

Содержание

1. Эвристический подход к выбору вариантов. Метод СМАРТ (лабораторная работа).....	4
2. Иерархический подход к выбору вариантов. Метод АНР (лабораторная работа).....	8
1. Пороговый подход к выбору вариантов. Метод ЭЛЕКТРА (лабораторная работа).....	18

1 Эвристический подход к выбору вариантов. Метод SMART

Цель работы: изучить эвристический метод рационального выбора вариантов SMART.

Теоретическая часть

Эвристический метод SMART (SMART – Simple Multi-Attribute Rating Technique, способ многомерного упорядочения) основан на использовании взвешенной суммы частных ценностей и включает следующие этапы:

1. Формируется перечень A_1, \dots, A_m всех возможных вариантов выбора и задается набор критериев для их оценивания K_1, \dots, K_n , которые имеют одинаковую балльную шкалу в пределах от 1 до 5 (до 10, до 100).

2. ЛПР упорядочивает все критерии K_1, \dots, K_n по важности и указывает значимость s_q каждого критерия K_q в баллах. Максимальный балл получает самый важный критерий, а остальные критерии – меньшие баллы в зависимости от их важности.

3. Вычисляется вес q -го критерия K_q по формуле:

$$\omega_q = s_q / \sum_{j=1}^n s_j \quad (1.1)$$

4. ЛПР оценивает частные ценности $v_q(A_i)$ каждого варианта A_i по каждому q -му критерию K_q , используя введенную балльную шкалу.

5. Вычисляется общая ценность $v(A_i)$ каждого варианта A_i как взвешенная сумма частных ценностей, определяемая формулой:

$$v(A_i) = \sum_{q=1}^n \omega_q v_q(A_i) \quad (1.2)$$

6. Варианты A_1, \dots, A_m упорядочиваются по значениям общей ценности $v(A_i)$. Вариант, имеющий наибольшую общую ценность $v(A_i)$, выбирается в качестве лучшего.

7. ЛПР оценивает чувствительность результата к изменениям весов отдельных критериев.

Метод SMART дает целостную оценку вариантам, прост при практическом применении. Проверка чувствительности общей ценности к изменениям весов позволяет оценивать влияние неточностей оценок. Во всех разновидностях метода не учитывается возможная зависимость между частными критериями и их неаддитивность.

Практическая часть

Пусть A_1, A_2, A_3 являются вариантами выбора квартир для проживания семьи. Основные критерии для поиска: *цена, жилая площадь, количество комнат, близость к работе, категория дома.*

Требуется найти общие ценности и выбрать лучший вариант квартиры для семьи.

Решение

1. Формулируем перечень всех возможных вариантов решения проблемы и задаем набор критериев их оценки:

A_1 – выбор квартиры 1;

A_2 – выбор квартиры 2;

A_3 – выбор квартиры 3;

A_4 – выбор квартиры 4.

K_1 – цена;

K_2 – жилая площадь;

K_3 – количество комнат;

K_4 – близость к работе;

K_5 – категория дома.

2. Укажем значимость каждого критерия:

$$s_1 = 5;$$

$$s_2 = 4;$$

$$s_3 = 3;$$

$$s_4 = 3;$$

$$s_5 = 1.$$

3. Вычислим вес каждого критерия по формуле (1.1):

$$\omega_1 = 5 / 16 = 0,3125;$$

$$\omega_2 = 4 / 16 = 0,25;$$

$$\omega_3 = 3 / 16 = 0,1875;$$

$$\omega_4 = 3 / 16 = 0,1875;$$

$$\omega_5 = 1 / 16 = 0,0625.$$

4. Зададим матрицу частных ценностей, используя бальную шкалу от 1 до 10.

Таблица 1.1 Матрица частных ценностей

	цена	жилая площадь	количество комнат	близость к работе	категория дома
Квартира 1	10	2	2	4	6
Квартира 2	4	6	6	2	4
Квартира 3	1	10	8	6	8
Квартира 4	7	3	5	8	4

5. Вычислим общую ценность каждой квартиры, как взвешенную сумму частных ценностей, определяемую формулой (1.2):

$$v(A_1) = 3,125 + 0,5 + 0,375 + 0,75 + 0,375 = 5,125;$$

$$v(A_2) = 1,25 + 1,5 + 1,125 + 0,375 + 0,25 = 4,5;$$

$$v(A_3) = 0,3125 + 2,5 + 1,5 + 1,125 + 0,5 = 5,9375;$$

$$v(A_4) = 2,1875 + 0,75 + 0,9375 + 1,5 + 0,25 = 5,625.$$

Занесем полученные результаты в таблицу.

Таблица 1.2 Вклад частных ценностей по каждому критерию в общую ценность

	цена	жилая площадь	количество комнат	близость к работе	категория дома	Общая ценность
Квартира 1	3,125	0,5	0,375	0,75	0,375	5,125
Квартира 2	1,25	1,5	1,125	0,375	0,25	4,5
Квартира 3	0,3125	2,5	1,5	1,125	0,5	5,9375
Квартира 4	2,1875	0,75	0,9375	1,5	0,25	5,625

Вычислим вес общей ценности для каждого варианта выбора (табл. 1.3).

Таблица 1.3 Вес вариантов общей ценности

	Общая ценность	Вес в процентах
Квартира 1	5,125	24,19%
Квартира 2	4,5	21,24%
Квартира 3	5,9375	28,02%
Квартира 4	5,625	26,55%

Лучшим вариантом выбора является A_3 («Квартира 3»), имеющий наибольшую общую ценность.

Вопросы для самопроверки

1. Понятие рационального выбора.
2. Задача рационального выбора.
3. Классификация задач рационального выбора.
4. Эвристический подход к выбору вариантов.
5. Вычисление общей ценности вариантов выбора.
6. Особенности эвристических методов.

2 Иерархический подход к выбору вариантов. Метод АНР

Цель работы: изучить иерархический метод рационального выбора вариантов АНР.

Теоретическая часть

Метод анализа иерархий (Analytic Hierarchy Process - АНР) применим для решения различных практических задач, где требуется упорядочить варианты, оцениваемые по многим количественным и качественным критериям.

Многоэтапная процедура метода анализа иерархий сводится к декомпозиции проблемы на составляющие части. Нижний уровень иерархической структуры представлен имеющимися вариантами достижения цели. Элементами средних уровней являются различные критерии, которые характеризуют цель и альтернативы. На верхнем уровне иерархии представлена цель, выражающая содержание проблемы.

Сравнительная оценка важности элементов иерархической структуры на каждом уровне иерархии по отношению к вышележащему уровню, основана на предпочтениях ЛПР.

Матрицы парных сравнений на всех уровнях иерархической структуры определяют относительную важность каждого из критериев оценки вариантов и частные ценности альтернатив.

Общая ценность каждого из вариантов выбора находится как взвешенная сумма частных ценностей путем их последовательной аддитивной свертки по всем уровням иерархии. Лучшему варианту соответствует наибольшая общая ценность.

Этапы метода

1. Выделение проблемы. Определение цели.
2. Выделение основных критериев и вариантов выбора (альтернатив).
3. Построение иерархии: дерево от цели через критерии к альтернативам (рис. 2.1).

4. Построение матрицы попарных сравнений критериев по цели и альтернатив по критериям.

5. Применение методики анализа полученных матриц.

6. Определение весов альтернатив по системе иерархии.

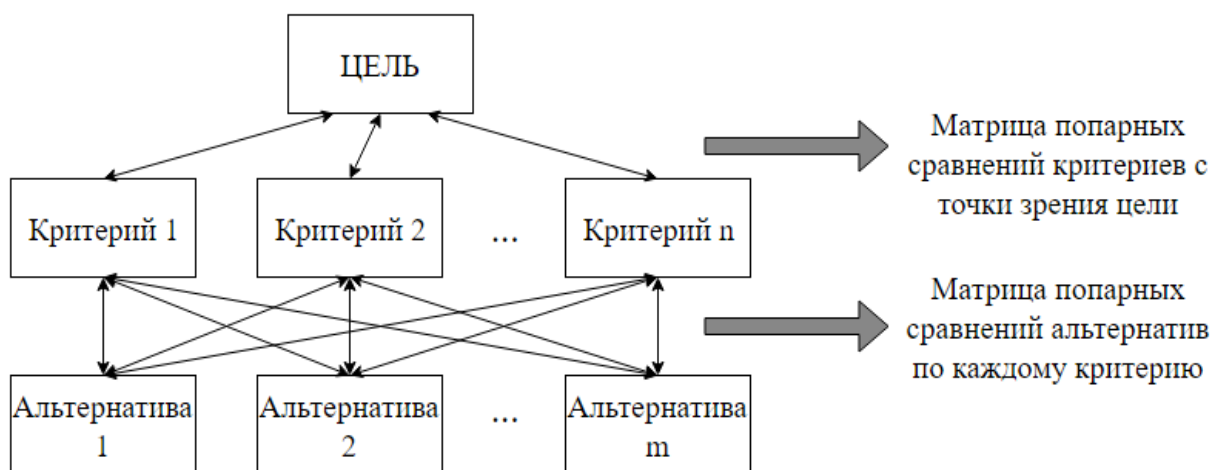


Рисунок 2.1 – Дерево критериев и альтернатив

На практике встречаются системы выбора решения с большим уровнем иерархий (4, 5, ...).

Практическая часть

Пусть A_1, A_2, A_3 являются вариантами выбора квартир для проживания семьи. Основные критерии для поиска: *цена, жилая площадь, количество комнат, близость к работе, категория дома*.

Требуется выбрать лучший вариант квартиры для семьи.

Решение

1. Формулируем перечень всех возможных вариантов решения проблемы:

A_1 – выбор квартиры 1;

A_2 – выбор квартиры 2;

A_3 – выбор квартиры 3.

2. Задаем набор критериев их оценки:

K_1 – цена;

- K_2 – жилая площадь;
 K_3 – количество комнат;
 K_4 – близость к работе;
 K_5 – категория дома.

3. Строим дерево критериев и альтернатив (рис. 2.2):

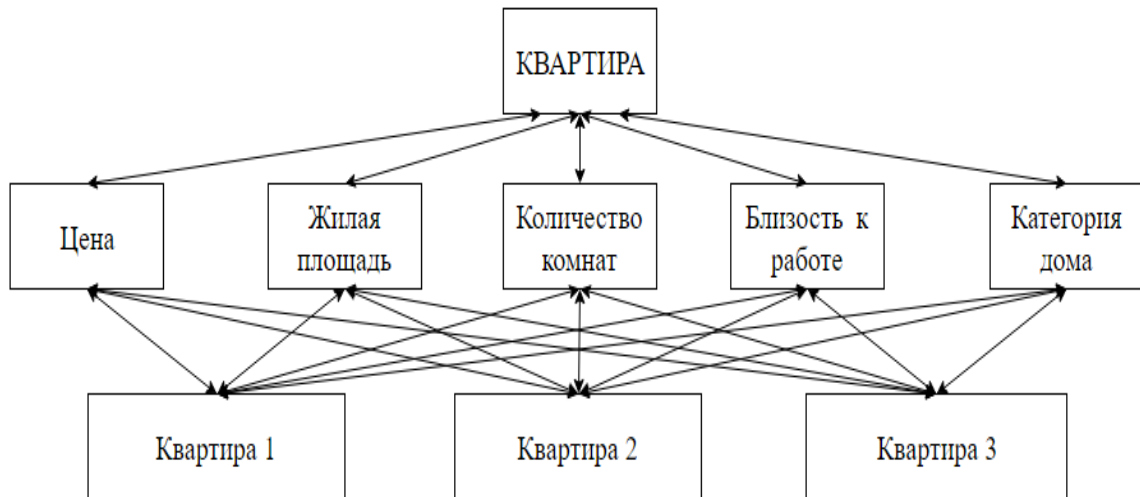


Рисунок 2.2 – Дерево критериев и альтернатив

4. Построим матрицы попарных сравнений:

4.1 Сравнение критериев.

Исходно попарное сравнение по качественной шкале, с последующим преобразованием в баллы:

- равно, безразлично = 1;
- немного лучше (хуже) = 3 (1/3);
- лучше (хуже) = 5 (1/5);
- значительно лучше (хуже) = 7 (1/7);
- принципиально лучше (хуже) = 9 (1/9).

При промежуточном мнении используются баллы 2, 4, 6, 8.

Составляем матрицу (a_{ij}) попарных сравнений критериев (табл. 2.1), где a_{ij} – отношение критерия i к критерию j ,

$$a_{ji} = 1/a_{ij}, \quad a_{ii} = 1 \quad (i=1, \dots, 5; j=1, \dots, 5).$$

Таблица 2.1 Попарное сравнение критериев

	цена	жилая площадь	количество комнат	близость к работе	категория дома
Цена	1	3	1	1/2	5
жилая площадь	1/3	1	1/4	1/7	2
количество комнат	1	4	1	1	6
близость к работе	2	7	1	1	8
категория дома	1/5	1/2	1/6	1/8	1

4.2 Сравнение альтернатив по критериям.

Составляем аналогичные матрицы сравнения вариантов выбора по каждому критерию (табл. 2.2-2.6).

Таблица 2.2 Попарное сравнение альтернатив по критерию K_1

цена	Квартира 1	Квартира 2	Квартира 3
Квартира 1	1	4	1/2
Квартира 2	1/4	1	1/5
Квартира 3	2	5	1

Таблица 2.3 Попарное сравнение альтернатив по критерию K_2

жилая площадь	Квартира 1	Квартира 2	Квартира 3
Квартира 1	1	1/2	3
Квартира 2	2	1	4
Квартира 3	1/3	1/4	1

Таблица 2.4 Попарное сравнение альтернатив по критерию K_3

количество комнат	Квартира 1	Квартира 2	Квартира 3
Квартира 1	1	1	2
Квартира 2	1	1	3
Квартира 3	1/2	1/3	1

Таблица 2.5 Попарное сравнение альтернатив по критерию K_4

близость к работе	Квартира 1	Квартира 2	Квартира 3
Квартира 1	1	1/3	4
Квартира 2	3	1	5
Квартира 3	1/4	1/5	1

Таблица 2.6 Попарное сравнение альтернатив по критерию K_5

категория дома	Квартира 1	Квартира 2	Квартира 3
Квартира 1	1	2	1/5
Квартира 2	1/2	1	1/6
Квартира 3	5	6	1

5. Методика анализа полученных матриц:

Проведем нормировку матрицы попарного сравнения критериев.

Находим сумму элементов каждого столбца:

$$S_j = a_{1j} + a_{2j} + \dots + a_{5j}, \quad (j=1, \dots, 5).$$

Делим элементы каждого столбца матрицы на соответствующую сумму:

$$b_{ij} = a_{ij}/S_j, \quad (i=1, \dots, 5; j=1, \dots, 5).$$

Результат представлен в таблице 2.7.

Таблица 2.7 Результат нормировки матрицы попарного сравнения критериев

	цена	жилая площадь	количество комнат	близость к работе	категория дома
цена	0,221	0,197	0,293	0,181	0,227
жилая площадь	0,073	0,066	0,073	0,052	0,091
количество комнат	0,221	0,263	0,293	0,361	0,273
близость к работе	0,441	0,461	0,293	0,361	0,364
категория дома	0,044	0,013	0,049	0,045	0,045

Находим среднее значение элементов каждой строки, полученной матрицы (табл. 2.8).

Таблица 2.8 Среднее значение

	цена	жилая площадь	количество комнат	близость к работе	категория дома	Среднее значение
цена	0,221	0,197	0,293	0,181	0,227	0,224
жилая площадь	0,073	0,066	0,073	0,052	0,091	0,071
количество комнат	0,221	0,263	0,293	0,361	0,273	0,282
близость к работе	0,441	0,461	0,293	0,361	0,364	0,384
категория дома	0,044	0,013	0,049	0,045	0,045	0,039

Полученный столбец задает «веса» критериев с точки зрения поставленной цели. Этот столбец называют весовым столбцом критериев по цели (табл. 2.9).

Таблица 2.9 Веса критериев

	Вес в долях	Вес в процентах
цена	0,224	22,4%
жилая площадь	0,071	7,1%
количество комнат	0,282	28,2%
близость к работе	0,384	38,4%
категория дома	0,039	3,9%

С точки зрения удовлетворения цели наиболее весомым является близость квартиры к месту работы (38,4%), далее следует количество комнат (28,2%), цена (22,4%). Жилая площадь и категория дома имеют наименьшие весовые коэффициенты, в сумме составляющие всего 11%.

Аналогично, получим весовые коэффициенты для матриц попарного сравнения альтернатив по критериям с точки зрения соответствия отдельным критериям (табл. 2.10-2.14).

Таблица 2.10 Веса альтернатив по критерию K_1

цена	Вес в долях	Вес в процентах
Квартира 1	0,334	33,4%
Квартира 2	0,098	9,8%
Квартира 3	0,568	56,8%

По критерию «цена» наиболее весомым является выбор «Квартира 3» (56,8%), далее следует «Квартира 1» (33,4%) и наименее интересен выбор «Квартира 2» (9,8%).

Таблица 2.11 Веса альтернатив по критерию K_2

жилая площадь	Вес в долях	Вес в процентах
Квартира 1	0,320	32%
Квартира 2	0,557	55,7%
Квартира 3	0,123	12,3%

По критерию «жилая площадь» наиболее весомым является выбор «Квартира 3» (55,7%).

Таблица 2.12 Веса альтернатив по критерию K_3

количество комнат	Вес в долях	Вес в процентах
Квартира 1	0,387	38,7%
Квартира 2	0,443	44,3%
Квартира 3	0,170	17%

По критерию «количество комнат» наиболее весомым является выбор «Квартира 2» (44,3%).

Таблица 2.13 Веса альтернатив по критерию K_4

близость к работе	Вес в долях	Вес в процентах
Квартира 1	0,284	28,4%
Квартира 2	0,619	61,9%
Квартира 3	0,096	9,6%

По критерию «близость к работе» наиболее весомым является выбор «Квартира 2» (61,9%).

Таблица 2.14 Веса альтернатив по критерию K_5

категория дома	Вес в долях	Вес в процентах
Квартира 1	0,174	17,4%
Квартира 2	0,103	10,3%
Квартира 3	0,723	72,3%

По критерию «категория дома» наиболее весомым является выбор «Квартира 3» (72,3%).

6. Сформируем матрицу весов альтернатив по каждому критерию.

Таблица 2.15 Матрица весов альтернатив по критериям

	цена	жилая площадь	количество комнат	близость к работе	категория дома
Квартира 1	0,334	0,320	0,387	0,284	0,174
Квартира 2	0,098	0,557	0,443	0,619	0,103
Квартира 3	0,568	0,123	0,170	0,096	0,723

Умножая полученную матрицу на матрицу-столбец «вес в долях» (табл. 2.9), получаем веса альтернатив с точки зрения достижения поставленной цели (табл. 2.16).

Таблица 2.16 Матрица весов альтернатив с точки зрения достижения поставленной цели

	Вес в долях	Вес в процентах
Квартира 1	0,323	32,3%
Квартира 2	0,428	42,8%
Квартира 3	0,249	24,9%

Таким образом, выбор варианта «Квартира 2» является лучшим для семьи.

Вопросы для самопроверки

7. Понятие рационального выбора.
8. Задача рационального выбора.
9. Классификация задач рационального выбора.
10. Иерархический подход к выбору вариантов.
11. Декомпозиция проблемы выбора.
12. Оценка важности элементов иерархической структуры.
13. Общая ценность вариантов выбора.
14. Особенности иерархических методов.

3. Пороговый подход к выбору вариантов. Метод ЭЛЕКТРА

Цель работы: изучить пороговый метод рационального выбора вариантов ЭЛЕКТРА.

Теоретическая часть

Суть порогового метода ЭЛЕКТРА (ELECTRE - ELimination Et Choix Traduisant la Realite, исключение и выбор, отражающие реальность) состоит в следующем.

Предполагается, что важность или значимость каждого критерия может быть охарактеризована некоторым числом $\omega_i (i=1, \dots, n)$ – весом (вес критерия назначается ЛПР и трактуется как число голосов жюри, поданных за этот критерий).

Множество номеров критериев $L=\{1, \dots, n\}$ разбивается на три подмножества:

L_+ – подмножество номеров критериев, для которых вариант A_i предпочтительнее варианта A_j ;

L_- – подмножество номеров критериев, для которых вариант A_j предпочтительнее варианта A_i ;

$L_=$ – подмножество номеров критериев, для которых варианты A_i и A_j равноценны.

Каждой паре вариантов A_i и A_j ставится в соответствие два показателя c_{ij} и d_{ij} .

Индекс согласия c_{ij} характеризует "превосходство" A_i над A_j и равен отношению суммы весов критериев с номерами из множества $L_+ \cup L_=$ к сумме весов всех критериев:

$$c_{ij} = \frac{\sum_{k \in L_+ \cup L_=} \omega_k}{\sum_{k=1}^n \omega_k}. \quad (3.1)$$

Индекс разногласия d_{ij} характеризует "превосходство" A_j над A_i и равен максимуму относительной разности значений по критериям с номерами из множества L_- :

$$d_{ij} = \max_{k \in L_-} \frac{(y_{jk} - y_{ik})}{M_k}, \quad (3.2)$$

где длина шкалы k -го критерия $M_k = \max_i y_{ik} - \min_i y_{ik}$.

Очевидно, что $0 \leq c_{ij} \leq 1$, $0 \leq d_{ij} \leq 1$.

Отношение предпочтения задается следующим образом: вариант A_i предпочтительнее варианта A_j , если $c_{ij} \geq c_0$ и $d_{ij} \leq d_0$, где c_0 , d_0 – заданные уровни согласия и разногласия. Эти числа задаются ЛПР. Если на основании указанного принципа нельзя отдать предпочтение ни варианту A_i , ни варианту A_j , то они признаются несравнимыми. При заданных значениях c_0 , d_0 производится исключение доминируемых вариантов, а оставшееся подмножество предъявляется для анализа ЛПР. ЛПР может изменить значения c_0 , d_0 и процедура выделения недоменируемых вариантов повторяется. Такая процедура продолжается до тех пор, пока не будет получено удовлетворительное (по количеству и составу) множество недоменируемых вариантов.

Практическая часть

Пусть A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 – предприятия, где предполагается модернизировать производство. Основные критерии оценки проектов реконструкции предприятий: *финансовая устойчивость предприятия, обоснованность предлагаемого плана модернизации, возможность неудачной реализации проекта, риск экологического ущерба, обеспеченность предприятия сырьем.*

Требуется упорядочить предприятия для выбора лучшего варианта инвестиций.

Решение

1. Формулируем перечень критериев оценки предприятий:

K_1 – финансовая устойчивость предприятия;

K_2 – обоснованность предлагаемого плана модернизации;

K_3 – возможность неудачной реализации проекта;

K_4 – риск экологического ущерба;

K_5 – обеспеченность предприятия сырьем.

2. Зададим матрицу оценок проектов по критериям (табл. 3.1).

Таблица 3.1 Матрица оценок проектов по критериям

Y	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
A_1	-15	90	0	40	100
A_2	130	100	0	0	0
A_3	-10	50	0	10	100
A_4	45	90	0	5	20
A_5	-15	100	0	20	40

3. Установим показатели важности критериев:

$$\varpi_1 = 1;$$

$$\varpi_2 = 1;$$

$$\varpi_3 = 1;$$

$$\varpi_4 = 1;$$

$$\varpi_5 = 1.$$

4. Построим таблицу конфигураций проектов (табл. 3.2).

Таблица 3.2 Конфигурации проектов

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
A_1, A_2	-	-	=	+	+
A_1, A_3	-	+	=	+	=
A_1, A_4	-	=	=	+	+
A_1, A_5	=	-	=	+	+
A_2, A_1	+	+	=	-	-
A_2, A_3	+	+	=	-	-
A_2, A_4	+	+	=	-	-
A_2, A_5	+	=	=	-	-
A_3, A_1	+	-	=	-	=
A_3, A_2	-	-	=	+	+
A_3, A_4	-	-	=	+	+

A_3, A_5	+	-	=	-	+
A_4, A_1	+	=	=	-	-
A_4, A_2	-	-	=	+	+
A_4, A_3	+	+	=	-	-
A_4, A_5	+	-	=	-	-
A_5, A_1	=	+	=	-	-
A_5, A_2	-	=	=	+	+
A_5, A_3	-	+	=	+	-
A_5, A_4	-	+	=	+	+

5. Вычислим индексы согласия по формуле (3.1). Матрица согласия представлена в таблице 3.3.

Таблица 3.3 Матрица согласия

C	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	1	0,6	0,8	0,8	0,8
A_2	0,6	1	0,6	0,6	0,6
A_3	0,6	0,6	1	0,6	0,6
A_4	0,6	0,6	0,6	1	0,4
A_5	0,6	0,8	0,6	0,8	1

6. Найдем длины шкал каждого критерия:

$$M_1 = 145;$$

$$M_2 = 50;$$

$$M_4 = 40;$$

$$M_5 = 100.$$

7. Вычислим индексы разногласия по формуле (3.2). Матрица разногласия представлена в таблице 3.4.

Таблица 3.4 Матрица разногласия

D	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1		1	0,034	0,414	0,200
A_2	1		1	0,200	0,500
A_3	0,800	1		0,800	1
A_4	0,875	0,586	0,800		0,375
A_5	0,600	1	0,600	0,414	

8. Положим $c_0=0,6$, $d_0=0,5$.

Построим таблицу доминирования вариантов (табл. 3.5). Вариант A_i предпочтительнее варианта A_j , если $c_{ij} \geq 0,6$ и $d_{ij} \leq 0,5$ ($i=1, \dots, 5; j=1, \dots, 5$).

Таблица 3.5 Доминирование вариантов

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1		-	+	+	+
A_2	-		-	+	+
A_3	-	-		-	-
A_4	-	-	-		-
A_5	-	-	-	+	

Таким образом, на основании таблицы 3.5 вариант A_1 доминирует над вариантами A_3 , A_4 , A_5 . Вариант A_2 доминирует над вариантами A_4 , A_5 . Вариант A_5 доминирует над вариантом A_4 . Множество недоминируемых вариантов A_1 , A_2 .

Вопросы для самопроверки

15. Понятие рационального выбора.
16. Задача рационального выбора.
17. Классификация задач рационального выбора.
18. Пороговый подход к выбору вариантов.
19. Измерение согласованности предпочтений лица, принимающего решение.
20. Особенности пороговых методов.

Литература

1. Петровский, А. Б. Теория принятия решений [Текст]: учебник / А. Б. Петровский. - М.: Академия, 2009. - 400 с.
2. Томакова, Р. А. Методы и алгоритмы теории принятия решений [Текст]: учебное пособие / Р. А. Томакова, В. В. Апальков; Юго-Зап. гос. ун-т. - Курск: ЮЗГУ, 2015. - 164 с.

3. Черноруцкий, И. Г. Методы принятия решений [Текст]: учебное пособие для студентов вузов / И. Г. Черноруцкий. - СПб.: БХВ-Петербург, 2005. - 416 с.