МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра программной инженерии

УТВЕРЖДАЮ:
Проректор по учебной работе
__________ О.Г. Локтионова
« 28 » 10 __________2020 г.

ГРАФЫ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Методические указания для выполнения лабораторной работы по дисциплине «Дискретная математика» для студентов направления подготовки 09.03.04 Программная инженерия

Курск - 2020

УДК 519.17
Составитель: Р.А. Томакова

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент *А.В. Малышев*

Графы. Основные понятия: методические указания для выполнения лабораторной работы по дисциплине «Дискретная математика» для студентов направления подготовки 09.03.04 Программная инженерия/ Юго-Зап. гос. ун-т; сост. Р.А. Томакова. Курск, 2020. 21 с.

Составлены в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования направления подготовки 09.03.04 Программная инженерия и на основании учебного плана направления подготовки 09.03.04 Программная инженерия.

В методических указаниях представлены основные понятия и свойства графов, необходимые для выполнения лабораторной работы по дисциплине «Дискретная математика», сформулированы требования для ее выполнения, разобраны примеры выполнения заданий, приведены вопросы к защите.

Предназначены для студентов, обучающихся направления подготовки 09.03.04 Программная инженерия (профиль «Разработка программно-информационных систем») всех форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 28.10.20 . Формат 60×84 1/16.
Усл. печ. л. 2,2 . Уч.- изд. л. 2,0. Тираж 25 экз. Заказ. 1390. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА
ГРАФЫ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Цель работы:

1. Изучение основных понятий теории графов, предназначенных для практических реализаций;

2. Приобретение навыков построения структур на основе графовых моделей.

ЗАДАНИЕ

1. По заданным матрицам смежности вершин восстановить графы $G_1(X, A_1), G_2(X, A_2)$.
2. Найти объединение и пересечение полученных графов $G_1(X, A_1) \cup G_2(X, A_2)$, $G_1(X, A_1) \cap G_2(X, A_2)$.
3. Построить кольцевую сумму заданных графов.
4. Для каждого графа определить и построить остовый подграф, произвольный подграф, порожденный подграф.
5. Для каждого графа построить матрицы смежности ребер, инцидентности, достижимости и контрдостижимости.
6. Определить локальные степени вершин каждого графа. Проверить существуют ли в графе эйлеров цикл, эйлерова цепь.
7. Найти и построить композицию графов G1(G2(X)), G2(G1(X)).
8. Найти все базы графа.
9. Определить сильные компоненты связности графов и построить конденсацию графов.
10. Определить цикломатическое число графа.
11. Найти хроматическое число графа.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Объединение графов $G_1(X, A_1), G_2(X, A_2)$, обозначаемое $G_1(X, A_1) \cup G_2(X, A_2)$, представляет собой граф $G_3(X_3, A_3)$ такой, что множество вершин $X_3 = X_1 \cup X_2$, а множество дуг $A_3 = A_1 \cup A_2$.

Пересечение графов $G_1(X,A_1), G_2(X,A_2)$, обозначаемое $G_1(X,A_1) \cap G_2(X,A_2)$, представляет собой граф $G_3 = (X_1 \bigcap X_2, A_1 \bigcap A_2)$.

Кольцевая сумма двух графов $G_1(X,A_1)$ и $G_2(X,A_2)$ обозначается $G_1 \oplus G_2$, представляет собой граф G_3, порожденный на множестве ребер $A_1 \oplus A_2$. Другими словами, граф G_3 не имеет изолированных вершин и состоит только из ребер, присутствующих либо в G_1, либо в G_2, но не в обоих графах одновременно.

Матрицей смежности ребер графа называется матрица $B = [b_{ij}]$, $i, j = \overline{1, m}$, где m – число ребер графа.

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если ребра } a_i \text{ и } a_j \text{ имеют общий конец;} \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пусть $a_1, ..., a_m$ – дуги, а $x_1, ..., x_n$ – вершины ориентированного графа $G(X, A)$.

Матрицей инциденций называется матрица $S = [S_{ij}]$, где $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, n – число вершин графа, m – число ребер графа.

Элементы матрицы инциденций определяются

$$S_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} +1, \text{если дуга } a_j \text{ исходит из вершины } x_i; \\ -1, \text{если дуга } a_j \text{ заходит в вершину } x_i; \\ \;\;0, \text{если дуга } a_j \text{ не инцидентна вершине } x_i; \\ \;\;2, \text{если петля.} \end{array} \right\}$$

Матрица достижимостей обозначается $R=[r_{ij}]$, где $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$, n – число вершин графа. Элементы матрицы определяются так:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если из вершины } x_i \text{ достижима вершина } x_j; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Очевидно, что все диагональные элементы матрицы R равны 1, поскольку каждая вершина достижима из себя самой с помощью пути длины 0.

Матрица ***контрдостижимостей*** $Q = [q_{ij}]$, где $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$, n – число вершин графа, определяется следующим образом:

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если из вершины } x_j \text{ достижима вершина } x_i; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$Q(x_i) = \{x_i\} \cup \Gamma^{-1}(x_1) \cup \Gamma^{-2}(x_2) \cup \ldots \cup \Gamma^{-P}(x_i),$$

где $\Gamma^{-2} = \Gamma^{-1}(\Gamma^{1}(x_i))$;

Сильная компонента связности (СК) графа $G(X, \Gamma)$ – это минимально сильно связный подграф графа $G(X, \Gamma)$.

Конденсацией графа $G^*(X^*, \Gamma^*)$ называют граф, каждая вершина которого представляет собой множество вершин некоторой сильной компоненты связности графа $G(X, \Gamma)$. Дуга (x_i^*, x_j^*) существует в G^* тогда и только тогда, когда в G существует дуга (x_i, x_j) такая, что x_i принадлежит компоненте, соответствующей вершине x_i^*, а x_j – вершине x_j^*.

База графа есть множество вершин, из которого достигается любая вершина графа и которое является минимальным в том смысле, что не существует собственного подмножества в G, обладающего таким свойством достижимости.

Базой графа является такое множество вершин B графа G, которое удовлетворяет четырем условиям:

1) каждая вершина графа G достижима хотя бы из одной вершины множества B;

2) в B нет вершины, которая достижима из другой вершины множества B;

3) в множестве B нет двух вершин, которые принадлежат одной и той же СК графа;

4) в любом графе без циклов существует единственная база; она состоит из всех таких вершин графа, полустепени захода которых равны нулю.

Цикломатическое число $\nu(G)$

G – неориентированный граф, имеющий n вершин, m ребер и r компонент связаности.

$\nu(G) = m - n + r$ – равно наибольшему числу независимых циклов в графе.

Хроматическое число $\gamma(G)$

Пусть ρ – натуральное число.

Граф G называют ρ -хроматическим, если его вершины можно раскрасить ρ различными цветами, чтобы никакие две смежные вершины не были раскрашены одинаково.

$\gamma(G)$ – наименьшее из ρ называется ***хроматическим числом графа***.

Конечный граф G является ***эйлеровым графом*** тогда и только тогда, когда:

1) граф G – связный;

2) все его локальные степени четны.

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

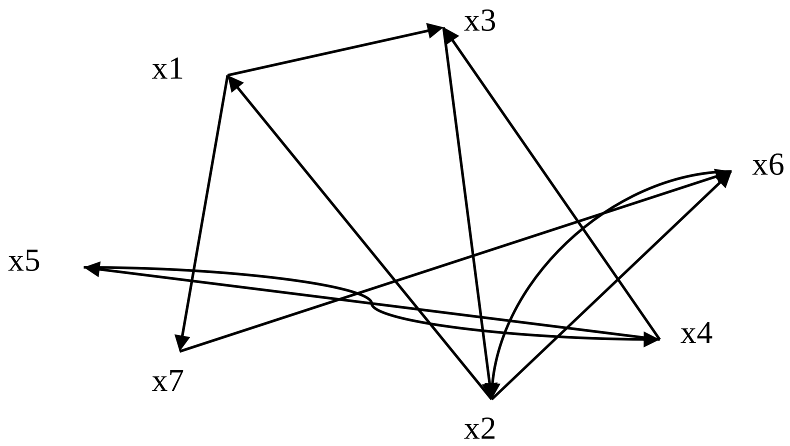
1. По заданным матрицам смежности вершин восстановить графы.

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7
x1	0	0	1	0	0	0	1
x2	1	0	0	0	0	1	0
x3	0	1	0	0	0	0	0
x4	0	0	1	0	1	0	0
x5	0	0	0	1	0	0	0
x6	0	1	0	0	0	0	0
x7	0	0	0	0	0	1	0

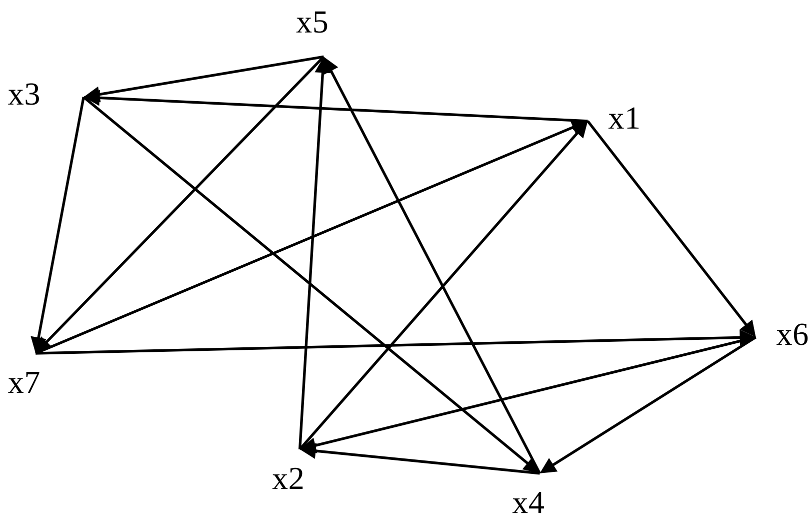
	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7
x1	0	0	1	0	0	1	0
x2	1	0	0	0	1	0	0
x3	0	0	0	1	0	0	1
x4	0	1	0	0	1	0	0
x5	0	0	1	0	0	0	1
x6	0	1	0	1	0	0	0
x7	1	0	0	0	0	1	0

Задание №1

а) Граф $G_1(X,A_1)$

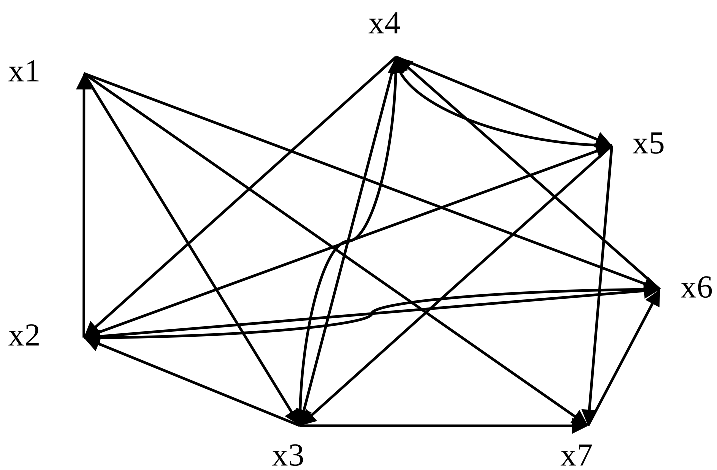


б) Граф $G_2(X,A_2)$

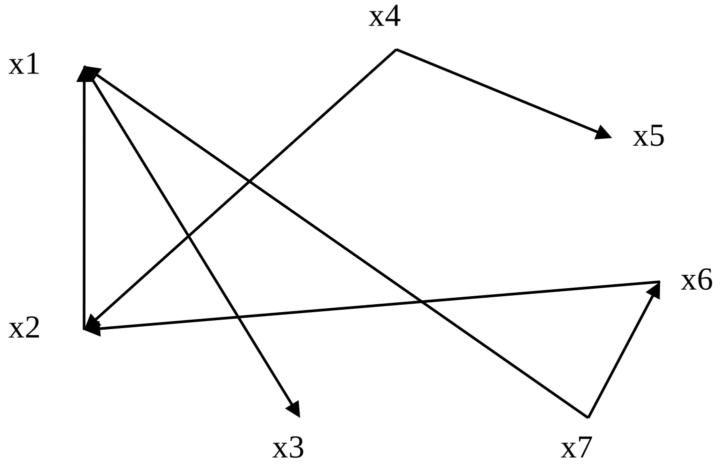


Задание №2

1) Объединение графов $G_1(X, A_1) \cup G_2(X, A_2)$

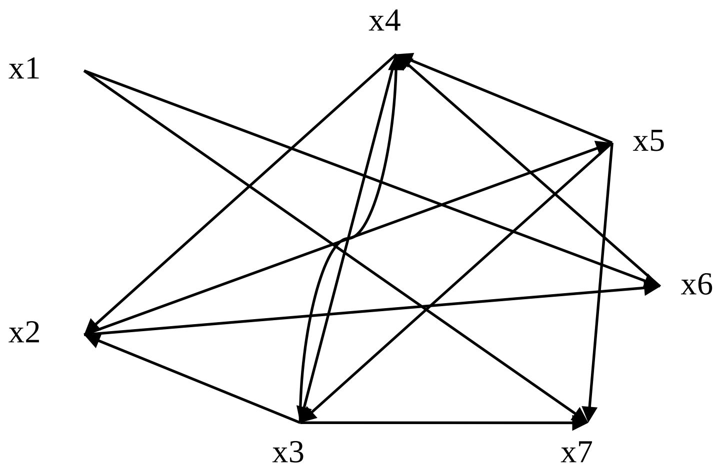


2) Пересечение графов $G_1(X, A_1) \bigcap G_2(X, A_2)$



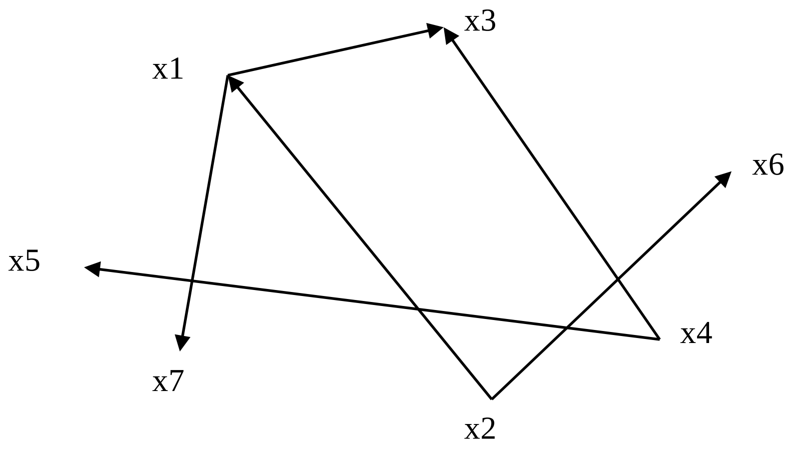
Задание №3

Кольцевая сумма двух графов $G_1 \oplus G_2$

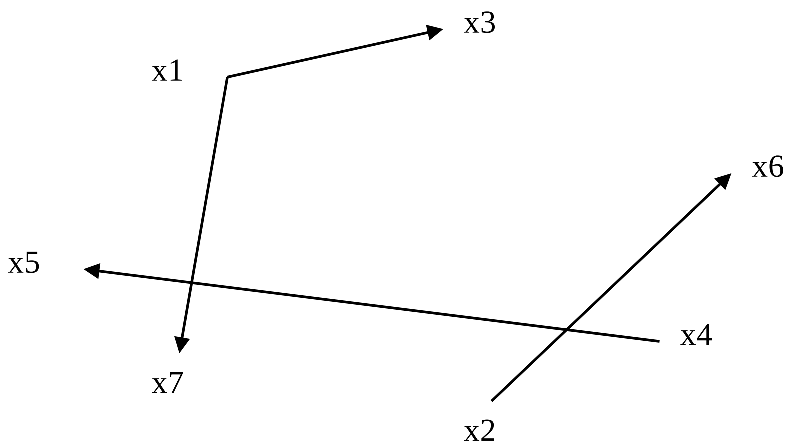


Задание №4

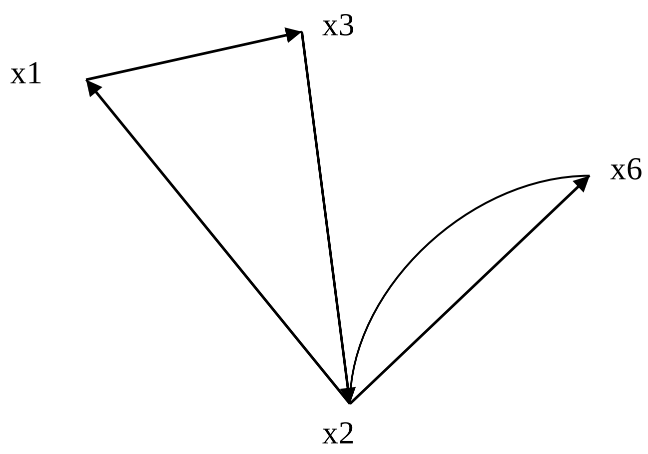
а) Остовый подграф графа $G_1(X, A_1)$



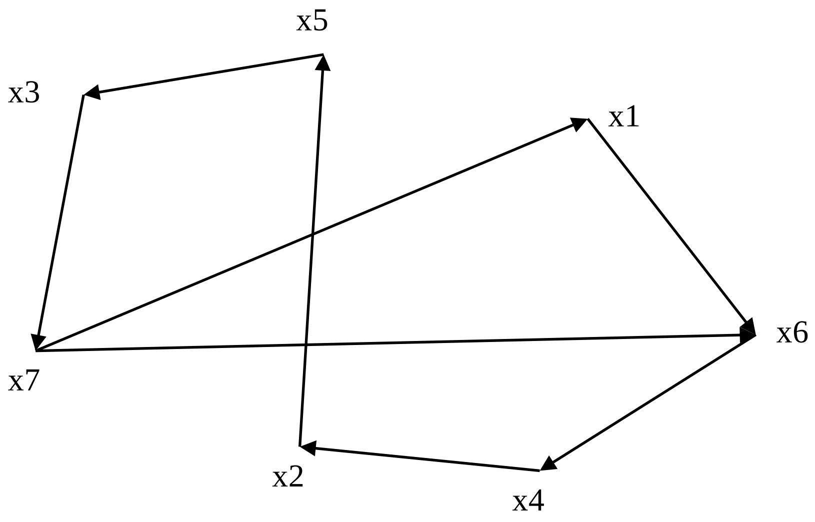
2) Произвольный подграф графа $G_1(X, A_1)$



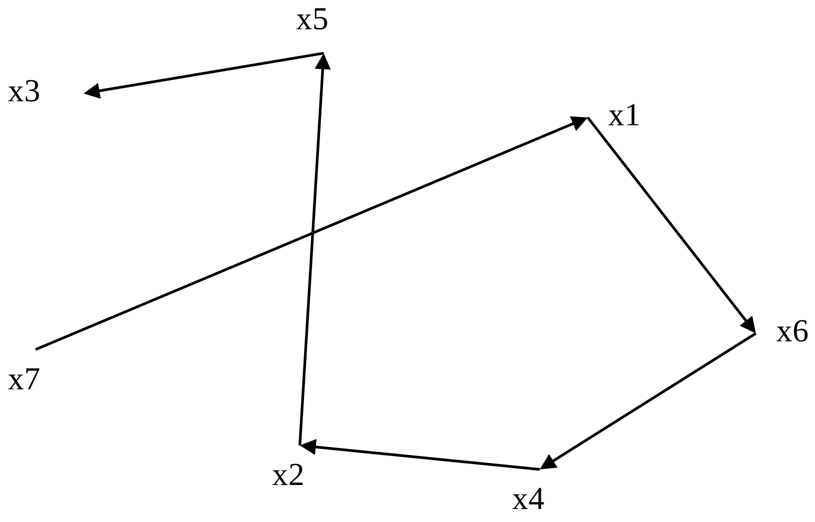
3) Порожденный подграф графа $G_1(X, A_1)$



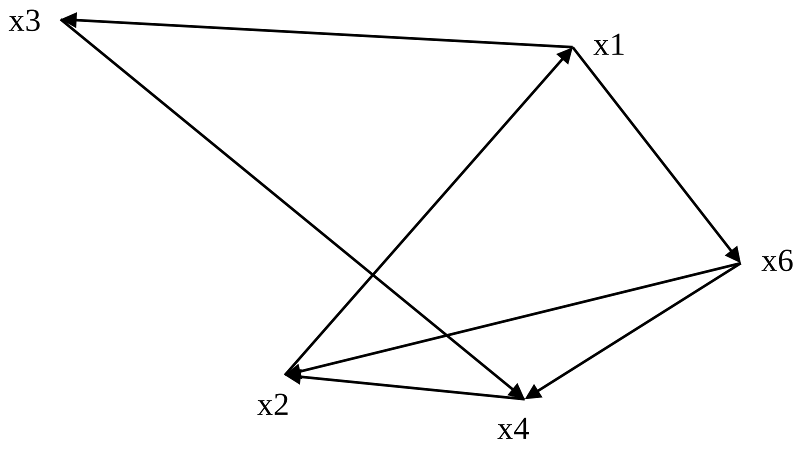
б) Остовый подграф графа $G_2(X, A_2)$



2) Произвольный подграф графа $G_2(X, A_2)$

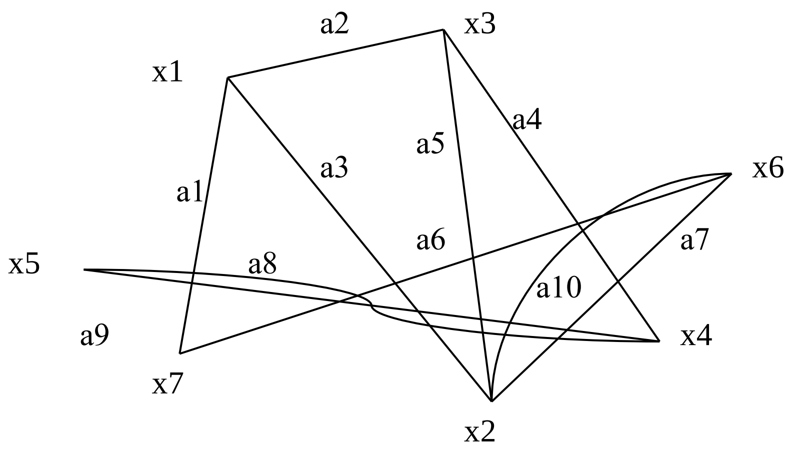


3) Порожденный подграф графа $G_2(X, A_2)$



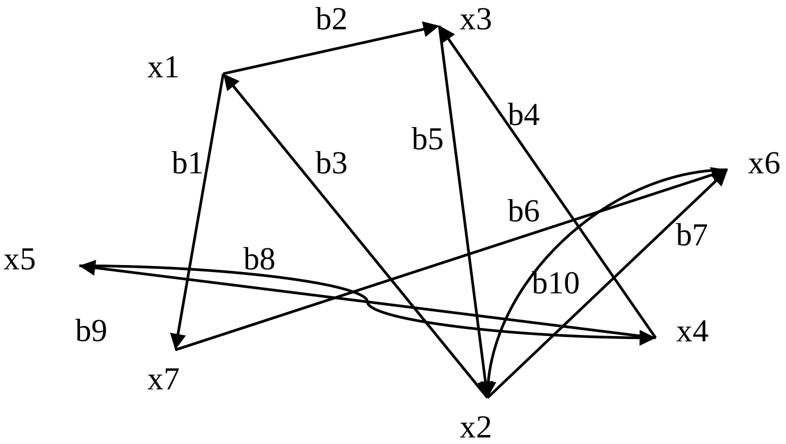
Задание №5

1)Матрица смежности ребер графа $G_1(X, A_1)$



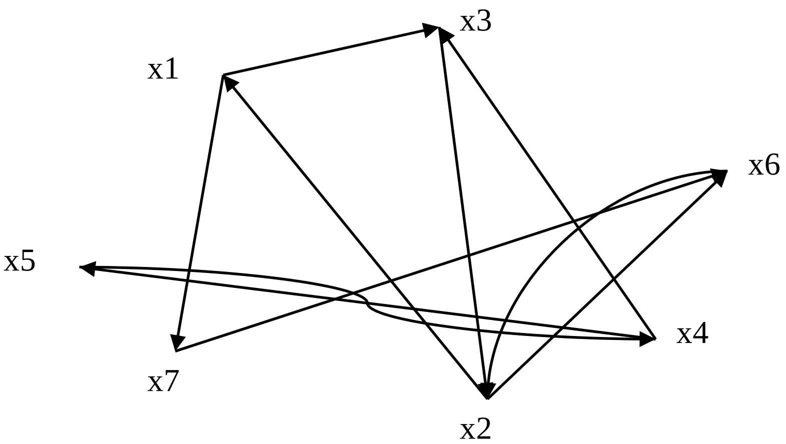
	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10
a1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
a2	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
a3	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1
a4	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0
a5	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1
a6	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1
a7	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1
a8	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0
a9	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0
a10	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1

2) Матрица инцидентности графа $G_1(X, A_1)$.



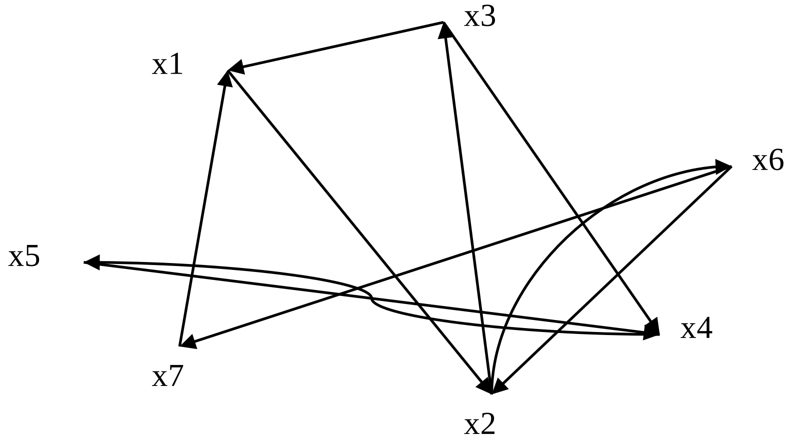
	b1	b2	b3	b4	b5	b6	b7	b8	b9	b10
x1	1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0
x2	0	0	1	0	-1	0	1	0	0	-1
x3	0	-1	0	-1	1	0	0	0	0	0
x4	0	0	0	1	0	0	0	1	-1	0
x5	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0
x6	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0	1
x7	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	0

3) Матрица достижимости графа $G_1(X, A_1)$.



4) Матрица контр-достижимости графа $G_1(X, A_1)$.

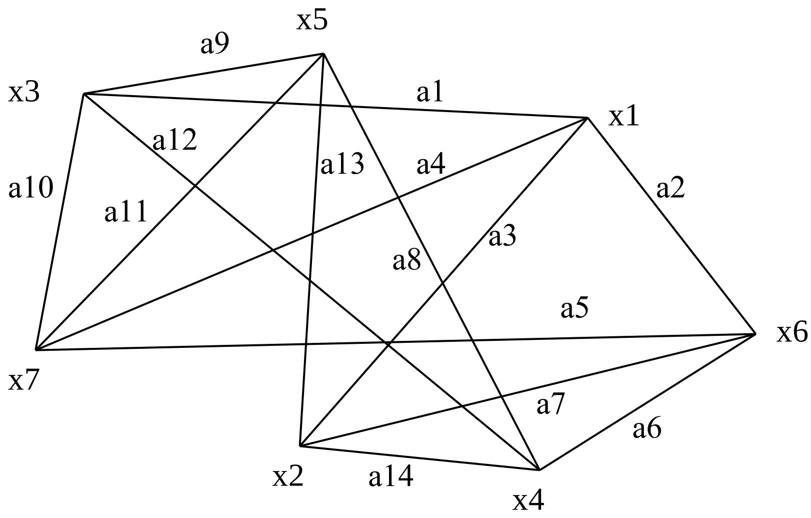
	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7
x1	1	1	1	0	0	1	1
x2	1	1	1	0	0	1	1
x3	1	1	1	0	0	1	1
x4	1	1	1	1	1	1	1
x5	1	1	1	1	1	1	1
x6	1	1	1	0	0	1	1
x7	1	1	1	0	0	1	1



	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7
x1	1	1	1	1	1	1	1
x2	1	1	1	1	1	1	1
x3	1	1	1	1	1	1	1
x4	0	0	0	1	1	0	0
x5	0	0	0	1	1	0	0
x6	1	1	1	1	1	1	1
x7	1	1	1	1	1	1	1

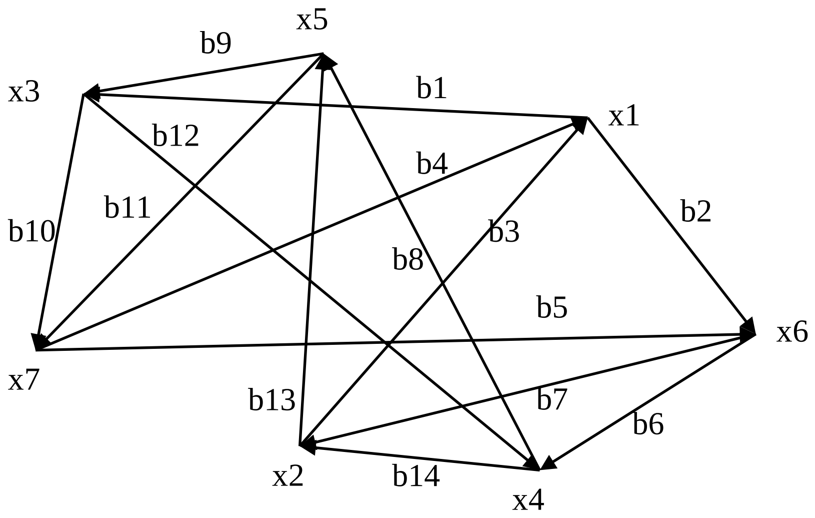
б)

1)Матрица смежности ребер.



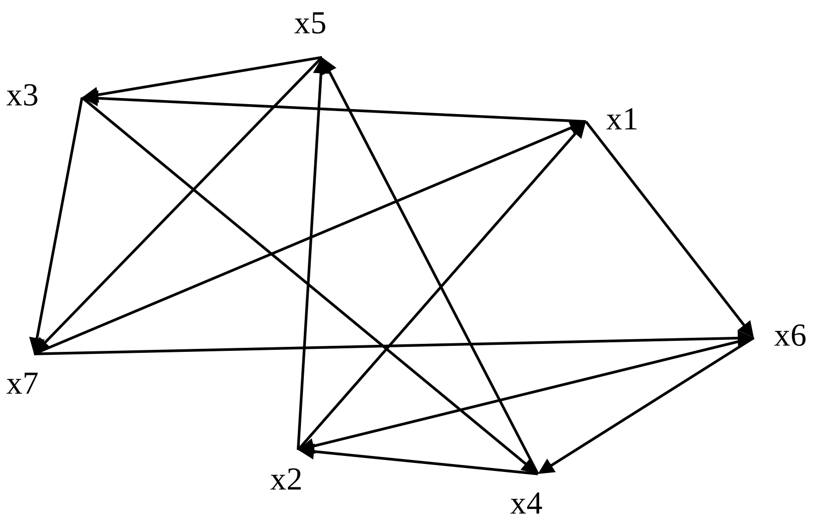
	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12	a13	a14
a1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0
a2	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
a3	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1
a4	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0
a5	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0
a6	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1
a7	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1
a8	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1
a9	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0
a10	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0
a11	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0
a12	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1
a13	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1
a14	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1

2) Матрица инцидентности.



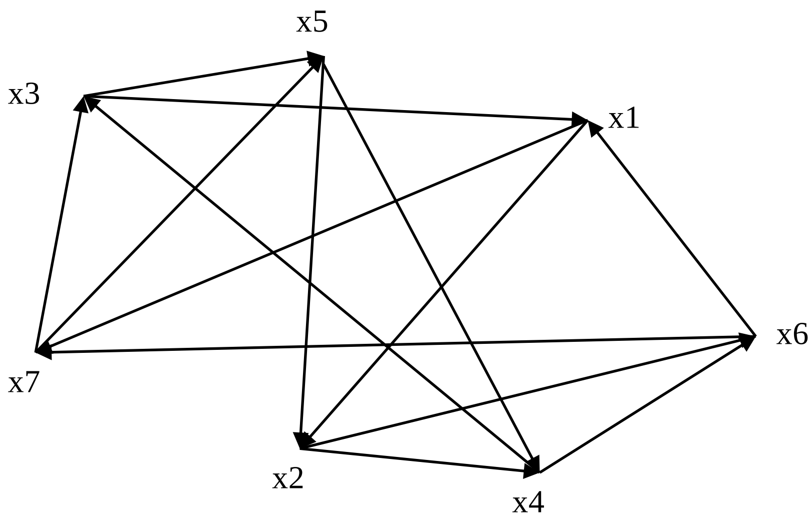
	b1	b2	b3	b4	b5	b6	b7	b8	b9	b10	b11	b12	b13	b14
x1	1	1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x2	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	-1
x3	-1	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	1	0	0
x4	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	-1	0	1
x5	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	1	0	-1	0
x6	0	-1	0	0	-1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
x7	0	0	0	1	1	0	0	0	0	-1	-1	0	0	0

3) Матрица достижимости графа



	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7
x1	1	1	1	1	1	1	1
x2	1	1	1	1	1	1	1
x3	1	1	1	1	1	1	1
x4	1	1	1	1	1	1	1
x5	1	1	1	1	1	1	1
x6	1	1	1	1	1	1	1
x7	1	1	1	1	1	1	1

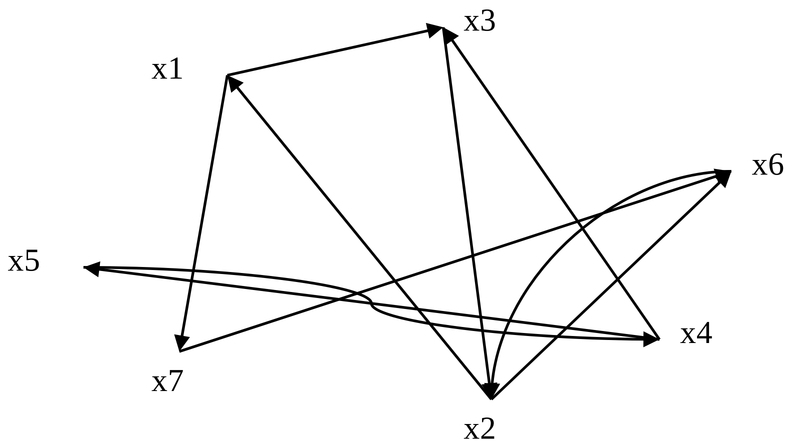
4) Матрица контр-достижимости графа



	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7
x1	1	1	1	1	1	1	1
x2	1	1	1	1	1	1	1
x3	1	1	1	1	1	1	1
x4	1	1	1	1	1	1	1
x5	1	1	1	1	1	1	1
x6	1	1	1	1	1	1	1
x7	1	1	1	1	1	1	1

Задание №6

Локальные степени вершин графа $G_1(X, A_1)$



а)

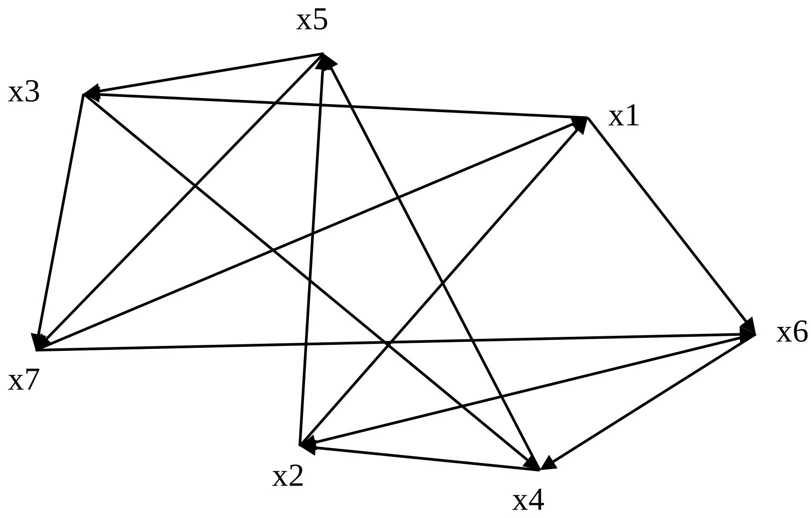
ρ1(x1) =1 ρ2(x1) =2
ρ1(x2) =2 ρ2(x2) =2
ρ1(x3) =2 ρ2(x3) =1
ρ1(x4) =1 ρ2(x4) =2
ρ1(x5) =1 ρ2(x5) =1
ρ1(x6) =2 ρ2(x6) =1
ρ1(x7) =1 ρ2(x7) =1

ρ(x1) =3, ρ(x2) =4, ρ(x3) =3, ρ(x4) =3, ρ(x5) =2, ρ(x6) =3, ρ(x7) =2.

В графе $G_1(X, A_1)$ не существует эйлеров цикл, так как не все локальные степени вершин являются четными.

В данном графе не существует эйлерова цепь, так как локальные степени вершин, не беря в рассмотрение первую и последнюю вершину, не являются четными.

б) Локальные степени вершин графа $G_2(X, A_2)$



ρ1(x1) =2 ρ2(x1) =2
ρ1(x2) =2 ρ2(x2) =2
ρ1(x3) =2 ρ2(x3) =2
ρ1(x4) =2 ρ2(x4) =2
ρ1(x5) =2 ρ2(x5) =2
ρ1(x6) =2 ρ2(x6) =2
ρ1(x7) =2 ρ2(x7) =2

ρ(x1) =4, ρ(x2) =4, ρ(x3) =4, ρ(x4) =4, ρ(x5) =4, ρ(x6) =4, ρ(x7) =4.

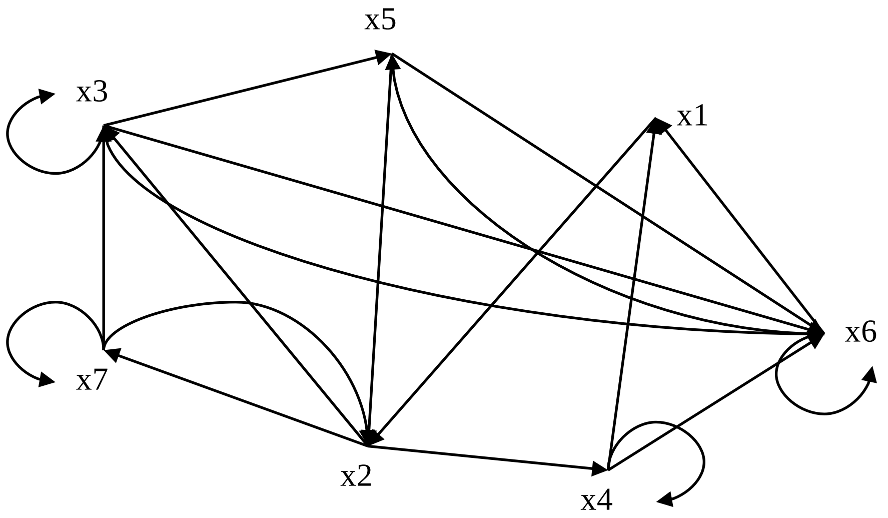
В графе $G_2(X, A_2)$ существует эйлеров цикл, так как все локальные степени вершин являются четными.

В данном графе существует эйлерова цепь, так как локальные степени вершин, не беря в рассмотрение первую и последнюю вершину, являются четными.

Задание №7

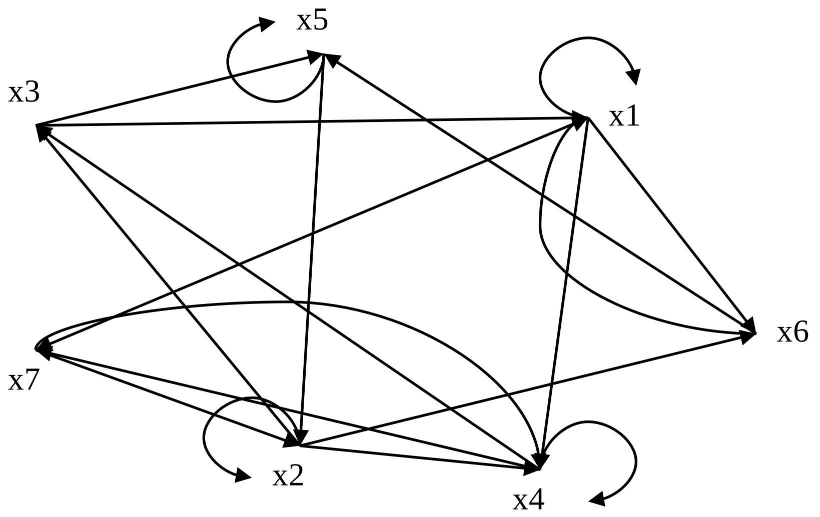
а)G1(G2(x))

	G1(x)	G2(x)	G1(G2(x))
x1	(x1,x3),(x1,x7)	(x1,x3),(x1,x6)	(x1,x2)
x2	(x2,x1),(x2,x6)	(x2,x1),(x2,x5)	(x2,x3),(x2,x7),(x2,x4)
x3	(x3,x2)	(x3,x4),(x3,x7)	(x3,x3),(x3,x5),(x3,x6)
x4	(x4,x3),(x4,x5)	(x4,x2),(x4,x5)	(x4,x1),(x4,x6),(x4,x4)
x5	(x5,x4)	(x5,x3),(x5,x7)	(x5,x2),(x5,x6)
x6	(x6,x2)	(x6,x2),(x6,x4)	(x6,x1),(x6,x6),(x6,x3),(x6,x5)
x7	(x7,x6)	(x7,x1),(x7,x6)	(x7,x3),(x7,x7),(x7,x2)



б)G2(G1(x))

	G2(x)	G1(x)	G2(G1(x))
x1	(x1,x3),(x1,x6)	(x1,x3),(x1,x7)	(x1,x4),(x1,x7),(x1,x1),(x1,x6)
x2	(x2,x1),(x2,x5)	(x2,x1),(x2,x6)	(x2,x3),(x2,x6),(x2,x2),(x2,x4)
x3	(x3,x4),(x3,x7)	(x3,x2)	(x3,x1),(x3,x5)
x4	(x4,x2),(x4,x5)	(x4,x3),(x4,x5)	(x4,x4), (x4,x7),(x4,x3)
x5	(x5,x3),(x5,x7)	(x5,x4)	(x5,x2),(x5,x5)
x6	(x6,x2),(x6,x4)	(x6,x2)	(x6,x1),(x6,x5)
x7	(x7,x1),(x7,x6)	(x7,x6)	(x7,x2), (x7,x4)



Задание №8

а) В графе G1(X,A) базой является вершина x_4, или вешнина $x_{5,}$ так как из каждой из них может быть достигнута любая вершина графа.
б) В графе G2(X,A) базой может являться вершина x_1, так как из нее может быть достигнута любая вершина графа.

Задание №9

а) Сильная компонента графа x1:{x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7}.
Z÷{x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7}

Z

б) Сильная компонента графа x1:{x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7}.
Z÷{x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7}

Z

Задание №10

Цикломатическое число показывает число независимых контуров в графовой структуре. Определяется для не ориентированного графа.

$\upsilon = m + n - r$

n – количество вершин.

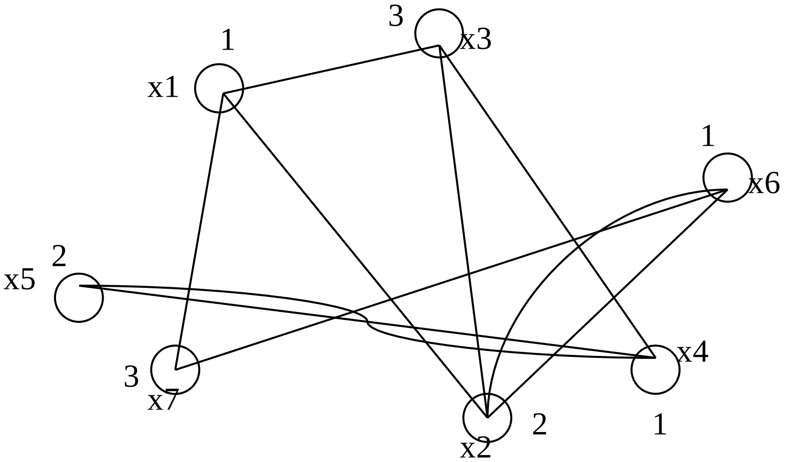
m – количество ребер.

r – число компонентов связности.

а) m = 7;	б) m = 7;
n = 10;	n = 14;
r = 1;	r = 1;
υ= 16.	υ= 20.

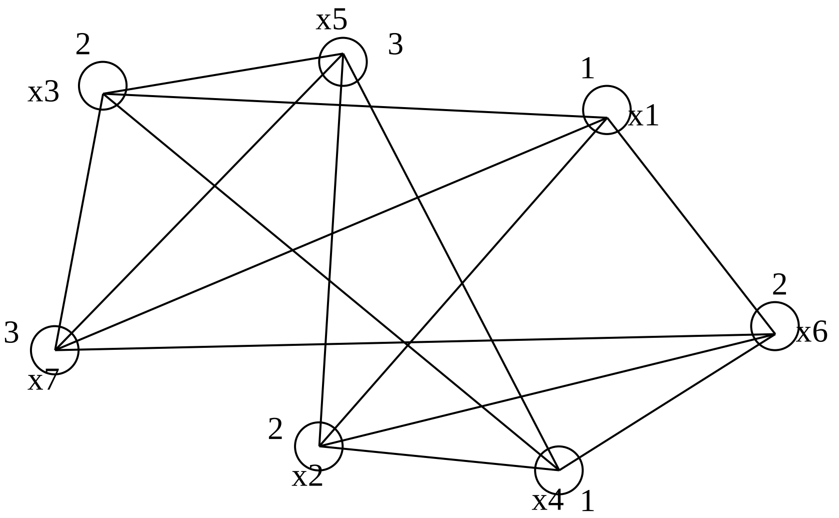
Задание №11

а)



G=3

б)



G=3

Контрольные вопросы

1. Что такое граф?
2. Перечислите способы задания графов.
3. Что называется остовным подграфом?
4. Чем отличается произвольный подграф от порожденного подграфа?
5. Приведите пример графа, содержащего эйлеров цикл.
6. Постройте граф, содержащий гамильтонов контур.
7. Определите операции, которые выполняются над графами.
8. Как определяются локальные степени вершин для ориентированного графа?
9. Какой граф называется сильно связным, привести пример.
10. Постройте несвязный граф, укажите число его компонент связности.
11. Постройте граф, содержащий базу, состоящую из двух вершин.
12. Укажите характеристики графа и их возможные применения.