

УДК 681.3

Составитель: А.В. Малышев

Рецензент

Кандидат технических наук, начальник отдела информатизации ГУ
КРО ФСС РФ *А.Ф. Рубанов*

Решение задач оптимизации в Excel : методические указания для проведения лабораторных занятий и выполнения самостоятельной внеаудиторной работы по дисциплине «Офисные технологии» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост. А.В. Малышев. Курск, 2017. 19 с.: ил. 6. Библиогр.: с. 12

Содержат сведения, предназначенные для обучения студентов решению задач линейного программирования с использованием возможностей стандартной надстройки «Поиск решения» офисной программы Microsoft Excel. Приведены подробные описания и примеры формирования математических моделей оптимизационных ситуаций. Даны типичные примеры практических задач, наиболее встречающихся в производственной деятельности.

Предназначены для студентов направления подготовки 09.03.04.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . Формат 60x84 1/16
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж экз. Заказ. Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.

305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Ознакомиться с дополнительными возможностями офисного табличного редактора Microsoft Excel на примере надстройки «Поиск решения» и использовать её для решения задачи линейного программирования.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Excel имеет несколько программ-надстроек, выполняющих различные функции. Одной из таких надстроек является «Поиск решения», позволяющая решать оптимизационные задачи - чаще всего это задачи линейного программирования (ЛП).

Общая формулировка задачи ЛП такова [1]: найти неотрицательное решение X системы линейных уравнений

$$AX=B,$$

при котором целевая функция $f=CX$ принимает максимальное (минимальное) значение, где A - матрица коэффициентов, а B - объемы ресурсов.

Экономический смысл системы $AX=B$ заключается в задании ограничений на расходуемые ресурсы [2]. При этом целевая функция $f=CX$ обеспечивает максимизацию прибыли или минимальность себестоимости, получаемой от оптимального решения X . Например, если X - вектор объемов выпуска продукции, а C - вектор прибыли, получаемой от единицы каждого вида продукции, то f - суммарная прибыль от выпуска всей продукции.

Рассмотрим работу надстройки «Поиск решения» на примере задачи о рационе кормления животных. Требуется составить такой рацион кормления животных тремя видами корма, при котором они получат необходимое количество питательных веществ A и B , а себестоимость кормов будет минимальна. Стоимость кормов, требуемое количество питательных веществ и их содержание в каждом корме показаны в таблице 1.

Если $X=(x_1, x_2, x_3)$ есть искомое количество кормов, то задача ЛП формулируется так - найти решение системы X

Таблица 1

Питательные вещества	Корм 1	Корм 2	Корм 3	Требуемое количество (ед. пит. вещества)
А (ед./кг)	10	6	12	50
В (ед./кг)	7	10	11	45
Цена корма (руб./кг)	2,20	1,95	2,87	

$$\begin{cases} 10x_1 + 6x_2 + 12x_3 \geq 50; \\ 7x_1 + 10x_2 + 11x_3 \geq 45, \end{cases}$$

при котором целевая функция

$$f = 2,20x_1 + 1,95x_2 + 2,87x_3$$

принимает минимальное значение.

Математическую формулировку задачи необходимо оформить в виде таблицы (рисунок 1), отражающей основные зависимости.

	A	B	C	D	E
1	10	6	12	50	0
2	7	10	11	45	0
3					
4	0	0	0		
5					
6	2,20	1,95	2,87		0
7					

Рис. 1. Таблица исходных данных

Ячейки таблицы имеют следующий смысл:

- диапазон A1:C2 содержит матрицу A ;
- диапазон D1:D2 содержит вектор ресурсов B ;
- диапазон A6:C6 содержит вектор цен C ;
- диапазон A4:C4 содержит вектор решений X , начальные значения которого заданы нулю (он и будет оптимизирован программой);
- диапазон E1:E2 содержит выражения, вычисляющие произведение AX ;
- ячейка E6 содержит выражение, вычисляющее $f=CX$.

Вызов программы-надстройки выполняется через меню «Сервис\Поиск решения». В открывшемся окне (рисунок 2) необходимо выставить следующие параметры:

- 1) «Установить целевую ячейку» - E6;
- 2) поставить переключатель - «Равной минимальному значению»;
- 3) в поле «Изменяя ячейки» указать диапазон - A4:C4;
- 4) в области «Ограничения» нажать кнопку «Добавить» и в окне «Добавление ограничений» ввести - $E1 \geq D1$ и $E2 \geq D2$;

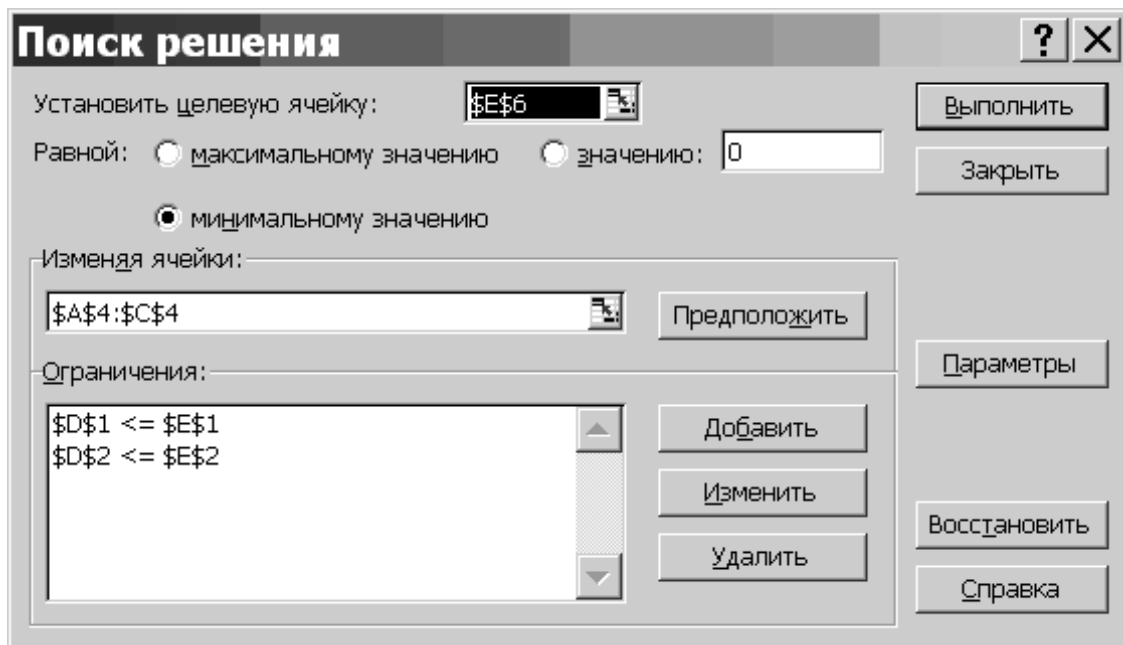


Рис. 2. Окно ограничений «Поиска решений»

- 5) нажать кнопку «**Параметры**», в открывшемся окне установить флажки «**Линейная модель**» и «**Неотрицательные значения**», а также выбрать переключатель «**Оценка**» - «**Линейная**» (рисунок 3).

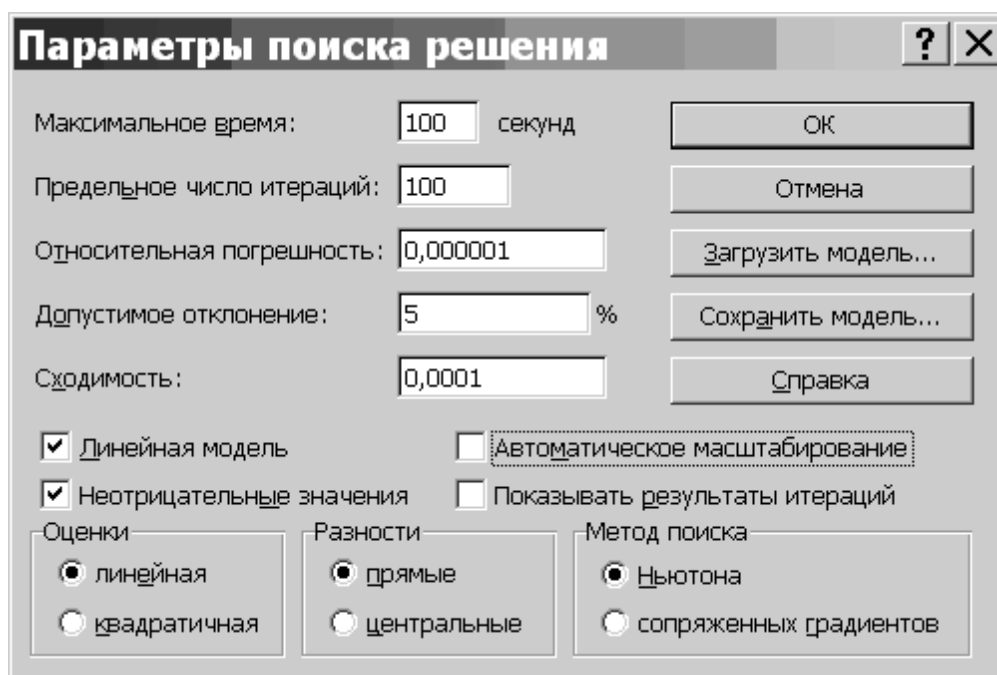


Рис. 3. Окно параметров «Поиска решений»

Для запуска программы необходимо в окне «**Поиск решения**» нажать кнопку «**Выполнить**». Результаты вычислений будут записаны в изменяемые ячейки таблицы (рисунок 4).

	A	B	C	D	E
1	10	6	12	50	50
2	7	10	11	45	45
3					
4	0,38	0,00	3,85		
5					
6	2,20	1,95	2,87		11,88

Рис. 4. Результат работы «Поиска решений»

Таким образом, животных следует кормить первым кормом в количестве 0,38 кг, третьим - 3,85 кг и не использовать второй корм вообще. При таком рационе затраты на кормление одного животного составят 11,88 руб.

3. ФОРМИРОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Допустим, что типография производит и реализует оптовыми партиями соответственно по цене 45 руб. и 30 руб. книги и настольные календари. Постоянные затраты (управленческие расходы и содержание офиса) составляют 202200 руб. в квартал, а переменные затраты (стоимость бумаги и краски) – соответственно 15,75 руб. и 12,30 руб. в расчете на одну книгу и один календарь. Налог на добавленную стоимость составляет при этом 16,67 % от цены изделия.

Опыт реализации изделий в предыдущие плановые периоды показал, что в течение квартала можно реализовать не более 100000 книг и 40000 календарей. Требуется на планируемый квартал определить объем производства и реализации изделий (структуру производства и реализации), при котором общество получит максимальную прибыль, а суммарные затраты на производство и реализацию изделий не будут превосходить 2000000 руб.

Обозначим через (x_1, x_2) неизвестные объемы производства и реализации. Суммарные затраты Z на производство и реализацию изделий можно выразить в виде функции неизвестных объемов:

$$Z(x_1, x_2) = 202200 + 15,75x_1 + 12,3x_2$$

Ожидаемая сумма выручки V , рассматриваемая как функция неизвестных объемов производства и реализации, составит:

$$V(x_1, x_2) = 45x_1 + 30x_2$$

Сумма налога на добавленную стоимость N также выражается в виде функции неизвестных объемов реализации:

$$N(x_1, x_2) = 0,1667 * (45x_1 + 30x_2) = 7,5x_1 + 5x_2$$

Прибыль P можно записать в виде функции неизвестных объемов x_1 и x_2 следующим образом:

$$\begin{aligned} P(x_1, x_2) &= V(x_1, x_2) - Z(x_1, x_2) - N(x_1, x_2) = \\ &= 45x_1 + 30x_2 - 202200 - 157,5x_1 - 123x_2 - 7,5x_1 - 5x_2 = \\ &= 21,75x_1 + 12,7x_2 - 202200 \end{aligned}$$

Таким образом, математическая модель ситуации записывается следующим образом:

$$21,75x_1 + 12,7x_2 - 202200 \rightarrow \max$$

$$202200 + 15,75x_1 + 12,3x_2 \leq 2000000$$

$$0 \leq x_1 \leq 100000$$

$$0 \leq x_2 \leq 40000$$

Полученную модель можно записать и в следующем виде:

$$21,75x_1 + 12,7x_2 \rightarrow \max$$

$$15,75x_1 + 12,3x_2 \leq 1797800$$

$$x_1 \leq 100000$$

$$x_2 \leq 40000$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

3.1. Ввод условий задачи

- 1) Сформировать исходные данные в диапазоне ячеек A1:F11 так, как показано на рисунке 5;
- 2) В ячейку D6 ввести формулу

$$=СУММПРОИЗВ(B\$3:C\$3;B6:C6)$$

	Товары				
имя	Книги(x1)	Календари(x2)			
значение					
нижняя граница					
верхняя граница			ЦФ	напр	
коэф. в ЦФ	21,75	12,70		макс.	
	Ограничения				
вид			левая часть	знак	правая часть
b1	15,75	12,30		<=	1797800,00
b2	1,00	0,00		<=	100000,00
b3	0,00	1,00		<=	40000,00

Рис. 5. Исходные условия задачи ЛП

- 3) В ячейку D9 ввести формулу
=СУММПРОИЗВ(B\$3:C\$3;B9:C9)
и размножить по столбцу в ячейках D10 и D11.

3.2. Решение задачи

- 3.2.1. В меню выбрать «Сервис\Поиск решения». В поле «Установить целевую ячейку» набрать **\$D\$6**. В поле «Равной» установить маркер в «Максимальному значению».
- 3.2.2. В поле «Изменяя ячейки» ввести **\$B\$3:\$C\$3**.
- 3.2.3. Установить курсор-прямоугольник в поле «Ограничения». Нажать на кнопку «Добавить». В поле «Ссылка на ячейку» ввести **\$B\$3**. Выбрать знак **>=**. В поле «Ограничение» ввести **=\$B\$4**. Нажать кнопку «Добавить».
- 3.2.4. В поле «Ссылка на ячейку» ввести **\$C\$3**. Выбрать знак **>=**. В поле «Ограничение» ввести **=\$C\$4**. Нажать кнопку «Добавить».
- 3.2.5. В поле «Ссылка на ячейку» ввести **\$D\$9**. Выбрать знак **<=**. В поле «Ограничение» ввести **=\$F\$9**. Нажать кнопку «Добавить»

- 3.2.6. В поле «Ссылка на ячейку» ввести $\$D\10 . Выбрать знак \leq . В поле «Ограничение» ввести $=\$F\10 . Нажать кнопку «Добавить»
- 3.2.7. В поле «Ссылка на ячейку» ввести $\$D\11 . Выбрать знак \leq . В поле «Ограничение» ввести $=\$F\11 . Нажать кнопку **ОК**.
- 3.2.8. Нажать кнопку «**Параметры**». Установить линейную модель. Нажать кнопку **ОК**. Нажать кнопку «**Выполнить**».
- 3.2.9. В диалоговом окне «**Результаты поиска решения**», приведенном на рисунке 6, установить маркер на опцию «**Сохранить найденное решение**» и выбрать в окне «**Тип отчета – Результаты**». Нажать **ОК**.

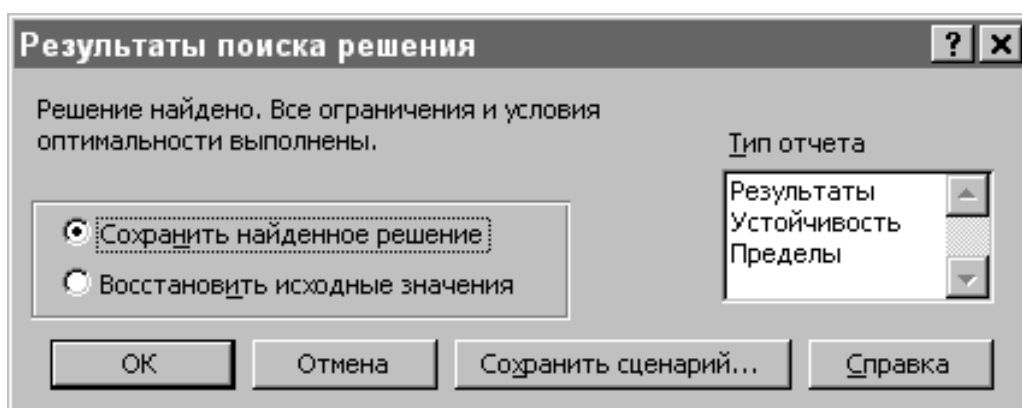


Рис. 6. Диалоговое окно «Результаты поиска решения»

4. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

- 4.1. Выбрать задачу ЛП согласно своему варианту.
- 4.2. Создать новый лист с именем «**Решение задачи ЛП**».
- 4.3. На вновь созданном листе произвести математическую формулировку задачи ЛП в виде таблиц исходных данных.
- 4.4. Открыть окно поиска решений через меню «Сервис\Поиск решения».
- 4.5. Решить задачу ЛП для своего варианта на основе последовательности, приведенной в примерах данного методического указания.

5. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

- 1) Исходное задание.
- 2) Содержимое листа «Решение задачи ЛП».
- 3) Содержимое автоматически созданного листа «Отчет по результатам 1» с результатами решения задачи ЛП

6. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- 1) Какие средства для построения математических моделей и прогнозирования состояния моделируемого объекта содержит Excel?
- 2) Каково назначение программы-надстройки «Поиск решения»?
- 3) Какова общая формулировка задачи линейного программирования?
- 4) В чем заключается экономический смысл задачи линейного программирования?
- 5) Как будет сформулирована задача линейного программирования для рассматриваемого примера задачи о рациональном кормлении животных?
- 6) Как оформить в виде таблицы, отражающей основные зависимости, математическую формулировку задачи линейного программирования?
- 7) Каков смысл ячеек таблицы, подготовленной для поиска решения?
- 8) Как загрузить программу поиска решения задачи линейного программирования?
- 9) Какие параметры следует установить в окне «Поиск решения»?
- 10) Как интерпретировать полученные результаты решения задачи линейного программирования?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Мотов, Владислав Васильевич. Word, Excel, PowerPoint [Текст] : учебное пособие / В.В. Мотов. - М.: ИНФРА-М, 2012. - 206 с.
2. Ашманов, Станислав Александрович. Теория оптимизации в задачах и упражнениях [Текст] : учебное пособие / С.А. Ашманов, А.В. Тимохов. - СПб: Лань, 2012. - 448 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Варианты заданий

Задача 1.

В трех пунктах отправления А, В, С сосредоточен однородный товар. Этот товар необходимо перевезти в четыре пункта назначения Р, Q, R, S. Запасы товара в пунктах отправления и потребности пунктов назначения показаны в следующей таблице:

Запасы (тонн)			Потребности (тонн)			
А	В	С	Р	Q	R	S
42	36	40	26	41	25	31

Стоимости перевозок 1 т груза из i -го пункта отправления в j -й пункт назначения заданы следующей матрицей:

	А	В	С
Р	200	400	300
Q	700	500	800
R	600	900	700
S	550	430	650

Найти план перевозок груза, обеспечивающий транспортному предприятию его минимальную стоимость. Учесть, что в случае недостатка запасов, все потребности не могут быть удовлетворены.

Задача 2.

Радиозавод выпускает магнитофоны двух моделей: А и В. Завод должен выпускать в месяц не менее Y_a и Y_b магнитофонов. Каждая модель приносит доход в размере S_a и S_b рублей. Процесс производства магнитофонов состоит из трех стадий: изготовления деталей, сборки изделия и его упаковки. Нормативы времени на эти стадии заданы следующей матрицей:

S_a	S_b	Y_a	Y_b	Т (час./1 шт.)			
				Модель	Стадия 1	Стадия 2	Стадия 3
40	60	400	600	1	0,3	0,4	0,1
				2	0,35	0,5	0,15

Производственные мощности завода позволяют расходовать в месяц не более 600 часов на выпуск деталей, 500 часов на сборку магнитофонов и 200 часов на упаковку. Составить план выпуска магнитофонов, обеспечивающий заводу максимальный доход. Определить, какая из стадий в наибольшей степени сдерживает рост производства.

Задача 3.

Акционерное общество может возделывать на поле площадью S га четыре культуры. Наиболее трудоемким этапом является уборка урожая, которая должна осуществляться в два этапа: сначала убираются 1-я и 2-я культуры, а затем 3-я и 4-я. Трудоемкости уборки каждой культуры составляют соответственно T_1 , T_2 , T_3 и T_4 человеко-часов на 1 га. Для уборки общество может выделить R_1 человеко-часов на 1-й этап и R_2 на 2-й:

S	T_1	T_2	T_3	T_4	R_1	R_2
400	100	150	200	90	25000	30000

Составить план посева культур, дающий максимальную прибыль, если 1 га каждой из культур (при ожидаемой урожайности) приносит прибыль соответственно в C_1 , C_2 , C_3 и C_4 (тыс. руб.):

C_1	C_2	C_3	C_4
400	500	820	300

Определить, какой из этапов уборки ограничивает рост прибыли.

Задача 4.

Рацион стада крупного рогатого скота из 220 голов включает пищевые продукты А, В, С, D и Е. В сутки одно животное должно съесть не менее 2 кг продукта вида А, 1,5 кг продукта В, 0,9 кг продукта С, 3 кг продукта D и 1,8 кг продукта Е. Однако в чистом виде указанные продукты не производятся. Они содержатся в концентратах К-1, К-2 и К-3. Их цена соответственно 0,5; 0,4; 0,9 руб. за килограмм. Содержание продуктов в килограмме концентрата (в %) указано в следующей таблице:

Концентраты	Продукты				
	А	В	С	D	Е
К-1	15	22	0	0	4
К-2	19	17	0	14	7
К-3	5	12	25	5	8

Построить модель, на основе которой составить план покупки концентратов при котором затраты на покупку будут минимальны.

Задача 5.

Кондитерская фабрика для производства трех видов карамели А, В и С использует три вида сырья: сахарный песок, патоку и фруктовое пюре. Нормы расхода сырья на производство 1 кг карамели заданы в следующей таблице:

Наименование сырья	Нормы расхода		
	А	В	С
Сахарный песок	0,6	0,5	0,6
Патока	0,4	0,4	0,3
Фруктовое пюре	0,1	0,2	0,2

Запасы сырья на складе соответственно равны V_1 , V_2 и V_3 кг. Прибыль от реализации 1 кг продукции каждого вида определяется значениями P_A , P_B и P_C :

Запасы сырья (кг)			Прибыль от реализации (руб./кг.)		
V_1	V_2	V_3	P_A	P_B	P_C
800	600	120	1,08	1,12	1,28

Найти план производства карамели, обеспечивающий максимальную прибыль. Выяснить, какое сырье ограничивает рост прибыли.

Задача 6.

Мебельная фабрика выпускает столы, стулья, кресла и кровати. При изготовлении этих товаров используется два вида досок. Запасы досок и трудовых ресурсов показаны в следующей таблице:

Доски 1 типа (м)	Доски 2 типа (м)	Трудовые (чел.-час)
1500	1000	1500

Нормы расхода сырья, трудоемкость производства продукции и прибыль от реализации единицы продукции показаны в следующей таблице:

Изделия/Ресурсы	Нормы расхода			
	Стол	Стулья	Кресла	Кровати
Доски 1 типа (м)	5	1	9	12
Доски 2 типа (м)	2	3	4	6
Трудоемкость (чел.-час)	3	2	5	10
Прибыль (руб.)	12	5	15	18

С учетом спроса на товары фабрика должна выпустить не более 10 кроватей, а соотношение столов и стульев должно быть 1:6. Найти план производства мебели, дающий фабрике максимальную прибыль.

Задача 7.

Полуфабрикат поступает на фабрику в виде двух партий листов фанеры. Первая партия содержит 400 листов, вторая - 250 листов. Из этой фанеры необходимо производить комплекты деталей: 1 комплект содержит 4 детали 1-го типа, 3 детали 2-го и 3 детали 3-го типа. Листы фанеры можно раскраивать различными способами. Количество деталей, которое можно получить из 1 листа фанеры показано в следующей таблице:

1 партия				2 партия		
Деталь	Способ			Деталь	Способ	
	1	2	3		1	2
1	0	6	9	1	6	3
2	4	3	4	2	5	4
3	10	16	0	3	8	0

Составить план раскроя фанеры так, чтобы получить максимальное количество комплектов деталей.

Задача 8.

Ткань трех артикулов производится на ткацких станках двух типов с различной производительностью. Сырьем для изготовления тканей являются пряжа и красители. Составить план производства тканей, обеспечивающий максимальную прибыль. Основные параметры производства, его себестоимость и цены реализации готового продукта показаны в следующей таблице:

Вид ресурса	Объем ресурсов	Произв. и норма расхода		
		Арт. 1	Арт. 2	Арт. 3
Станки 1 типа	29000 ч	20 м/ч	10 м/ч	25 м/ч
Станки 2 типа	30000 ч	8 м/ч	20 м/ч	10 м/ч
Пряжа (кг)	30000 кг	0,12 кг/м	0,18 кг/м	0,21 кг/м
Красители (кг)	3000 кг	0,01 кг/м	0,005 кг/м	0,008 кг/м
Цена 1 м ткани (руб.)		45	45	60
Стоимость 1 м ткани (руб.)		24	20	40

Задача 9.

Нефтеперерабатывающий завод имеет запасы 4-х полуфабрикатов: алкилата (S_1); крекинг-бензина (S_2); бензина прямой перегонки (S_3) и изопентона (S_4). В результате смешивания этих компонентов в различных пропорциях, получают 3 сорта авиационного бензина: А, В и С. Запасы сырья, состав бензина и себестоимость его производства даны в следующей таблице:

Запасы сырья (л)				Состав бензина $S_1:S_2:S_3:S_4$		
S_1	S_2	S_3	S_4	А	В	С
200000	300000	300000	50000	2:3:5:2	3:1:2:1	2:2:1:3
Прибыль от 1 тыс. л бензина (руб.)				1200	1000	1500

Определить план производства бензина различных сортов, обеспечивающий максимальную прибыль производства.

Задача 10.

Оптовая база занимается закупкой и продажей сезонного товара. Одновременно на базе может храниться до 100 единиц товара. Закупка товара на очередной квартал осуществляется в конце предыдущего квартала. К началу первого квартала на складе имелось 30 ед. товара. Цены приобретения и продажи единицы товара по кварталам показаны в следующей таблице:

Цена приобретения				Цена продажи			
1 кв.	2 кв.	3 кв.	4 кв.	1 кв.	2 кв.	3 кв.	4 кв.
350	500	500	400	500	600	750	550

Сколько требуется покупать и продавать товара за каждый квартал в течение года, чтобы оптовая база получила максимальную прибыль?

Задача 11.

На приобретение оборудования для нового производственного участка выделено 300 тыс. руб. Его предполагается разместить

на площади 45 кв. м. Участок может быть оснащен оборудованием трех видов - машинами стоимостью 6 тыс. руб. (здесь и далее все показатели приводятся на единицу оборудования), размещающимися на площади 9 кв. м, производительностью 8 тыс. единиц продукции за смену; машинами стоимостью 3 тыс. руб., занимающими площадь 4 кв. м, производительностью 4 тыс. единиц продукции за смену; машинами стоимостью 2 тыс. руб., занимающими площадь 3 кв. м, производительностью 3 тыс. единиц продукции.

Построить модель, на основе которой определить план приобретения оборудования, обеспечивающий наибольшую производительность всего участка.

Задача 12.

Предприятие выпускает обычный, специальный и декоративный сплавы латуни и реализует их соответственно по 3; 4, 5 и 6 руб. за единицу веса. Его производственная мощность позволяет производить (за плановый период) не более 500 ед. веса обычного сплава, 700 ед. специального и 250 ед. декоративного. Обязательными составляющими сплавов являются медь, цинк, свинец и никель. Их цена соответственно 0,9; 0,7; 0,5 и 1,1 руб. за единицу веса.

По технологии декоративный сплав должен содержать не менее 7% никеля, 49% меди и не более 29% свинца; специальный - не менее 3% никеля, 71% меди, 9% цинка и не более 21% свинца. В обычный сплав составляющие входят без ограничений.

Считая, что себестоимость сплавов складывается только из стоимости его ингредиентов, построить модель, на основе которой найти план выпуска сплавов, обеспечивающий максимальную прибыль.