

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна  
Должность: проректор по учебной работе  
Дата подписания: 16.06.2023 12:36:12  
Уникальный программный ключ:  
0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1c11eabbf73e943df4a4851fda56d089

## МИНОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Юго-Западный государственный университет»  
(ЮЗГУ)

Кафедра нанотехнологий, микроэлектроники,  
общей и прикладной физики

УТВЕРЖДАЮ  
Проректор по учебной работе  
О.Г. Локтионова  
« 19 » 04 2021г.



Определение момента инерции катающегося шарика

Методическое указание к выполнению лабораторной  
работы № 8 по разделу «Механика и молекулярная физика» для  
студентов направления подготовки 02.03.03 Математическое  
обеспечение и администрирования информационных систем.

УДК 537

Составитель: А.Н. Лазарев, А.Г.Беседин

Рецензент

Кандидат физико-математических наук В.М.Пауков

Определение момента инерции катающегося шарика: методические указания к лабораторной работе № 8 по разделу «Механика и молекулярная физика» для студентов направления подготовки 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирования информационных систем. / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: А.Н. Лазарев, А.Г. Беседин - Курск, 2021. 9 с.: ил. 2, табл. 1. Библиогр.: 11 назв.

Содержат краткие теоретические сведения о динамике вращательного движения, описание установки и методику определения момента инерции шарика. Указывается порядок выполнения лабораторной работы.

Предназначены для студентов направления подготовки 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирования информационных систем, а также студентов технических специальностей.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . Формат 60 x 84 1/16.

Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж экз. Заказ . Бесплатно. *АБЗ*

Юго-Западный государственный университет.

305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94.



## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 8

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ КАТАЮЩЕГОСЯ ШАРИКА

**ЦЕЛЬ РАБОТЫ:** определить момент инерции шарика? катающегося по вогнутой сферической поверхности и исследовать зависимость момента инерции от радиуса шарика.

**ПРИБОРЫ И ОБОРУДОВАНИЕ:** вогнутая сферическая поверхность, шарики, секундомер, микрометр, штангенциркуль, линейка.

**КРАТКАЯ ТЕОРИЯ.** Момент инерции материальной точки это скалярная физическая величина, характеризующая инертные свойства при вращении и равная произведению массы материальной точки на квадрат расстояния до оси вращения. Момент инерции тела зависит от его массы и от распределения массы относительно оси вращения. Например, момент инерции диска относительно оси проходящей через его центр перпендикулярно его плоскости, в два раза меньше чем у обруча, при их одинаковой массе и радиусе.

Вычислим момент инерции диска массой  $m$  и радиусом  $R$  относительно оси проходящей через его центр перпендикулярно плоскости диска.

Выделим внутри диска кольцо радиусом  $r$ , бесконечно малой толщины  $dr$ . Тогда масса этого кольца будет  $dm = \rho 2\pi r h dr$ , а момент инерции  $dJ = dmr^2$ . При таком выборе кольца все его части одинаково удалены от оси вращения. Момент инерции всего кольца равен:

$$\begin{aligned}
 J &= \int_0^R 2\pi\rho h r^3 dr = 2\pi\rho h \int_0^R r^3 dr = 2\pi\rho h \left. \frac{r^4}{4} \right|_0^R = \\
 &= \frac{2\pi\rho h}{4} (R^4 - 0) = \frac{2\pi\rho h R^4}{2} = \frac{\rho\pi R^2 h R^2}{2} = \frac{\rho V R^2}{2} = \frac{m R^2}{2}
 \end{aligned}$$

Это непосредственное вычисление момента инерции тела. Чтобы вычислить таким же способом момент инерции шара придется интегрировать по объему шара, вычислять тройной интеграл.

В работе предлагается другой способ вычисления момента инерции катающегося шарика. Для этого нужно определить период колебания  $T$  шарика, катающегося по гладкой вогнутой сферической поверхности радиусом  $R$ , много большим радиуса шарика  $r$ .

Если пренебречь потерями энергии, затрачиваемой на преодоление диссипативной силы трения, то для катающегося без проскальзывания шарика, должен выполняться закон сохранения механической энергии. Центр масс шарика движется поступательно, а шарик вращается относительно оси,

проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости рисунка (рис.1).

Поэтому полная механическая энергия  $E$  шарика складывается из трех частей: потенциальной -  $mgh$ , кинетической энергии поступательного

движения -  $\frac{mV_c^2}{2}$  и кинетической энергии вращательного движения.

Закон сохранения полной механической энергии замкнутой системы шарик-поверхность имеет вид:

$$E = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{J_c \omega^2}{2} + mgh = const. \quad (1)$$

Здесь  $m$  - масса шарика;  $J_c$  — его момент инерции относительно оси  $Z$ ;  $r$  - радиус шарика.

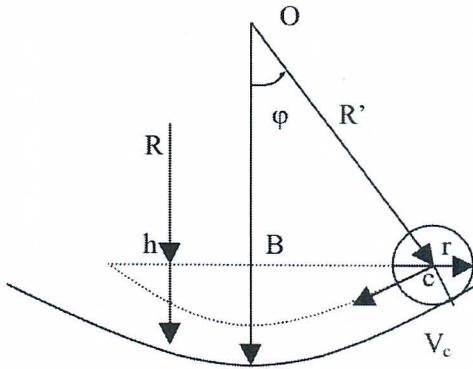


Рис. 1

Модуль угловой скорости  $\vec{\omega}$  вращения шарика вокруг оси  $Z$ , связан с модулем скорости  $\vec{V}_c$  поступательного движения центра масс соотношением:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{V_c}{r}. \quad (2)$$

Используя соотношения:  $V_c = \omega \cdot r$ ,  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ ,  $J = \frac{2}{5}mr^2$  преобразуем (1)

к виду

$$E = \frac{7}{10}mr^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + mgh = const. \quad (3)$$

При качении шарика по сферической поверхности, его центр масс отклоняется относительно центра  $O$  поверхности на угол  $\varphi$ . Из рисунка (1) видно, что угол  $\varphi$  связан с углом поворота  $\theta$  шарика относительно оси  $Z$  соотношением

$$\theta = \frac{R'}{r}\varphi, \quad (4)$$

где  $R' = R - r$ .

Высота подъёма  $h$  шарика относительно центра сферической поверхности определяется соотношением

$$h = R' - R' \cos \varphi. \quad (5)$$

Подставляя (4) и (5) в формулу (3), выражаем полную механическую



энергию шарика через угол  $\varphi$ :

$$E = \frac{7}{10} m(R')^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + mgR'(1 - \cos \varphi) = \text{const.} \quad (6)$$

Пренебрегая потерями энергии, и, зная, что производная от постоянной величины равна нулю, получаем уравнение:

$$\frac{7}{2} J \frac{R'}{r^2} \frac{d^2\varphi}{dt^2} + md \sin \varphi = 0 \quad (7)$$

или

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{2 mgr^2}{7 JR'} \sin \varphi = 0. \quad (8)$$

Сравнивая последнее уравнение с уравнением гармонических колебаний

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2 \varphi = 0.$$

заключаем, что колебания шарика будут гармоническими при условии малых углов отклонения его от центра вогнутой сферической поверхности

$$\sin \varphi = \varphi,$$

а циклическая частота колебаний равна:

$$\omega^2 = \frac{2 mgr^2}{7 JR'} = \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2. \quad (9)$$

Выражая из последнего равенства момент инерции  $J$ , получим

$$J = \frac{gT^2 mr^2}{14\pi^2 R'} \quad (10)$$

Массу шарика выражаем через его радиус и плотность

$$m = \rho V = \rho \frac{4}{3} \pi r^3,$$

и получаем окончательную расчетную формулу:

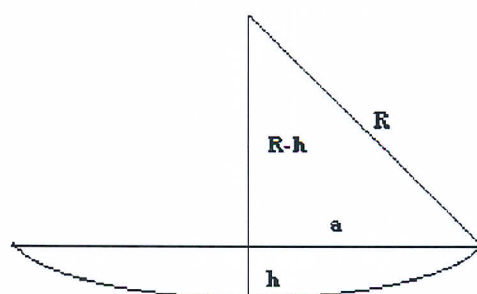
$$J = \frac{2gT^2 r^5 \rho}{21\pi(R-r)}. \quad (11)$$

Зная плотность стали  $\rho$ , ускорение свободного падения  $g$ , постоянную  $\pi$ , и, измерив радиус шарика  $r$ , период его колебаний  $T$ , и радиус сферической поверхности  $R$ , мы можем определить момент инерции шарика.

Радиус кривизны вогнутой сферической поверхности можно определить, измеряя с помощью штангенциркуля и линейки величины  $a$ ,  $R$ ,  $h$  приведенные на рис. 2. или воспользоваться данными на стенде.

$$\begin{aligned} R^2 &= (R-h)^2 + \\ R^2 &= R^2 - 2Rh + \\ 2Rh &= h^2 + a^2; \end{aligned}$$

$$R = \frac{h^2 + a^2}{2h};$$



$$\begin{aligned} &a^2; \\ &h^2 + a^2; \end{aligned}$$

Рис. 2

$$R = \frac{h}{2} + \frac{a^2}{2h}.$$

ЗАДАНИЕ. Исследовать зависимость момента инерции шарика от его радиуса.

### ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Измерить трижды величины  $a$  и  $h$  и определить радиус кривизны вогнутой поверхности  $R$ .
  2. С помощью микрометра или штангенциркуля измерить диаметры шариков  $d$  и вычислить их радиусы.
  3. Положить шарик на сферическую поверхность, вывести из положения равновесия, определить время 5-10 (по указанию преподавателя) полных колебаний шарика. Время измерять не менее трёх раз. Определить период колебаний шарика  $T_i = \frac{\langle t \rangle}{n}$ . Занести данные в таблицу 1.
  4. Подставить значения радиуса шарика  $r$ , периода колебаний  $T$ , радиуса кривизны поверхности  $\langle R \rangle$ , и подставляя их в расчетную формулу (11), определить момент инерции шарика. Плотность материала шарика -  $\rho$  - взять равной плотности стали:  $7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ .
  5. Опыт повторить для 5 шариков различных радиусов и построить график зависимости момента инерции шарика от его радиуса  $J=f(r)$ .
  6. Найти относительную погрешность и доверительный интервал определения момента инерции шарика.
  7. Рассчитать момент инерции шарика по формуле  $J=2/5mr^2$ . Сравнить результаты полученные двумя способами.
1. Данные измерений и расчетов занести в табл. 1.
  2. Записать вывод о характере зависимости момента инерции шарика от его радиуса  $J = f(r)$ .

Таблица. 1.

n	t, с	t, с	T, с	$\Delta T$ , с	r, м	$\Delta r$ , м	$J_1$ кг.м <sup>2</sup>	$J_2$ кг.м <sup>2</sup>	$\varepsilon$ , %

### ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Из каких составляющих складываются полная механическая энергия шарика ?



2. Когда не выполняется закон сохранения механической энергии?
3. Как движется центр масс шарика?
4. Как направлены скорость и ускорение центра масс шарика?
5. Укажите, когда центр масс шарика будет иметь:
  - а) максимальное угловое ускорение;
  - б) максимальную линейную скорость;
  - в) тангенциальное ускорение равно нулю;
  - г) нормальное ускорение равно нулю;
  - д) угловое ускорение равно нулю.
6. Какой вид имеет динамическое уравнение колебаний шарика? Объясните его смысл.
7. Сформулируйте условие, при котором колебания будут гармоническими.
8. Почему угол отклонения шарика  $\rho$  от положения равновесия в данной работе должен быть мал и как это предусмотрено в работе?
9. Сравните периоды колебаний разных шариков и объясните наблюдаемую закономерность.
10. Выведите формулу для расчета момента инерции шарика относительно оси не проходящей через его центр.

## Список рекомендуемой литературы

### Основной

1. Савельев, И. В. Курс физики : учебное пособие. // И. В. Савельев. – 3-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2007. Т. 2: Электричество. Колебания и волны. Волновая оптика. – 480 с. – Текст: непосредственный.
2. Трофимова, Т. И. Курс физики : учебное пособие / Т. И. Трофимова. - 21-е изд., стер. - Москва: Академия, 2015. - 560 с. – Текст: непосредственный.
3. Курбачев, Ю. Ф. Физика: [ Электронный ресурс]: учебное пособие / Ю. Ф. Курбачев. - Москва: Евразийский открытый институт, 2011. - 216 с. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=90773>. – Текст: электронный.
4. Барсуков, В. И. Физика: постоянный ток, электромагнетизм, волновая оптика: учебное пособие / В.И. Барсуков, О.С. Дмитриев, В.Е. Иванов, Ю.П. Ляшенко; Тамбовский государственный технический университет. – Тамбов:

- Тамбовский государственный технический университет (ТГТУ), 2014. – 104 с. - Режим доступа: по подписке. - URL: [https://biblioclub.ru/index.php?page=book\\_red&id=277918](https://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=277918). – Текст: электронный.
5. Кузнецов С.И. Курс лекций по физике. Электростатика. Постоянный ток. Электромагнетизм. Колебания и волны [Электронный ресурс]: учебное пособие / С.И.Кузнецов, Л.И.Семкина, К.И.Рогозин - Томск: Издательство Томского политехнического университета, 2016. - 290 с. ISBN 978-5-4387-0562-8
  6. URL: [//biblioclub.ru/index.php?page=book&id=442116](https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=442116) (22.03.2017).
  7. Краткий курс общей физики [Электронный ресурс]: учебное пособие / И.А.Старостина, [и др] - Казань : Издательство КНИТУ, 2014. - 377 с. ISBN 978-5-7882-1691-1
  8. URL: [//biblioclub.ru/index.php?page=book&id=428788](https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=428788) (22.03.2017).
  9. Физика [Текст]: учебник / В. Б. Федосеев. - Ростов н/Д.: Феникс, 2009. - 669 с. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-222-149 83-6: 320.00 р
  10. Курс общей физики [Текст]: учебное пособие: в 3 т. / И. В. Савельев. - 3-е изд., испр. - М.: Наука, 1988 - .Т. 2: Электричество и магнетизм. Оптика. - 496 с. : ил. - Б. ц.
  11. Курс физики [Текст]: учебное пособие для вузов/ Т. И. Трофимова. - 7-е изд., стер. - М.: Высшая школа, 2002. - 542 с.: ил. - ISBN 5-06-003634-0: 139.00 р.

#### **Дополнительный**

1. Любая С.И. Физика: курс лекций [Электронный ресурс]. / С.И.Любая - Ставрополь: Ставропольский государственный аграрный университет, 2015. - 141 с.  
URL: [//biblioclub.ru/index.php?page=book&id=438720](https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=438720) (22.03.2017).
2. Пономарева В.А. Электричество и магнетизм: курс лекций [Электронный ресурс]/ В.А.Пономарева, В.А.Кузьмичева - М.: Алтайр: МГАВТ, 2007. - 117 с.  
URL: [//biblioclub.ru/index.php?page=book&id=430261](https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=430261) (22.03.2017).
3. Шапиро С.В. Курс физики [Электронный ресурс]: учебное



пособие/ С.В.Шапиро - Уфа: Уфимский государственный университет экономики и сервиса, 2013. - 248 с. ISBN 978-5-88469-613-6

URL: [//biblioclub.ru/index.php?page=book&id=445140](http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=445140) (22.03.2017).