МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра программной инженерии

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
____________О.Г. Локтионова
«_4_» _03__________2019 г.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ РУНГЕ-КУТТЫ

Методические указания к лабораторной работе №10
по дисциплине «Вычислительная математика»
направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.04 «Программная инженерия»

Курск 2019

УДК 519.6

Составители Е.П. Кочура, В.М. Буторин

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент кафедры программной инженерии И.Н. Ефремова

Решение системы дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты: методические указания к лабораторной работе №10 по дисциплине «Вычислительная математика» для студентов направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.04 «Программная инженерия» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост. Е.П. Кочура, В.М. Буторин. Курск, 2019. 14 с.

Содержит краткие теоретические сведения по теме лабораторной работы, цель выполнения работы, задание, пример выполнения лабораторной работы, требования к составлению отчета, список контрольных вопросов, таблицу индивидуальных заданий.

Предназначено для студентов направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.04 «Программная инженерия».

Текст печатается в авторской редакции.

Подписано в печать 04.03.19. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 0,81. Уч.-изд. л. 0,74. Тираж 100 экз. Заказ 144 .
Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет
305040, Курск, ул.50 лет Октября, 94.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №10

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ РУНГЕ-КУТТЫ

I. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

1. Изучение основных определений и положений теории дифференциальных уравнений.
2. Изучение основных численных методов решения задачи Коши.
3. Изучение методов Рунге-Кутты решения системы дифференциальных уравнений.
4. Разработка алгоритма, программы и решение на ЭВМ системы дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты.

II. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1. Основные понятия. Задача Коши. Обыкновенным дифференциальным уравнением называется уравнение, которое содержит производные от искомой функции y(x):

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{2.1}$$

где x - независимая переменная, (n) - порядок производной. Наивысший порядок n, входящий в уравнение (2.1) называется порядком дифференциального уравнения.

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = \varphi(x, c_1, c_2, ..., c_n), \tag{2.2}$$

где $c_1, c_2, ..., c_n$ - произвольные постоянные. Их количество определяется порядком уравнения.

Если значения $c_1, c_2, ..., c_n$ известны и соответственно равны $c_1^{(0)}, c_2^{(0)}, ..., c_n^{(0)}$, то из (2.2) получаем частное решение:

$$y = \varphi(x, c_1^{(0)}, c_2^{(0)}, ..., c_n^{(0)}).$$

Значения $c_1^{(0)}, c_2^{(0)}, ..., c_n^{(0)}$ определяются из условий, которые называются дополнительными условиями для уравнения (2.1).

Графики частных решений называются интегральными кривыми для данного дифференциального уравнения. Общее решение можно представить в виде семейства интегральных кривых.

Если дополнительные условия задаются в одной точке, то такая задача называется задачей Коши. Дополнительные условия в задачи Коши называются начальными условиями, а точка $x=x_0$, в которой они задаются - начальной точкой.

Если дополнительные условия задаются в двух точках a и b - “краях” отрезка [a,b], где ищется решение, то такая задача называется краевой задачей.
Дифференциальное уравнение первого порядка:

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad x \in [a, b]; \tag{2.4}$$

при заданных начальных условиях $y(x_0)=y_0$ называется задачей Коши для дифференциального уравнения первого порядка.
Если мы имеем систему дифференциальных уравнений первого порядка, то задачу Коши удобно записать в векторной форме:

$$\begin{aligned} &\vec{y}'(x) = \vec{f}(x, \vec{y}(x)), \\ &\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

2. Методы Эйлера для решения задачи Коши

2.1 Метод Эйлера первого порядка точности

В методе Эйлера решение уравнения (2.4) представляется следующим образом:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h, \qquad i = 0,1,2,... \tag{2.6}$$

где $x_i = x_0 + ih$, x_0 - начальная точка, $h = x_{i+1} - x_i$ - шаг между узлами x_i и x_{i+1}, $y_i = y(x_i)$ - значение искомой функции y(x) в узле x_i, $y_{i+1} = y(x_{i+1}) = y(x_i + h)$. При i=0 имеем:

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h, \tag{2.7}$$

где $y_0=y(x_0)$ - начальное значение искомой функции y(x).
Абсолютная погрешность метода Эйлера на n шаге равна:

$$R_n \le c_1 R_0 + c_2 h, \tag{2.8}$$

где c_1 и c_2 - константы, R_0 - погрешность начального приближения.
Согласно (2.8) метода Эйлера имеет первый порядок точности.

2.2 Модификации метода Эйлера второго порядка точности

а) метод трапеции. В этом методе решение имеет вид:

$$y_{i+1} = y_i + (h/2)[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})]. \tag{2.9}$$

Этот метод неявный, т.к. для определения значений y_{i+1} необходимо решать нелинейное уравнение (2.9). Метод трапеций имеет второй порядок точности по h.

б) метод Эйлера-Коши. Данный метод является прямым методом второго порядка точности:

$$y_{i+1} = y_i + (h/2)[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i))]. \tag{2.10}$$

в) усовершенствованный метод Эйлера второго порядка точности:

$$y_{i+1} = y_i + hf[x_i + (h/2), y_i + (h/2)f(x_i, y_i)]. \qquad (2.11)$$

3. Методы Рунге-Кутты для задачи Коши

а) расчетам формулы метода Рунге-Кутты второго порядка точности имеют следующий вид:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot k, \qquad k = \sum_{j=1}^{2} c_j k^{(j)};$$

$$k^{(1)} = f(x_i, y_i), \qquad k^{(2)} = f(x_i + \alpha h, y_i + h(k^1 / \alpha)); \qquad (2.12)$$

$$c_1 = \frac{1}{2}\alpha, \qquad c_2 = 1 - \frac{1}{2}\alpha, \qquad 0 < \alpha \le 1.$$

Данный метод является двух этапным. Вначале вычисляется значение $k^{(1)}$, а затем значения $k^{(2)}$.

При α=1 формулы (2.12) дают метод Эйлера-Коши, при α=1/2 - усовершенствованный метод Эйлера.

б) метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности. Наиболее известным из методов Рунге-Кутты является классический 4-этапный метод четвертого порядка точности:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot k_i, \qquad k_i = \frac{1}{6}(k_i^{(1)} + 2k_i^{(2)} + 2k_i^{(3)} + k_i^{(4)});$$

$$k_i^{(1)} = f(x_i, y_i), \qquad k_i^{(2)} = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_i^{(1)}), \qquad (2.13)$$

$$k_i^{(3)} = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_i^{(2)}), \qquad k_i^{(4)} = f(x_i + h, y_i + hk_i^{(3)}).$$

Этот метод прост и эффективен, когда отрезок $[x_0,x_n]$ не очень велик.

в) метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности для системы из 2-х уравнений. Имеется система из двух дифференциальных уравнений:

$$y'(x) = f(x, y(x), z(x)),$$

$$z'(x) = \varphi(x, y(x), z(x)).$$

Расчетные формулы для вычисления значений функции y(x) и z(x) имеют следующий вид:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_i^{(1)} + 2k_i^{(2)} + 2k_i^{(3)} + k_i^{(4)}),$$

$$z_{i+1} = z_i + \frac{h}{6}(q_i^{(1)} + 2q_i^{(2)} + 2q_i^{(3)} + q_i^{(4)}); \qquad (2.15)$$

где

$$
\begin{aligned}
&k_i^{(1)} = f(x_i, y_i, z_i),\\
&k_i^{(2)} = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_i^{(1)}, z_i + \frac{h}{2}q_i^{(1)}),\\
&k_i^{(3)} = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_i^{(2)}, z_i + \frac{h}{2}q_i^{(2)}),\\
&k_i^{(4)} = f(x_i + h, y_i + hk_i^{(3)}, z_i + hq_i^{(3)}),\\
&q_i(1) = \varphi(x_i, y_i, z_i);\\
&q_i^{(2)} = \varphi(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_i^{(1)}, z_i + \frac{h}{2}q_i^{(1)});\\
&q_i^{(3)} = \varphi(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_i^{(2)}, z_i + \frac{h}{2}q_i^{(2)});\\
&q_i^{(4)} = \varphi(x_i + h, y_i + hk_i^{(3)}, z_i + hq_i^{(3)}).
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

4. Автоматический выбор шага. Локальная погрешность методов Рунге-Кутты точности p на i+1 шаге допускает представление:

$$R_{i+1}^{h} \approx r(x_i, y_i) \cdot h_i^{p+1}, \tag{2.17}$$

где $r(x_i,y_i)$ - непрерывная функция, p - порядок точности.

Следовательно, можем записать:

$$y(x_{i+1}) = y_{i+1}^{h_i} + r(x_i, y_i) h_i^{p+1}. \tag{2.17}$$

Здесь $y(x_{i+1})$-точное решение, y_{i+1}^{h}-приближенное решение с шагом h.

Уменьшим шаг интегрирования в два раза. Для вычисления значения функции $y(x_{i+1})$ нам потребуется два шага. На первом шаге погрешность будет равна:

$$R_{i+\frac{1}{2}}^{\frac{h_i}{2}} = r(x_i, y_i)(\frac{h_i}{2})^{p+1},$$

а на втором:

$$
\begin{aligned}
R_{i+1}^{\frac{h_i}{2}} &= r(x_i + \frac{h_i}{2}, y_{i+\frac{1}{2}})(\frac{h_i}{2})^{p+1} =\\
&= [r(x_i, y_i) + r'_x(x_i, y_i)\frac{h_i}{2} + r'_y(x_i, y_i)(y_{i+\frac{1}{2}} - y_i)](\frac{h_i}{2})^{p+1} =\\
&= [r(x_i, y_i) + r'_x(x_i, y_i)\frac{h_i}{2} + r'_y(x_i, y_i) f(x_i, y_i)\frac{h_i}{2}](\frac{h_i}{2})^{p+1} \approx r(x_i, y_i)(\frac{h_i}{2})^{p+1}.
\end{aligned}
$$

Суммарная погрешность после двух шагов по $h_i/2$ будет равна сумме погрешностей на двух шагах:

$$R_{i+1}^{h_i} = R_{i+\frac{1}{2}}^{\frac{h_i}{2}} + R_{i+1}^{\frac{h_i}{2}} = 2r(x_i, y_i)(\frac{h_i}{2})^{p+1}. \tag{2.18}$$

Следовательно, можем записать:

$$y(x_{i+1}) = y_{i+1}^{\frac{h_i}{2}} + 2r(x_i, y_i)(\frac{h_i}{2})^{p+1}, \qquad (2.19)$$

здесь $y(x_{i+1})$ - точное решение, $y_{i+1}^{\frac{h_i}{2}}$ - приближенное решение с шагом $h_i/2$.
Вычитая из равенства (2.17) равенство (2.19) получим:

$$\left| y_{i+1}^{\frac{h_i}{2}} - y_{i+1}^{h_i} \right| = \left| r(x_i, y_i) \right| (h_i)^{p+1} [1 - \frac{1}{2^p}] = R_{i+1}^{h_i} (1 - \frac{1}{2^p}). \qquad (2.20)$$

Окончательно имеем:

$$R_{i+1}^{h} = \frac{\left| y_{i+1}^{\frac{h_i}{2}} - y_{i+1}^{h_i} \right| 2^p}{2^p - 1}. \qquad (2.21)$$

Если погрешность R_{i+1}^{h} отличается от заданной погрешности R, то шаг h заменяют на новый шаг $\overline{h}$, например, уменьшают или увеличивают в два раза.

III. ЗАДАНИЕ

1. Разработать текст программы для решения задачи Коши для системы из двух дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности.
2. Предусмотреть в программе контроль точности численного решения и автоматический выбор шага при заданной погрешности численного решения.
3. Решить задачу Коши для системы из двух дифференциальных уравнений из таблицы индивидуальных заданий.

IV. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Задание: Решить задачу Коши для системы линейных уравнений:

$$\begin{aligned} y' &= \mu \cdot y - z - \left(y^2 + z^2\right) \cdot y, \\ z' &= \mu \cdot z + y - \left(y^2 + z^2\right) \cdot z; \end{aligned} \qquad (4.1)$$

где μ-параметр на отрезке [a,b], a=0,b=100 при следующих начальных условиях

$$y_0 = y(a) = 0, \qquad z_0 = z(a) = 1; \qquad (4.2)$$

с абсолютной точностью $\varepsilon=10^{-4}$ при $\mu=0.1$.

2. Для решения задачи Коши будем использовать метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности. В расчетных формулах (2.15, 2.16) имеем:

$$f(x,y,z) = \mu \cdot y - z - \left(y^2 + z^2\right) \cdot y,$$
$$\varphi(x,y,z) = \mu \cdot z + y - \left(y^2 + z^2\right) \cdot z;$$

3. Пример программ на Delphy (в консольном режиме) и на Mathcad.

```
   program lab10;
      {Решение Задачи Коши для системы из двух уравнений}
      {методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности}
      {a - начало отрезка, где необходимо найти решение}
      {b - конец отрезка, где необходимо найти решение}
      {y0,z0 - начальные условия}
      {e - точность вычисления}
      {h0 - начальное значение шага}
var a,b,y0,z0,e,h0,x,h,k1,k2,k3,k4,q1,q2,q3,q4 : real;
var u,xx,yy,zz,yh,zh,yhh,zhh,ry,rz,m : real;
var i,p,j,kk,mm : integer;
var x,y,z : array[0..5000] of real;
var outfile : text;
label m1,m2;
          function f(x,y,z: real) : real;
          {функция трех переменных f(x,y,z)}
               begin
                  f := m*y - z - (y*y + z*z)*y;                 формула (4.1)
               end;      {f}
          function g(x,y,z: real) : real;
          {функция трех переменных}
               begin
                  g := m*z + y - (y*y + z*z)*z;                 формула (4.1)
               end;      {g}
      begin
          assign(outfile,'d:\lab.dat');          объявление внешнего файла lab.dat
          rewrite(outfile);                      открытие внешнего файла для записи
        writeln('Введите значение a и значение b');
      readln (a,b);
        writeln('Введите значение y0 и значение z0');
      readln (y0,z0);
        writeln('Введите точность вычислений e');
      readln (e);
        writeln('Введите шаг h0');
      readln (h0);
            p:=4;
```

```
i:=0;
x[0]:=a;
y[0]:=y0;
z[0]:=z0;
  while x[i]<b do begin
    i:=i+1;
    kk:=0;
    mm:=0;
m2:h:=h0;
    xx:=x[i-1];
    yy:=y[i-1];
    zz:=z[i-1];
    j:=0;
m1:k1:=f(xx,yy,zz);
    q1:=g(x,yy,zz);
    k2:=f(xx+h/2,yy+k1*h/2,zz+q1*h/2);                formулы (2.16)
    q2:=g(xx+h/2,yy+k1*h/2,zz+q1*h/2);
    k3:=f(xx+h/2,yy+k2*h/2,zz+q2*h/2);
    q3:=g(xx+h/2,yy+k2*h/2,zz+q2*h/2);
    k4:=f(xx+h,yy+k3*h,zz+q3*h);
    q4:=g(xx+h,yy+k3*h,zz+q3*h);
     if j=0 then begin
       yh:=yy+h*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;        вычисление с шагом h
       zh:=zz+h*(q1+2*q2+2*q3+q4)/6;
       h:=h/2;                             уменьшение шага в два раза
       j:=1;
       goto m1;                      переход на вычисление с шагом h/2
      end;
     if j=1 then begin
       yhh:=yy+h*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6.;     первый шаг с шагом h/2
       zhh:=zz+h*(q1+2*q2+2*q3+q4)/6.;
       xx:=xx+h;
       yy:=yhh;
       zz:=zhh;
       j:=2;
      goto m1;                      переход на второй шаг с шагом h/2
     end;
     if j=2 then begin
       yhh:=yy+h*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;      второй шаг с шагом h/2
       zhh:=zz+h*(q1+2*q2+2*q3+q4)/6;
     end;
    u:=exp(p*ln(2));                       вычисление 2 в степени p
```

```
            ry:=(abs(yhh-yh)*u)/(u-1.);
            rz:=(abs(zhh-zh)*u)/(u-1.);
              if (kk=0) and ((ry>e) or (rz>e)) then begin
                mm:=1;
                h0:=h0/2;        автоматическое уменьшение шага в два раза
                goto m2;
               end;
              if (mm=0) and ((ry<e) and (rz<e)) then begin
                kk:=1;
                h0:=2*h0;        автоматическое увеличение шага в два раза
                goto m2;
               end;
             x[i]:=x[i-1]+h0;
             y[i]:=yh;
             z[i]:=zh;
          writeln('i=',i,'    h0=',h0,'    x=',x[i],'    y=',y[i],'    z=',z[i]);
          writeln(outfile,'i=',i,'    h0=',h0,'    x=',x,'    y=',y[i],'    z=',z[i]);
        end;
      close(outfile);                              закрытие внешнего файла
   end.
```

Решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений пераого порядка методом Рунге-Кутты с автоматическим выбором шага.

$\mu := 0.1$ -параметр

$f(x,y,z) := \mu \cdot y - z - \left(y^2 + z^2\right) \cdot y$ $\qquad$ $g(x,y,z) := \mu \cdot z + y - \left(y^2 + z^2\right) \cdot z$

$:= 0$ $\qquad$ $b := 100$ $\qquad$ $y0 := 0$ $\qquad$ $z0 := 1$

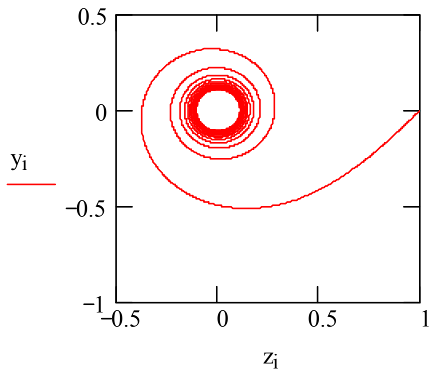
$p := 4$ $\qquad$ $h := 0.1$ $\qquad$ $\varepsilon := 10^{-5}$ $\qquad$ $pp := \dfrac{1}{1 - 0.5^p}$ $\qquad$ $d6 := \dfrac{1}{6}$

```
F(f,g,h) := | xx_0 ← a
            | yy_0 ← y0
            | zz_0 ← z0
            | i ← 0
            | while xx_i ≤ b
            |     i ← i + 1
            |     for j ∈ 1 .. 3
            |         xx_i ← xx_{i−1} + h
            |         k1 ← f(xx_{i−1}, yy_{i−1}, zz_{i−1})
            |         q1 ← g(xx_{i−1}, yy_{i−1}, zz_{i−1})
            |         k2 ← f(xx_{i−1} + 0.5·h, yy_{i−1} + k1·0.5·h, zz_{i−1} + q1·0.5·h)
            |         q2 ← g(xx_{i−1} + 0.5·h, yy_{i−1} + k1·0.5·h, zz_{i−1} + q1·0.5·h)
            |         k3 ← f(xx_{i−1} + 0.5·h, yy_{i−1} + k2·0.5·h, zz_{i−1} + q2·0.5·h)
            |         q3 ← g(xx_{i−1} + 0.5·h, yy_{i−1} + k2·0.5·h, zz_{i−1} + q2·0.5·h)
            |         k4 ← f(xx_{i−1} + h, yy_{i−1} + k3·h, zz_{i−1} + q3·h)
            |         q4 ← g(xx_{i−1} + h, yy_{i−1} + k3·h, zz_{i−1} + q3·h)
            |         if j = 1
            |             yy_i ← yy_{i−1} + d6·h·(k1 + 2·k2 + 2·k3 + k4)
            |             zz_i ← zz_{i−1} + d6·h·(q1 + 2·q2 + 2·q3 + q4)
            |             h ← 0.5·h
            |         otherwise
            |             if j = 2
            |                 yh1 ← yy_{i−1} + d6·h·(k1 + 2·k2 + 2·k3 + k4)
            |                 zh1 ← zz_{i−1} + d6·h·(q1 + 2·q2 + 2·q3 + q4)
            |                 xx_{i−1} ← xx_i
            |             if j = 3
            |                 yh1 ← yh1 + d6·h·(k1 + 2·k2 + 2·k3 + k4)
            |                 zh1 ← zh1 + d6·h·(q1 + 2·q2 + 2·q3 + q4)
            |                 xx_{i−1} ← xx_{i−1} − h
            |                 h ← 2·h
            |     ry ← pp·|yh1 − yy_i|
            |     rz ← pp·|zh1 − zz_i|
            |     if ry > ε ∧ rz > ε ∧ h ≥ ε/2
            |         h ← 0.51·h
            |         i ← i − 1
            |     h ← 2·h  otherwise
            |     FF_{i,0} ← xx_i
            |     FF_{i,1} ← yy_i
            |     FF_{i,2} ← zz_i
            | FF_{0,0} ← xx_0
            | FF_{0,1} ← yy_0
            | FF_{0,2} ← zz_0
            | FF_{0,3} ← i
```

$cc := F(f, g, h)$ $\quad n := cc_{0,3}$ $\quad i := 0..n$

$x_i := cc_{i,0}$ $\quad y_i := cc_{i,1}$ $\quad z_i := cc_{i,2}$

$n = 5.418 \times 10^3$



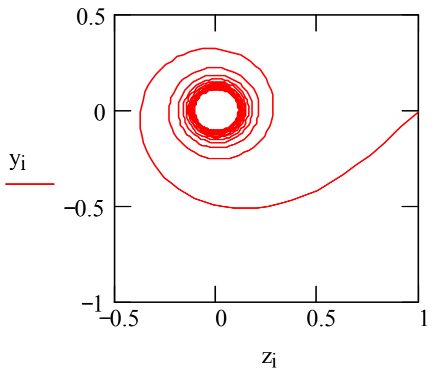
Проверка встроенной программой Mathcad

$$x \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D(t, x) := \begin{bmatrix} \mu \cdot x_0 - x_1 - \left[(x_0)^2 + (x_1)^2 \right] \cdot x_0 \\ \mu \cdot x_1 + x_0 - \left[(x_0)^2 + (x_1)^2 \right] \cdot x_1 \end{bmatrix}$$

$Z := \mathrm{rkfixed}(x, a, b, 1000, D)$ $\quad i := 0..999$

$y_i := Z_{i,1}$ $\quad z_i := Z_{i,2}$



V. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

1.Название лабораторной работы.
2.Индивидуальное задание.
3.Текст программы.
4.Таблица результатов расчета на ЭВМ.

Замечание: Пункты 1-4, а также таблица пункта 5 без численных результатов должны быть оформлены до начала выполнения лабораторной работы. Результаты программы в Delphy нужно вывести в виде графика используя файл с данными и соответствующую программу для построения графиков.

VI. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое обыкновенное дифференциальное уравнение?
2. Какое дифференциальное уравнение называется разрешимым относительно старшей производной.
3. Что называется линейным дифференциальным уравнением?
4. Определение частного и общего решения дифференциального уравнения.
5. Задача Коши.
6. Краевая задача
7. Определение интегральной кривой.
8. Методы Эйлера первого и второго порядка точности.
9. Модификации метода Эйлера.
10. Методы Рунге-Кутты второго и четвертого порядка точности.
11. Методы Рунге-Кутты для систем дифференциальных уравнений.
12. Автоматический контроль погрешности и выбор шага численного решения.
13. Метод Адамса-Бошфорта.
14. Метод Адамса-Моултона.
15. Метод прогноза и коррекции.
16. Можно ли в методах Адамса контролировать точность расчетов с помощью изменения шага h?

VII. ТАБЛИЦА ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Решить задачу Коши $y'=f(x,y,z)$, $z'=\varphi(x,y,z)$; при $y_0=y(a)$, $z_0=z(a)$, на отрезке $[a,b]$ с заданной абсолютной погрешностью ε.

№	f(x,y,z)	φ(x,y,z)	y(a)	z(a)	a	b	ε
1.	$\mathrm{arctg}1/(1+y^2+z^2)$	$\sin(yz)$	1	1	-1	1	10^{-3}
2.	$\mathrm{arctg}(x^2+z^2)$	$\sin(x+y)$	0,5	1,5	0	2	10^{-4}
3.	x^2y+z	$\cos(y+xz)$	-1	1	0	4	10^{-3}
4.	x^2+z^2	xyz	1	2	0	5	10^{-4}
5.	$\sin z$	$\cos y$	0,5	-0,5	1	3	10^{-3}
6.	$x\cos(x+z)$	$\sin(y-z)$	-0,6	2	2	5	10^{-4}
7.	$\sin y\cos^3 z$	$\cos y\cos z$	1	0	-1	3	10^{-3}
8.	$2\sqrt{3x^2+y^2+z}$	$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$	0,5	1,2	0	2	10^{-4}
9.	$(y+x)/e^{y+z}$	$(z-x)/e^{y+z}$	1	-1	2	4	10^{-3}
10.	$(3+e^{-z})^{-1}$	$(2+e^{-y})^2$	0	-3	2	5	10^{-4}
11.	$\cos(yz)$	$\sin(y+z)$	2	1	0	2	10^{-3}
12.	$y\ln x$	$y+z^2$	-2	-1	1	4	10^{-4}
13.	$x+y^2$	$(y-z)^2$	3	1	-1	1	10^{-4}
14.	y^2+z^2	yz	-1	1	0	4	10^{-3}
15.	e^{yz}	e^{-yz}	0	0	0	2	10^{-4}
16.	$y+z+y^3+z^3$	$y-z+z^3+y^3$	0	1	1	20	10^{-4}
17.	$y+z^2+y^3+z^3$	$-y^2+z^2+y^3+z^3$	0	-2	0	10	10^{-4}
18.	$y+z+(z+y)yz$	$y-z+(z+y)yz$	1	1	2	12	10^{-3}
19.	$\sin y+\cos^3 z$	$\sin^3 y+\cos^3 z$	1	0	0	5	10^{-4}
20.	$\sin y^2+\cos^3 z^2$	$\sin y^2-\cos z^2$					10^{-3}