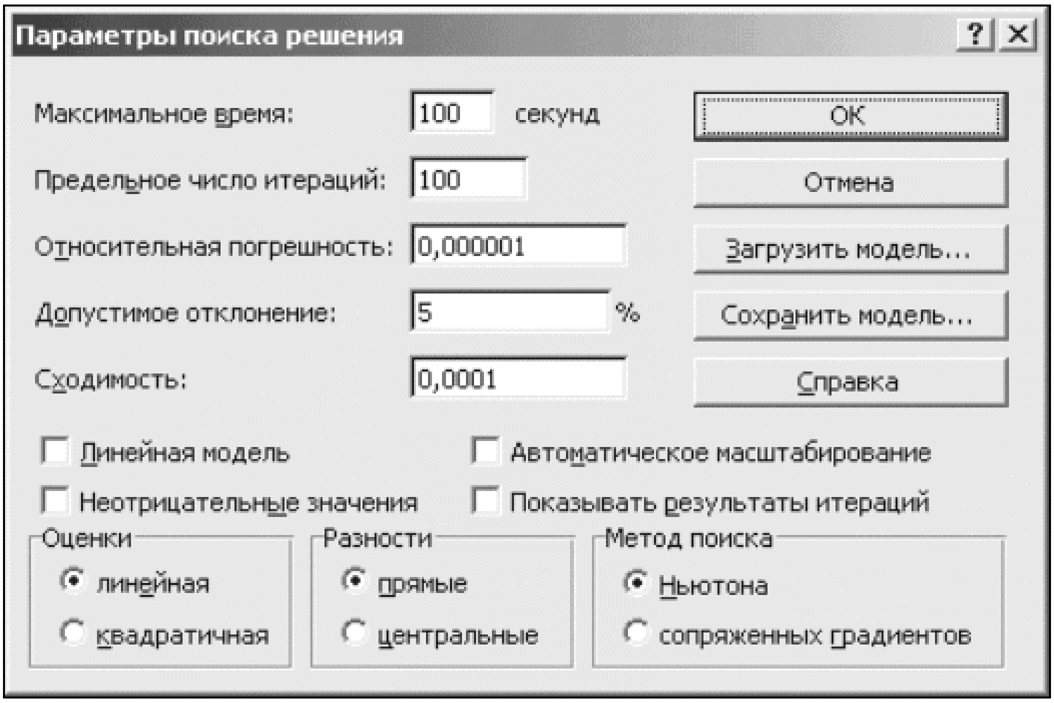


Рис. 14. Настройка параметров «Решателя»

1) методом касательных с использованием циклических ссылок;
2) методом простой итерации;
3) с помощью средства *Подбор параметра*;
4) используя возможности *Поиска решения* при ограничениях *корень* $\geq a$ и *корень* $\leq b$.

4.2. Разработать VBA-программу [4] поиска корня нелинейного уравнения $f_1(x)=f_2(x)$ на заданном отрезке $[a,b]$ с заданной точностью $\varepsilon=0.0001$, реализовав в виде подпрограмм следующие методы:

1) метод половинного деления
2) метод хорд;
3) метод касательных;
4) метод простой итерации.

4.3. Убедиться в наличии или отсутствии корней внутри предложенного в варианте отрезка и в сходимости итерационного процесса, получаемого при реализации выбранного метода (в *применимости* метода).

5. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЁТА

1) Исходное задание.
2) Экранная копии окон «Подбор параметра» и «Поиск решения» с введёнными исходными данными.
3) Страница Excel с результатами работы решающего блока и программы.
4) Текст программного кода на языке VBA.

6. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1) Описать алгоритм половинного деления.
2) В каких областях финансовых вычислений используются методы поиска корней уравнения?
3) Какие отчёты формирует надстройка «Поиск решения»?
4) Как на языке VBA программируются процедуры и функции?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Мотов, Владислав Васильевич. Word, Excel, PowerPoint [Текст] : учебное пособие / В.В. Мотов. - М.: ИНФРА-М, 2012. - 206 с.
2. Математические методы информатики в задачах и примерах. Опыт применения в проектировании сложных систем [Текст] : учебное пособие / под ред. Ю.П. Мухи, В.И. Сырямкина. - Томск: Изд-во Том. ун-та, 2012. - 484 с.