

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Юго-Западный государственный университет»  
(ЮЗГУ)  
Кафедра электроснабжения

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе

О.Г. Локтионова

\_\_\_\_\_ 2017 г.



**ИСКАЖЕНИЕ СИНУСОИДАЛЬНОЙ ФОРМЫ ТОКА В ЦЕПИ  
С НЕЛИНЕЙНОЙ ИНДУКТИВНОСТЬЮ**

методическое указание к выполнению лабораторной работы  
по теоретическим основам электротехники  
для студентов направления подготовки  
«Электроэнергетика и электротехника»

УДК 621.301

Составитель Л.В. Плесконос

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент кафедры  
электрообеспечения *А.Л. Овчинников.*

**Искажения синусоидальной формы тока в цепи с нелинейной индуктивностью.** Методическое указание к выполнению лабораторной работы по теоретическим основам электротехники для студентов направления подготовки «Электроэнергетика и электротехника» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Л.В. Плесконос, Курск, 2015. 14с: ил. 5, табл. 3. Библиогр.: 14.

Излагаются методические указания и теоретический материал, необходимый для выполнения работы.

Предназначены для студентов направления подготовки  
"Электроэнергетика и электротехника"

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать .Формат 60x84 1/16/  
Усл печ. л. Уч.-изд.л. Тираж Заказ *451*. Бесплатно.  
Юго-Западный государственный университет.  
Юго-Западный государственный университет.  
305040, г. Курск, ул.50 лет Октября, 94.

### Цель работы.

Целью работы является теоретическое и экспериментальное исследование условий и характера искажений синусоидальной формы тока для цепей, имеющих катушку с ферромагнитным сердечником.

### Содержание работы.

При использовании в качестве объекта исследований цепи катушки с насыщающимся ферромагнитным сердечником в работе выполняется экспериментальное определение магнитной характеристики катушки и аппроксимация её посредством некоторых аналитических выражений. Полученные результаты затем используются для расчёта кривой изменения тока, проверяемой с помощью осциллографа в случае синусоидального напряжения.

#### 1. Методические указания

Мгновенные значения тока и напряжения реактивной катушки связывает уравнение

$$u = Ri + \frac{d\psi}{dt}, \quad (1.1)$$

где  $R$  - сопротивление обмотки,  $\psi$  - потокосцепление, созданное током катушки. Если  $\psi$  и  $i$  пропорциональны, то отношение  $\psi/i = L$ , называемое индуктивностью, величина постоянная и не зависит от интенсивности режима.

Тогда

$$u = Ri + L \frac{di}{dt}, \quad (1.2)$$

откуда видно, что если одна из величин - напряжение или ток изменяется синусоидально, то другая величина тоже будет синусоидальной.

Искажение синусоидальной формы тока получается, когда динамическая (для мгновенных значений) магнитная характеристика катушки  $\psi(i)$  нелинейная. В этом случае индуктивность уже не является величиной постоянной.

Нелинейность зависимости  $\psi(i)$  характерна для катушек с магнитными сердечниками (магнитопроводами), и обусловлена она

нелинейными свойствами ферромагнитного материала, из которого изготовлен сердечник.

Магнитное состояние сердечника зависит, кроме величины намагничивающего тока и от предыстории намагничивания. Поэтому при циклическом перемагничивании магнитная характеристика изображается в виде петли гистерезиса (рис.1.1).

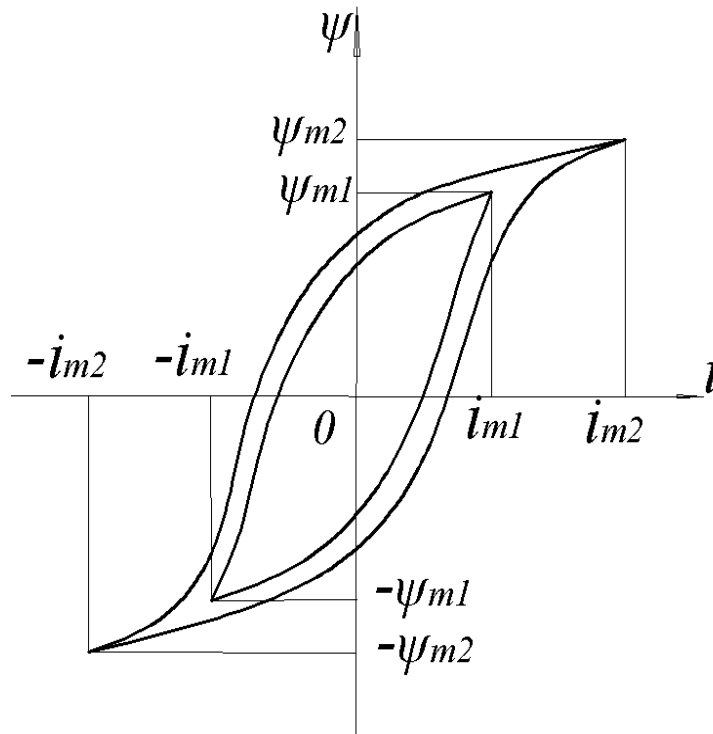


Рис.1.1 Магнитные характеристики катушки с ферромагнитным сердечником

С изменением  $\psi_m$  и  $i_m$  происходит переход от одной петли гистерезиса к другой, причем существует и некоторая предельная петля, площадь которой при увеличении намагничивающего тока практически не растёт.

Электромагнитная часть многих устройств электротехники по существу представляет катушку с сердечником. При расчете таких устройств явлением гистерезиса часто пренебрегают, принимая, что магнитное состояние катушки изменяется не по петле гистерезиса, а по основной кривой намагничивания, представляющей геометрическое место вершин симметричных петель гистерезиса (рис.1.2).

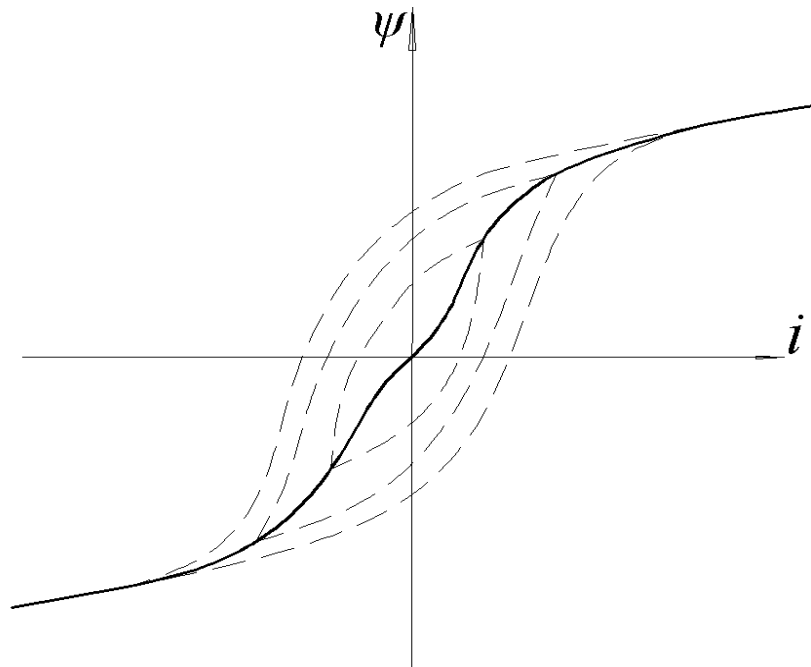


Рис.1.2 Основная кривая намагничивания

На переменном токе все точки этой кривой равны амплитудным значениям  $\psi_m$  и  $i_m$ . Это позволяет, если  $R \approx 0$ , определить её экспериментально. Действительно, при  $R \approx 0$  из (1.1)  $u = (d\psi/dt)$ , и если  $u = U_m \cos \omega t$ , то  $\psi = (U_m/\omega) \sin \omega t$ , т.е. при синусоидальном напряжении потокосцепление изменяется тоже синусоидально, и его амплитудные значения

$$\psi_m = U_m/\omega. \quad (1.3)$$

Необходимо отметить, что при  $R \neq 0$ , в цепи будут несинусоидальными как ток  $i$ , так и напряжение на индуктивности  $U_L$ .

Покажем, что при этом кривая тока будет несинусоидальной.

Изобразим петлю гистерезиса в координатах  $\psi(i)$  и зависимость  $\psi(\omega t)$ . Порядок построения кривой  $i(\omega t)$  показан на рис.1.3.

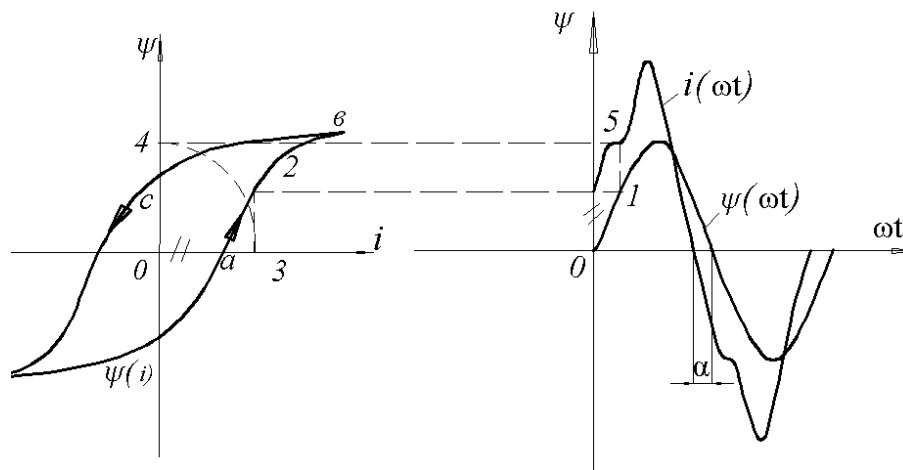


Рис.1.3 Построение кривой тока

На кривой магнитного потока  $\psi(\omega t)$  произвольно выбирается точка 1; посредством горизонтальной линии 1 - 2, пересекающей кривую  $\psi(i)$ , и вертикальной линии 2 - 3 определяется значение тока  $i$ , равное абсциссе 0-3, соответствующее значению потока в точке 1; это значение тока откладывается в виде ординаты 0 - 4 и переносится в координатную систему  $i(\omega t)$  посредством проведения горизонтальной линии 4 - 5 до пересечения с вертикальной прямой 1-5.

Причем координаты кривой тока для первой четверти определяются по восходящей ветви петле гистерезиса  $ab$ , для второй четверти по нисходящей ветви  $bc$  и т.д.

Изображенная на рис. 1.3 кривая тока несинусоидальна и симметрична относительно оси абсцисс, что означает отсутствие четных гармоник.

Момент прохождения потока через нулевое значение отстает от момента прохождения тока через нуль. Если кривую тока заменить эквивалентной синусоидой, то кривая потока будет отставать от тока на некоторый угол  $\alpha$ , который называют гистерезисным углом или углом магнитного запаздывания. На практике этот угол составляет  $3...5^\circ$ .

Замена кривой тока эквивалентной синусоидой позволяет воспользоваться методом векторных диаграмм, а также символическим методом расчета.

Условием эквивалентности является равенство действующих значений тока данной кривой и эквивалентной, а также равенство потерь мощности.

Чтобы найти действующее значение тока, нужно несинусоидальную

функцию тока разложить в ряд Фурье.

Для определения амплитудных значений  $I_m$  достаточно включить последовательно с катушкой резистор с малым известным сопротивлением  $R_u$  и измерять амплитудное значение падения напряжения в нем  $U_{Rm}$ , тогда

$$I_m = (U_{Rm}/R_u) \quad (1.4)$$

Аналитический расчет неизвестной кривой  $i(t)$  или  $u_R(t)$  возможен, когда дано математическое выражение характеристики  $\psi(i)$ . Точное ее выражение не определяется. Практически пользуются тем или иным выражением, аналитическая кривая которого лишь приближенно совпадает с действительной кривой. Такое применение приближенных выражений называют аппроксимацией.

Если напряжение на зажимах катушки изменяется синусоидально, подходящее аналитическое выражение для большей части магнитной характеристики получается как зависимость  $i(\psi)$  в виде

$$i = a\psi + b\psi^3, \quad (1.5)$$

где  $a$  и  $b$  - числовые коэффициенты. Для определения их на рабочем участке действительной характеристики нужно выбрать две точки, через которые должна пройти аналитическая кривая, подставить их координаты  $\psi_1$ ,  $i_1$  и  $\psi_2$ ,  $i_2$  в (1.5), затем решить систему получающихся двух уравнений:

$$i_1 = a\psi_1 + b\psi_1^3,$$

$$i_2 = a\psi_2 + b\psi_2^3.$$

При  $u = U_m \cos \omega t$  и, следовательно, синусоидальном потокосцеплении  $\psi = \psi_m \sin \omega t$ , используемое для аппроксимации уравнение (1.5) преобразуется к виду

$$i = a\psi_m \sin \omega t + b\psi_m^3 \sin^3 \omega t.$$

Подставляя сюда  $\sin^3 \omega t = 0,25(3 \sin \omega t - \sin 3\omega t)$ , находят

$$i = I_{1m} \sin \omega t - I_{3m} \sin 3\omega t, \quad (1.6)$$

где

$$I_{1m} = a\psi_m + 0,75b\psi_m^3, \quad I_{3m} = 0,25b\psi_m^3, \quad \psi_m = U_m/\omega.$$

Таким образом, при синусоидальном напряжении в кривой тока нелинейной катушки содержатся синусоидальные составляющие с частотами  $\omega$

и  $3\omega$  («первая» и «третья» гармоники). Так как их максимальные значения складываются, кривая  $i(t)$  имеет заостренную форму с амплитудой  $I_{1m} + I_{3m}$  (рис.1.4).

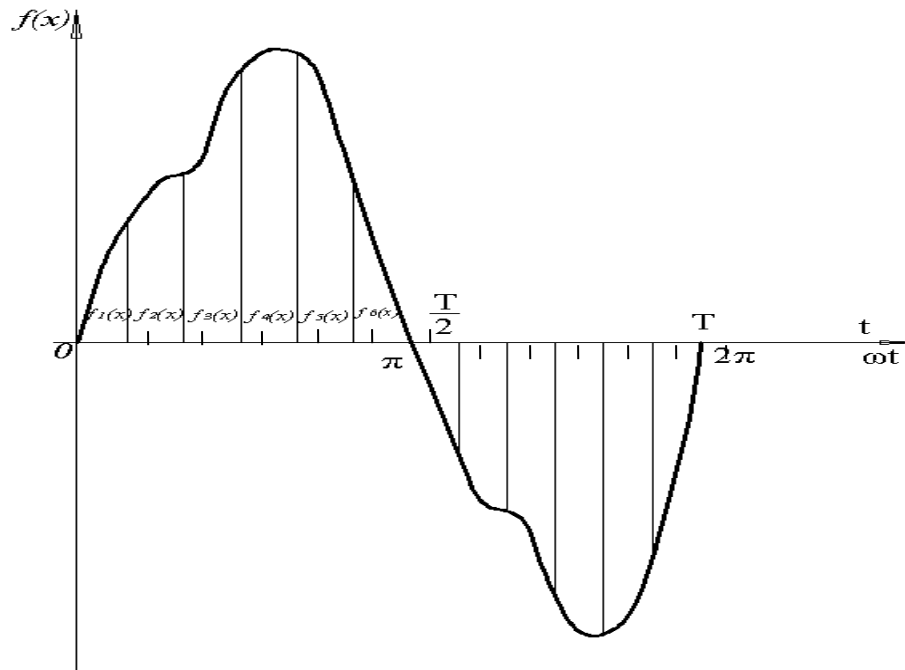


Рис.1.4 Несинусоидальная кривая тока  $f(x) = i(t)$ .

Если есть изображение несинусоидального тока, полученное, например, с помощью осциллографа, то амплитудные значения первой и третьей гармоники могут быть определены графическим методом.

Так как кривая тока симметрична относительно оси абсцисс, то в общем случае ряд записывается в виде

$$i(t) = A_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1) + A_{3m} \sin(3\omega t + \varphi_3) + \dots = B_{1m} \sin \omega t + B_{3m} \sin 3\omega t + C_{1m} \cos \omega t + C_{3m} \cos 3\omega t + \dots$$

Графический метод определения гармоники ряда Фурье основан на замене определенного интеграла суммой конечного числа слагаемых.

Перед тем как производить графическое разложение в ряд Фурье, необходимо выяснить наличие того или иного вида симметрии.

Сначала находится период  $T$  несинусоидальной функции  $f(x) = i(t)$  по осциллограмме (рис. 1.4)

Разбивают период функции  $f(x)$ , равный  $2\pi$  на  $n$  равных частей  $\Delta x =$

$$\frac{2\pi}{n}, n = 12, 24, 36, \dots$$



Интегралы заменяют суммами:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{p=1}^n f_p(x) \Delta x = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=1}^n f_p(x) \frac{2\pi}{n} = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n f_p(x), \quad (1.7)$$

где  $p$ - текущий индекс, принимающий значение от 1 до  $n$ ,  $f_p(x)$  – значение функции при  $x=(p-0,5)\Delta x$ , т.е. в середине  $p$ -го интервала (рис.1.4).

Амплитуда синусной составляющей на  $k$ -ой гармонике

$$B_{km} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx \approx \frac{2}{2\pi} \sum_{p=1}^n f_p(x) \frac{2\pi}{n} \sin_p kx = \frac{2}{n} \sum_{p=1}^n f_p(x) \sin_p kx. \quad (1.8)$$

Амплитуда косинусной составляющей  $k$  – гармонике

$$C_{km} = \frac{2}{n} \sum_{p=1}^n f_p(x) \cos_p kx. \quad (1.9)$$

Здесь  $\sin_p kx$  и  $\cos_p kx$  – значения функций при  $x=(p-0,5)\Delta x$ , т.е. в середине интервала.

Амплитуда  $k$  – ой гармоник

$$A_{km} = \sqrt{(B_{km})^2 + (C_{km})^2}. \quad (1.10)$$

Тангенс угла  $k$ -ой гармонике

$$\operatorname{tg} \varphi_k = \frac{C_{km}}{B_{km}}. \quad (1.11)$$

Знак угла  $\varphi_k$  зависит от знаков  $B_{km}$  и  $C_{km}$ .

Наличие того или иного вида симметрии позволяет до проведения разложения предсказать какие гармоники следует ожидать. Так если кривая  $f(\omega t)$  симметрична относительно оси абсцисс, то постоянная составляющая  $A_0$  и все четные гармоники отсутствуют, а вычисляя  $B_{km}$  и  $C_{km}$  при нечётных « $k$ » следует учесть, что  $\sum f_p(x) \sin x$  за первый полупериод равна сумме  $\sum f_p(x) \sin x$  за второй полупериод. Поэтому коэффициенты определяют за половину периода по формулам

$$A_0 = \frac{2}{n} \sum_{p=1}^{n/2} f_p(x). \quad (1.12)$$

$$B_{km} = \frac{4}{n} \sum_{p=1}^{n/2} f_p(x) \sin_p kx. \quad (1.13)$$

$$C_{km} = \frac{4}{n} \sum_{p=1}^{n/2} f_p(x) \cos_p kx. \quad (1.14)$$

Действующее значение несинусоидального тока  $I$  определяется как корень квадратный из суммы квадратов действующих значений гармонических составляющих  $I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots}$ .

Активная мощность  $P$  равна сумме мощностей каждой гармонической составляющей

$$P = P_0 + P_1 + P_2 + \dots$$

## 2. Задание

2.1. Для экспериментального определения магнитной характеристики катушки  $i(\psi)$  собрать цепь по схеме рис.2.1.

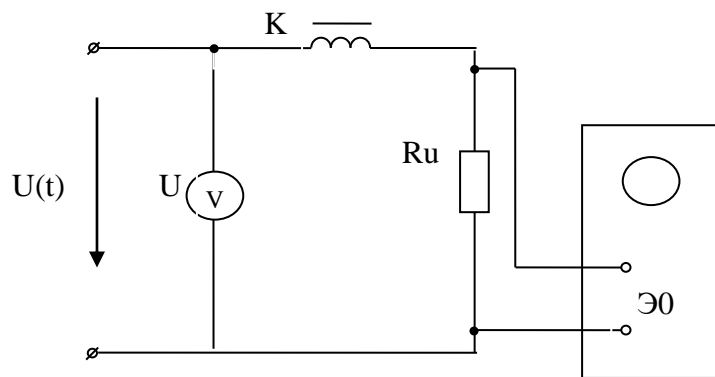


Рис.2.1. Схема рабочей цепи

2.2. Плавно увеличивая напряжение цепи до уровня  $U_{\text{доп}}$ , указанного в приложении, записать 8-10 пар значений напряжения и величины  $2A$  размаха двойного колебания на экране осциллографа.

Результаты измерений, а также значения установленного масштаба вертикального отклонения электронного луча на экране осциллографа записать в таблицу 2.1.

Таблица 2.1

Из опытов				Из расчетов		
N п/п	U В	2A делений	$m_u$ В/дел	по опытным данным		$i(A)$ по формуле: $i = a\psi + b\psi^3$
				$\psi$ , Вб	$i$ , А	
1						
2						

3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						

2.3. При одном из значений напряжения в пределах  $0,8 U_{\text{доп}} - U_{\text{доп}}$  зарисовать с экрана осциллографа половину периода кривой изменения напряжения измерительного резистора  $R_u$  (растянув ее по оси  $x$  на 6 делений).

### 3. Обработка результатов опытов

3.1. Рассчитать значения тока  $i$  и потокосцепления  $\psi$  для каждого пункта опытов.

Расчет выполняется по формулам (1.3) и (1.4), где амплитуда  $U_m = \sqrt{2}U$ , а напряжение измерительного резистора  $U_{Rm} = \frac{1}{2} \cdot 2A \cdot m_u$ .

Величина  $R_u$  указана в приложении.

3.2. Построить экспериментальную магнитную характеристику  $i(\psi)$ . Выполнить ее аппроксимацию по способу, указанному выше, определив аналитические выражения в виде  $i(\psi)$ .

Следует учесть, что аппроксимация по (1.5) получается удовлетворительно при выборе точек  $i$  и  $\psi$  из третьего и последнего пункта опытов табл.2.1.

3.3. Рассчитать 8-10 точек кривой, описываемой найденным выражением аппроксимации (1.5). Построить кривую аппроксимации для сравнения на графике экспериментальной магнитной характеристики  $i(\psi)$ .

3.4. По формуле (1.6) определить амплитудные значения первой и третьей гармоники тока для того входного напряжения, при котором зарисовывалась

кривая напряжения на измерительном сопротивлении  $R_u$ . Записать полученный ряд Фурье в табл.3.1.

Таблица 3.1

Ряд Фурье кривой тока $i(t)$
Полученный при аппроксимации функции $i(\psi)$
Полученный при графическом определении амплитудных значений 1-ой и 3-ей гармоники
Действующее значение эквивалентной синусоиды $I, A$
Потери мощности $P, Вт$

3.5. По зарисованной кривой напряжения на измерительном сопротивлении графическим методом определить амплитудные значения первой и третьей гармоники ряда Фурье кривой тока.

Период  $T$  напряжения на  $R_u$ , равный  $2\pi$  разбиваем на 12 частей, т.е.  $n=12$ . Интервал  $\Delta x = \frac{2\pi}{12} = 30^\circ$ . Координаты точки  $x$ , в которой измеряется напряжение  $x = (p - 0,5)\Delta x$ , где  $p$  - текущий индекс, принимающий значение от 1 до 12 (т.е. величину напряжения  $f_p(x)$  измеряют в середине -го интервала. Т.к. функция  $U_{Ru}(t)$  симметрична, то измерение напряжения выполнить за половину периода  $\frac{T}{2}$  при  $n=6$ .

Данные записать в табл.3.2.

Таблица 3.2

$U_{bx} =$	$f =$	$R_u =$				
$P$	1	2	3	4	5	6
$x, \text{град.}$	15	45	75	105	135	165
$\frac{U_p(x)}{R_u}, B$						

По формулам (1.13), (1.14), (1.10),(1.11), определяем коэффициенты и записываем ряд Фурье, в табл.3.1.

3.6. Определить действующее значение эквивалентной синусоиды  $I$  и потери мощности в цепи  $P$ . Результаты занести в табл.3.1.

#### Контрольные вопросы.

1. В чем выражается нелинейность катушки с ферромагнитным сердечником? Почему нелинейность представляет причину искажений синусоидальной формы периодических кривых?
2. Поясните условия реактивной катушки, при которых:
  - 2.1 периодические ток и напряжение имеют одинаковую форму;
  - 2.2 несинусоидальным является только ток или только напряжение;
  - 2.3 при синусоидальном приложенном напряжении одновременно несинусоидальными будут ток и э.д.с. самоиндукции.
3. Что представляет собой магнитная характеристика катушки с насыщающимся ферромагнитным сердечником?  
Приведите обоснование методики ее экспериментального определения.
4. С какой целью и как выполняется аппроксимация магнитной характеристики?
5. Изобразите кривую магнитной характеристики в виде зависимости  $i(\psi)$  и  $\psi(i)$ . Используя совместно графики  $i(\psi)$  и  $i = I_m \sin \omega t$  постройте аналогично рис.3 кривую изменения потокосцепления  $\psi(t)$
6. С помощью используемых для аппроксимации аналитических выражений  $i(\psi)$  и  $\psi(i)$  покажите, что нелинейная катушка представляет генератор нечётных гармоник, появляющихся в кривой напряжения при синусоидальном токе.
7. Расскажите о графическом методе определения гармонических составляющих ряда Фурье.

## ПРИЛОЖЕНИЕ К РАБОТЕ

Основной элемент рабочей цепи на лабораторном стенде представляет катушка со стальным сердечником, обозначенная символом  $L_2$ .

Сердечник образует замкнутый магнитопровод, который переходит в состояние магнитного насыщения при напряжении на зажимах катушки около 40В. Максимально допустимое напряжение  $U_{\text{доп}} = 80\text{В}$ .

Последовательный с катушкой измерительный резистор  $R_4$  имеет сопротивление 5 Ом.

Питание цепи осуществляется автотрансформатором АТ.

Измерительные приборы:

- вольтметр электромагнитный класса 0,5 на 75 и 150В (типа Э515);
- осциллограф типа СІ-72.

Особенностью осциллографа является наличие только ступенчатых регулировок масштабов по вертикальной и горизонтальной осям на экране, причём значения масштабов (в вольтах и миллисекундах, отнесенных к большому делению) можно прочесть на шкалах ручек регулировок.

### Литература

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники (Электрические цепи). – М.: Высшая школа, 1995, 420 с.
2. Жуховицкий Б.Я., Негневицкий И.Б. Теоретические основы электротехники, т.2. М.: Энергия, 1972, 305 с.