МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра информационных систем и технологий

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
______________ О.Г. Локтионова
«_16__» ___декабря____ 2019 г.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Методические указания к лабораторным работам для бакалавров
направления 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование
информационных систем

Курск 2019

УДК 519.6
Составитель: Ю.А. Халин

Рецензент
Доктор физико-математических наук, доцент Н.А. Хохлов

Численные методы: методические указания к лабораторным работам / Юго-Зап. гос. ун-т; сост. Ю.А. Халин. Курск, 2019. 16 с. Библиогр.: с. 16.

Описываются численные методы решения вычислительных задач. Изложены краткие теоретические сведения из вычислительной математики, приведены примеры решения задач, а также задачи для самостоятельного решения.

Методические рекомендации предназначены для студентов, обучающихся по направлениям 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем.

Текст печатается в авторской редакции.

Подписано в печать 16.12.2019 . Формат 60х84 1/16.
Усл.печ. л. 1,59 п.л . Уч.-изд. л. 1,28 . Тираж 100 экз. Заказ 988. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Лабораторная работа № 1
Аппроксимация функций

Методом наименьших квадратов найти коэффициенты аппроксимирующего многочлена первой степени для опытных данных, заданных в виде таблицы. Оценить относительную погрешность аппроксимации. Построить график аппроксимирующей функции и опытные данные.

$N = 1$

i	x_i	y_i
1	1,0	–0,1
2	1,5	1,7
3	2,0	8,7
4	2,5	10

$N = 2$

i	x_i	y_i
1	0,5	0,5
2	1,5	–0,5
3	2,5	–1,5
4	3,5	–2,5

$N = 3$

i	x_i	y_i
1	0,1	1,0
2	0,2	1,5
3	0,3	2,5
4	0,4	4,0

$N = 4$

i	x_i	y_i
1	0	–20
2	10	–10
3	20	0
4	30	30

$N = 5$

i	x_i	y_i
1	1,0	0,6
2	2,0	0,7
3	3,0	0
4	4,0	–0,2

$N = 6$

i	x_i	y_i
1	0	5,0
2	0,2	3,0
3	0,4	–1,0
4	0,6	–5,0

$N = 7$

i	x_i	y_i
1	0,5	–0,8
2	1,5	–0,5
3	2,5	0
4	3,5	0,7

$N = 8$

i	x_i	y_i
1	0	2,0
2	0,1	0
3	0,2	–2,0
4	0,3	–4,0

$N = 9$

i	x_i	y_i
1	0	10
2	1,0	20
3	2,0	35
4	3,0	50

$N = 10$

i	x_i	y_i
1	1,5	10
2	2,5	7
3	3,5	5
4	4,5	2

Пример выполнения

Используя метод наименьших квадратов, найти коэффициенты аппроксимирующего многочлена первой степени для опытных данных, заданных таблицей

Вычислить относительную погрешность аппроксимации. Построить график аппроксимирующей функции и опытные данные.

i	x_i	y_i
1	1,5	–4
2	2,0	0
3	2,5	3,5
4	3,0	6,5

Решение. Составим расчетную таблицу, в которую внесем исходные данные:

N	x_i	x_i^2	y_i	$x_i y_i$	$\hat{y}_i$	$\hat{y}_i - y_i$	$\dfrac{\hat{y}_i - y_i}{y_i}$
1	1,5	2,25	–4,0	–6,0	–3,75	0,25	–0,06
2	2,0	4,00	0	0	–0,25	–0,25	–
3	2,5	6,25	3,5	8,75	3,25	–0,25	–0,07
4	3,0	9,00	6,5	19,50	6,75	0,25	0,04
Σ	9,0	21,50	6,0	22,25	–	–	–
Σ/n	2,25	5,375	1,5	5,563	–	–	–

Сформируем систему уравнений

$$\begin{cases} a_0 + 2{,}25a_1 = 1{,}5, \\ 2{,}25a_0 + 5{,}375a_1 = 5{,}563 \end{cases}$$

Решим эту систему

$a_0 = 1{,}5 - 2{,}25a_1$, подставим во второе уравнение системы

$2{,}25(1{,}5 - 2{,}25a_1) + 5{,}375a_1 = 5{,}563,$

$3{,}375 - 5{,}0625a_1 + 5{,}375a_1 = 5{,}563,$

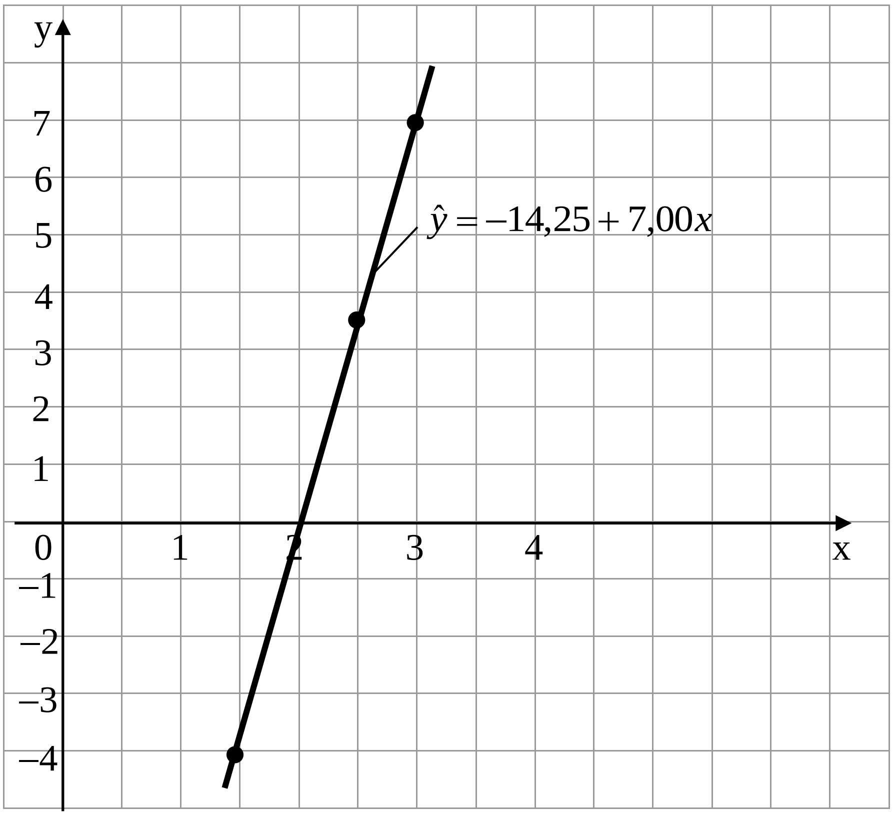
$0{,}3125a_1 = 2{,}188 \quad \to \quad a_1 = 7{,}00$

$a_0 = 1{,}5 - 2{,}25 \cdot 7{,}00 = -14{,}25 \to a_0 = -14{,}25.$

Таким образом, аппроксимирующей многочлен имеет вид:

$\hat{y} = -14{,}25 + 7{,}00x$.

Вычислим значения $\hat{y}_i$ и занесем их в расчетную таблицу. Построим график аппроксимирующей функции



Лабораторная работа № 2
Методы решения нелинейных уравнений

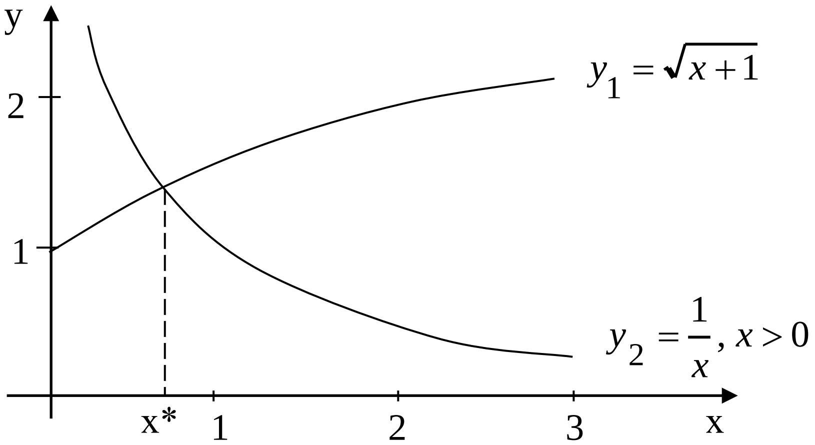
Графически отделить указанные корни уравнений. Найти с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$ все корни уравнений, пользуясь методом секущих (1), методом Ньютона (2), либо методом итераций (3).

1. $x^2 - \cos \pi x = 0, \quad x > 0$ (1)
2. $x - \cos^2 \pi x = 0,$ все корни (2)
3. $(x-1)^2 - 0{,}5e^x = 0,$ все корни (3)
4. $(x-1)^2 - e^{-x} = 0, \quad x > 0$ (1)
5. $e^{-x} - 2 + x^2 = 0, \quad x > 0$ (2)
6. $2\sqrt{x} - \cos \dfrac{\pi x}{2} = 0,$ все корни (3)
7. $x^2 - \sin \pi x = 0$, все корни (1)
8. $\sqrt{x} - 2\cos \dfrac{\pi x}{2} = 0$, первый положительный корень (2)
9. $3x - tg\, \dfrac{\pi x}{4} = 0,$ первый положительный корень (3)
10. $x^2 - \cos^2 \pi x = 0, \quad x > 0$ (1)

Пример выполнения

Графически отделить корни уравнения $\sqrt{x+1}-\dfrac{1}{x}=0,\ x>0$. Найти с точностью $\varepsilon=10^{-5}$ все корни уравнений, пользуясь методом секущих, либо методом Ньютона, либо методом итераций.

Решение. Преобразовав исходное уравнение в виде $\sqrt{x+1}=\dfrac{1}{x},\ x>0$, построим по точкам левую и правую части уравнения.



Из построения видно, что корень один $x^*\in[0{,}7;\,0{,}9]$.

1. Уточним значение корня, используя метод секущих. Запишем $f(x)=\sqrt{x+1}-\dfrac{1}{x}$, проведя процедуру отделения корня, нашли $a=0{,}7$, $b=0{,}9$, $f(a)=f(0{,}7)=-0{,}125$; $f(b)=f(0{,}9)=0{,}267$.

Найдем вторую производную: $f'(x)=0{,}5(x+1)^{-1/2}+x^{-2}$, $f''(x)=-(0{,}25(x+1)^{-3/2}+2x^{-3})$; в промежутке [0,7; 0,9] выполняется неравенство $f''(x)<0$, поэтому используем формулу (при $f(a)f''(a)>0$), приняв $x_0=b=0{,}9$, $x_{i+1}=a+\dfrac{f(a)}{f(a)-f(x_i)}(x_i-a)$.

Все вычисления сведем в табл.1.

Таблица 1

i	x_i	$f(x_i)$	(x_i-a)
0	0,9	0,267	0,2
1	0,76377	0,01877	0,06377
2	0,75544	0,00120	0,05544
3	0,75491	0,00007	0,05491
4	0,75487	0,000003	–

Получим значение $x^*\approx0{,}75487$.

2. Решим эту же задачу методом Ньютона. В качестве исходных данных будем использовать результаты предыдущего расчета. Имеем: $a = 0{,}7; b = 0{,}9,\ \ f(0{,}7) = -0{,}125;\ \ f(0{,}9) = 0{,}267;\ \ f''(0{,}7) < 0$.

Будем использовать формулу: $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$, в качестве начальной точки возьмем $x_0 = a$, т.к. $f(a) \cdot f''(a) > 0$. Предварительно определим значение

$$f'(0{,}7) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2\sqrt{0{,}7+1}} + \frac{1}{0{,}7^2} = 2{,}42430.$$

Расчеты сведем в табл.2.

Таблица 2

i	x_i	$f(x_i)$
0	0,7	–0,125
1	0,75156	–0,00710
2	0,78085	0,05382
3	0,75864	0,00800
4	0,75534	0,00099
5	0,75493	0,00012
6	0,75488	0,00001

Получили $x^* \approx 0{,}75488$.

Примечание: В расчетах использовали постоянное значение первой производной $f'(0{,}7) = 2{,}42430$.

3. Решим задачу методом простой итерации, приведя уравнение к виду, удобному для итераций. Функция $f(x) = \sqrt{x+1} - \dfrac{1}{x}$; $x^* \in [0{,}7;\, 0{,}9]$; $f'(x)_{\max} = f'(0{,}7) = 2{,}4243$. Функцию $\varphi(x)$ найдем из соотношения $\varphi(x) = x - f(x)/k$, считая для улучшения сходимости $|k| \ge 0{,}5 f'(x)_{\max}$, знак k возьмем таким же, что и знак $f'(x)$ в промежутке $[0{,}7;\, 0{,}9]$. $k = 0{,}5 \cdot 2{,}4243 = 1{,}212$. Принимаем $k = 1{,}5$. Тогда

$$\varphi(x) = x - f(x)/1{,}5 = x - 0{,}67\left(\sqrt{x+1} - \frac{1}{x}\right).$$

За начальное приближение возьмем $x_0 = 0{,}7$, все остальные приближения определим по формуле

$$x_{i+1} = x_i - 0{,}67\left(\sqrt{x_i + 1} - \frac{1}{x_i}\right).$$

Расчеты сведем в табл.3

Таблица 3

i	x_i	$\varphi(x_i) = x_{i+1}$
0	0,7	0,78357
1	0,78357	0,74384
2	0,74384	0,75980
3	0,75980	0,75280
4	0,75280	0,75577
5	0,75577	0,75449
6	0,75449	0,75504
7	0,75504	0,75481
8	0,75481	0,75490
9	0,75490	0,75486
10	0,75486	0,75488
11	0,75488	0,75487

Получили на 11-й итерации $x^* = 0{,}75487$, что совпадает с расчетами другими методами.

Лабораторная работа № 3
Численное интегрирование

Вычислить интеграл с использованием указанной в задании квадратурной формулы, при этом на всем отрезке интегрирования первоначально использовать пять узлов. Уточнить значение интеграла и оценить погрешность результата методом двойного пересчета.

1. $\int\limits_1^2 \left(2x^2 + \frac{2}{x^4}\right) dx,$ метод трапеций. Ответ: 5,2500.
2. $\int\limits_1^4 \sqrt{x}\, dx,$ метод Симпсона. Ответ: 4,6667.
3. $\int\limits_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}},$ метод трапеций. Ответ: 2,0000.
4. $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\, dx,$ метод Симпсона. Ответ: 1,3333.
5. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}},$ метод трапеций. Ответ: $(2 - \ln 2) = 1{,}3068$.
6. $\int\limits_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx,$ метод Симпсона. Ответ: 3,1416.
7. $\int\limits_0^5 \frac{dx}{2x + \sqrt{3x+1}},$ метод трапеций. Ответ: 0,9437.
8. $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\, dx,$ метод Симпсона. Ответ: 8,3863.
9. $\int\limits_4^9 \frac{x dx}{(1+x^2)^3},$ метод трапеций. Ответ: 0,1875.
10. $\int\limits_0^9 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\, dx,$ метод Симпсона. Ответ: 5,7726.

Пример выполнения

Вычислить $\int_1^4 \left(2x + \frac{3}{\sqrt{x}}\right) dx$ с использованием квадратурной формулы, указанной в задании, первоначально взяв пять узлов. Уточнить значение интеграла и оценить погрешность результата методом двойного пересчета.

Решение. Определяем координаты узлов при $n = 4$ $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{4} = 0{,}75;$ $x_0 = a = 1{,}0;$ $x_1 = x_0 + \Delta x = 1{,}75, \ldots, x_n = b = 4{,}0$.

$f(x) = 2x + \frac{3}{\sqrt{x}}$. Вычислим значения подынтегральной функции в узлах интегрирования (табл.1)

Таблица 1

i	0	1	2	3	4
x_i	1,0	1,75	2,5	3,25	4,0
y_i	5,0	5,76779	6,89737	8,16410	9,5

20,82926

1. *Вычислим интеграл методом трапеций*

$$I_n = \Delta x\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right) = 0{,}75(0{,}5(5{,}0 + 9{,}5) + 20{,}82926) = 21{,}05945.$$

Удвоим количество узлов $n = 8$; $\Delta x = \frac{4-1}{8} = 0{,}375$, $x_0 = a = 1{,}0$;

$x_1 = x_0 + \Delta x = 1{,}375; \ldots, x_n = x_8 = 4{,}0.$

Вычислим значение функции в узлах интегрирования (табл.2)

Таблица 2

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	1,0	1,375	1,75	2,125	2,5	2,875	3,25	3,625	4,0
y_i	5,0	5,30841	5,76779	6,30798	6,89737	7,51930	8,16410	8,82567	9,5

48,79062

Вычислим интеграл $I_{n/2} = 0{,}375(0{,}5(5{,}0 + 9{,}5) + 48{,}79062) = 21{,}01523$.

Оценим погрешность результата

$$R_n = \frac{|I_n - I_{n/2}|}{15} = \frac{21{,}05945 - 21{,}01523}{15} = 0{,}0029,$$

таким образом, в последнем результате верными надо оставить два знака,

$$\int_1^4 \left(2x + \frac{3}{\sqrt{x}}\right) dx \approx 21{,}01.$$

2. *Вычислим интеграл методом Симпсона.*

Решение. Определим координаты узлов при $n = 4$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{4} = 0{,}75; \quad x_0 = a = 1{,}0; \quad x_1 = x_0 + \Delta x = 1{,}75, \ldots, x_n = b = 4{,}0.$$

$f(x) = 2x + \dfrac{3}{\sqrt{x}}$. Вычислим значения подынтегральной функции в узлах интегрирования (табл.3)

Таблица 3

i	0	1	2	3	4
x_i	1,0	1,75	2,5	3,25	4,0
y_i	5,0	5,76779	6,89737	8,16410	9,5

Вычислим интеграл по формуле Симпсона

$$I_n = \frac{0{,}75}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_n) =$$

$$= \frac{0{,}75}{3}(5{,}0 + 4(5{,}76779 + 8{,}16410) + 2 \cdot 6{,}89737 + 9{,}5) = 21{,}00557.$$

Удвоим количество узлов $n = 8;$ $\Delta x = \dfrac{4-1}{8} = 0{,}375,$ $x_0 = a = 1{,}0;$ $x_1 = 1{,}375, \ldots, x_n = x_8 = 4{,}0$. Вычислим значения $f(x)$ в узлах (табл. 4)

Таблица 4

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	1,0	1,375	1,75	2,125	2,5	2,875	3,25	3,625	4,0
y_i	5,0	5,30841	5,76779	6,30798	6,89737	7,51930	8,16410	8,82567	9,5

Подставим значения y_i в формулу Симпсона

$$I_{n/2} = \frac{0{,}375}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + 2y_6 + 4y_7 + y_8) =$$

$$= \frac{0{,}375}{3}(5{,}0 + 9{,}5 + 4(5{,}30841 + 6{,}30798 + 7{,}51930 + 8{,}82567) +$$

$$+ 2(5{,}76779 + 6{,}89737 + 8{,}16410)) = 21{,}00049.$$

Оценим погрешность результата

$$R_n = \frac{|I_n - I_{n/2}|}{15} = \frac{|21{,}00557 - 21{,}00049|}{15} = 0{,}0003.$$

Таким образом, в качестве результата вычисления интеграла $\displaystyle\int_1^4 \left(2x + \frac{3}{\sqrt{x}}\right) dx \approx 21{,}000.$

Лабораторная работа № 4
Методы решения дифференциальных уравнений

Методом Рунге-Кутты четвертого порядка найти частное решение дифференциального уравнения на отрезке [a,b] с шагом 0,2.

1. $y' = e^{x} + y, \quad y(0) = 1, \quad a = 0, \quad b = 1.$ Ответ: $y = (x+1)\,e^{x}$.

2. $y' = 2x(x^{2} + y), \quad y(0) = 0, \quad a = 0, \quad b = 1.$ Ответ: $y = x^{2} + 1 - e^{x^{2}}$.

3. $y' = y + \dfrac{e^{x}}{x}, \quad y(1) = 0, \quad a = 1, \quad b = 2.$ Ответ: $y = e^{x} \ln x$.

4. $y' = \dfrac{1 - xy}{1 - x^{2}}, \quad y(0) = 1, \quad a = 0, \quad b = 1.$ Ответ: $y = x + \sqrt{1 - x^{2}}$.

5. $y' = \dfrac{2xy + 3}{x^{2}}, \quad y(1) = -1, \quad a = 1, \quad b = 2.$ Ответ: $y = -1/x$.

6. $y' = xe^{-x^{2}} - 2xy, \quad y(0) = 0, \quad a = 0, \quad b = 1.$ Ответ: $y = \dfrac{x^{2}}{2e^{x^{2}}}$.

7. $y' = \dfrac{y}{x \ln x}, \quad y(2) = \ln 2, \quad a = 2, \quad b = 3.$ Ответ: $y = \ln x$.

8. $y' = \dfrac{2(x^{4} + y)}{x}, \quad y(1) = 0, \quad a = 1, \quad b = 2.$ Ответ: $y = x^{4} - x^{2}$.

9. $y' = \dfrac{-(1 + xy)}{x^{2}}, \quad y(1) = 0, \quad a = 1, \quad b = 2.$ Ответ: $y = -\dfrac{\ln x}{x}$.

10. $y' = y - \dfrac{2x}{y}, \quad y(0) = 1, \quad a = 0, \quad b = 1.$ Ответ: $y = \sqrt{2x + 1}$.

Пример выполнения задания 5.

Методом Рунге-Кутты четвертого порядка найти частное решение дифференциального уравнения $y' = \dfrac{\ln x - y + 1}{x}$, при начальных условиях $x_0 = 1$; $y_0 = 0$ на интервале [1;2] с шагом 0,2.

Решение. Определим число узлов и шаг интегрирования.

Имеем: $a = 1$; $b = 2$; $\Delta x = 0{,}2$

$x_0 = a = 1$; $x_1 = x_0 + \Delta x = 1{,}2; \ldots; x_5 = 2{,}0$.

Для расчетов будем использовать следующую формулу

$$y_{i+1} = y_i + \frac{k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}}{6},$$

где

$$k_1^{(i)} = \Delta x \cdot F(x_i, y_i),$$

$$k_2^{(i)} = \Delta x \cdot F(x_i + \frac{\Delta x}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}),$$

$$k_3^{(i)} = \Delta x \cdot F(x_i + \frac{\Delta x}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}),$$

$$k_4^{(i)} = \Delta x \cdot F(x_i + \Delta x, y_i + k_3).$$

На первом шаге

$$k_1^{(0)} = 0{,}2\left(\frac{\ln x_0 - y_0 + 1}{x_0}\right) = 0{,}2\left(\frac{\ln 1 - 0 + 1}{1}\right) = 0{,}2;$$

$$k_2^{(0)} = 0{,}2\left(\frac{\ln(x_0 + \Delta x/2) - (y_0 + k_1^{(0)}/2) + 1}{x_0 + \Delta x/2}\right) = 0{,}2\left(\frac{\ln 1{,}1 - (0 + 0{,}1) + 1}{1{,}1}\right) = 0{,}1810;$$

$$k_3^{(0)} = 0{,}2\left(\frac{\ln(x_0 + \Delta x/2) - (y_0 + k_2^{(0)}/2) + 1}{x_0 + \Delta x/2}\right) = 0{,}2\left(\frac{\ln 1{,}1 - (0 + 0{,}181/2) + 1}{1{,}1}\right) = 0{,}1827;$$

$$k_4^{(0)} = 0{,}2\left(\frac{\ln(x_0 + \Delta x) - (y_0 + k_3^{(0)}) + 1}{x_0 + \Delta x}\right) = 0{,}2\left(\frac{\ln 1{,}2 - (0 + 0{,}1827) + 1}{1{,}2}\right) = 0{,}1666.$$

$$y_1 = y_0 + \frac{k_1^{(0)} + 2k_2^{(0)} + 2k_3^{(0)} + k_4^{(0)}}{6} =$$

$$= 0 + \frac{(0{,}20 + 2 \cdot 0{,}1810 + 2 \cdot 0{,}1827 + 0{,}1666)}{6} = 0{,}18233.$$

Дальнейшие расчеты проведем во вспомогательной табл.1.

Таблица 1

i	x_i	y_i	$F(x_i, y_i)$	$k_i^{(i)}$	Δy
0	1,0	0	1,0	0,2	0,2
	1,1	0,1	0,9050	0,1810	0,3620
	1,1	0,090	0,4525	0,1827	0,3654
	1,2	0,1827	0,8330	0,1666	0,1666
Δy_0				$\frac{1}{6}\sum \Delta y$	0,1823
1	1,2	0,1823	0,8333	0,1667	0,1667
	1,3	0,2656	0,7667	0,1533	0,3067
	1,3	0,2590	0,7718	0,1544	0,3087
	1,4	0,3366	0,7141	0,1428	0,1428
Δy_1					0,1541
2	1,4	0,3364	0,7143	0,1429	0,1429
	1,5	0,4079	0,6650	0,1330	0,2660
	1,5	0,4030	0,6683	0,1337	0,2673
	1,6	0,4701	0,6249	0,1250	0,1250
Δy_2					0,1335
3	1,6	0,4699	0,6250	0,1250	0,1250
	1,7	0,5324	0,5871	0,1174	0,2348
	1,7	0,5287	0,5893	0,1179	0,2357
	1,8	0,5878	0,5555	0,1111	0,1111
Δy_3					0,1177
4	1,8	0,5877	0,5555	0,1111	0,1111
	1,9	0,6433	0,5255	0,1051	0,2102
	1,9	0,6403	0,5271	0,1054	0,2109
	2,0	0,6931	0,4999	0,0999	0,0999
Δy_4					0,1054
5	2,0	0,6931	–	–	–

Результаты интегрирования запишем в итоговую таблицу 2.

Таблица 2

i	0	1	2	3	4	5
x_i	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
y_i	0,0	0,1823	0,3364	0,4699	0,5877	0,6931

Список литературы

1. Буторин, В. М. Численные методы [Текст] : ученое пособие : [для студ., обучающихся по направлению подготовки бакалавров 01.03.02] / В. М. Буторин, Т. В. Алябьева, А. А. Черепанов ; Юго-Зап. гос. ун-т. – Курск : ЮЗГУ, 2015. - 167с.
2. Орешкова М. Н. Численные методы: теория и алгоритмы [Электронный ресурс]: учебное пособие / САФУ, 2015 – 120 с. // Режим доступа – https://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=436397
3. Численные методы [Электронный ресурс] : учебное пособие : [/ В. А. Милых, Ю. А. Халин ; Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Юго-Западный государственный университет". - Курск : ЮЗГУ, 2013. - 155 с.
4. Демидович, Б. П. Основы вычислительной математики [Текст] : учебное пособие для втузов / Б. П. Демидович, И. А Марон. - М. : Лань, 2006. - 672 с.
5. Турчак, Л. И. Основы численных методов [Текст] : учебное пособие для вузов / Л. И Турчак. - М. : Физматлит, 2005. - 304 с.
6. Амосов, А. А. Вычислительные методы для инженеров [Текст] : учебное пособие для втузов / А. А. Амосов, Ю. А. Дубинский, Н.В. Копченова. - М. : Высшая школа, 1994. - 544 с.
7. Бахвалов, Н. С. Численные методы [Текст] : учебное пособие / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков ; Московский государственный университет им. Ломоносова. - 3-е изд., перераб. и доп. - М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004. - 636 с.
8. Самарский, А. А. Введение в численные методов [Текст] : учебное пособие для студент. вузов /А. А. Самарский. - М.: Лань, 2005. - 288 с.
9. Шапорев, С. Д. Методы вычислительной математики и их приложения [Текст] / С. Д. Шапоревю. - СПб. : СМИО Пресс, 2003.- 232 с.
10. Мироновский, Л. А. Введение в MATLAB [Текст] : учебное пособие / Л. А. Мироновский, К. Ю. Петрова. - СПб. : ГУАП, 2006. - 164 с.
11. Киреев, В. И. Численные методы в примерах и задачах [Текст] : учебное пособие для вузов / В. И. Киреев, А. В. Пантелеев. - М. : Высшая школа, 2008. - 480 с.
12. Формалев, В. Ф. Численные методы [Электронный ресурс] / В. Ф. Формалев, Д. Л. Ревизников. - Москва : Физматлит, 2006. - 399 с. – Режим доступа : http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=69333