

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна  
Должность: проректор по учебной работе  
Дата подписания: 09.09.2021 14:50:39  
Уникальный программный ключ:  
0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1c11eabbf73e943df4a4851fda56d089

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Юго-Западный государственный университет»  
(ЮЗГУ)

Кафедра информационной безопасности

УТВЕРЖДАЮ  
Проректор по учебной работе  
О.Г. Локтионова  
« 09 » сентября 2017 г.



**Интерполирование функций:**  
методические указания к практическим занятиям по дисциплинам  
«Вычислительные методы», «Численные методы»

Курск 2017

УДК 510.6

Составители: В.П. Добрица, В.А. Милых, Ю.А. Халин

Рецензент

Кандидат физико-математических наук, доцент В.И. Дмитриев

**Интерполирование функций:** методические указания к практическим занятиям по дисциплинам «Вычислительные методы», «Численные методы» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост. В.П. Добрица, В.А. Милых, Ю.А. Халин. Курск, 2017. – 16 с. Библиогр.: с. 16.

Приводится описание основных методов интерполирования функций: полином Лагранжа, интерполяция в случае равноотстоящих узлов, схема Эйткена.

Методические рекомендации предназначены для студентов, обучающихся по направлениям, укрупнённых групп специальностей 02.00.00, 09.00.00, 10.00.00

Текст печатается в авторской редакции.

Подписано в печать 17.11.17. Формат 60x84 1/16.  
Усл.печ. л. 1,56 п.л. Уч.-изд. л. 1,22 . Тираж 100 экз. Заказ. 1931  
Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.  
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

## Содержание

1.1. Интерполирование функций .....	4
1.2. Интерполяционный полином Лагранжа .....	6
1.3. Интерполяция в случае равноотстоящих узлов .....	9
1.4. Интерполяционная схема Эйткена .....	10
Библиографический список.....	15

## 1.1. Интерполирование функций

**Постановка задачи.** На практике не всегда удается описывать требуемые функциональные зависимости аналитически. Часто приходится иметь дело с функциями  $y = f(x)$ , заданными лишь таблицей своих значений, например:

$x_0$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
$y_0$	$y_1$	$y_2$	...	$y_n$

где  $y_0 = f(x_0)$ ,  $y_1 = f(x_1)$ ,  $y_2 = f(x_2)$ , ...,  $y_n = f(x_n)$ .

При этом известно, что областью определения  $f(x)$  служит некоторый непрерывный интервал  $[a, b]$ , включающий в себя интервал  $[x_0, x_n]$ , поэтому возникают все-таки вопросы и о значениях  $f(x)$  в промежуточных точках  $x \in [a, b]$ , не фигурирующих среди абсцисс (1.1). Подобные вопросы составляют задачу *интерполирования функций*, при этом говорят об экстраполировании, если  $x \in [a, b]$ , но  $x \notin [x_0, x_n]$ . Точки  $x_0, x_1, \dots, x_n$  называются *узлами интерполяции*.

Примеры интерполирования функций в практике чрезвычайно разнообразны.

В простейших случаях обычно достаточно ограничиваться *линейной интерполяцией*, суть которой видна из следующей формулы:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0). \quad (1)$$

Здесь имеется в виду, что  $x \in (x_0, x_1)$ . Именно линейная интерполяция (1) обычно используется при нахождении промежуточных значений функции в таблицах логарифмов, тригонометрических функций и т. п. С геометрической точки зрения формуле (1) соответствует прямая линия (рис. 1.1), определяемая двумя точками плоскости:  $M_0(x_0, y_0)$  и  $M_1(x_1, y_1)$ , при этом для каждой промежуточной абсциссы  $x$  требуются лишь два узла интерполяции: ближайший слева и ближайший справа.

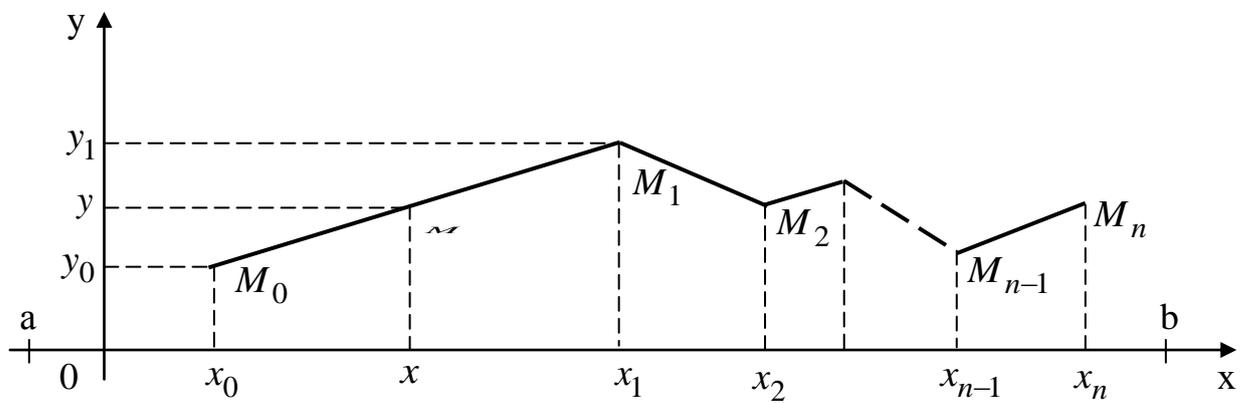


Рис. 1.1. Кусочно-линейчатая интерполяция

Таким образом, линейная интерполяция базируется на гипотезе о том, что  $f(x)$  есть ломаная  $\varphi(x)$  с вершинами в точках  $M_0, M_1, \dots, M_n$ , при этом  $\varphi(x)$  называется *интерполяционной функцией*.

Разумеется, такой простейший подход, использующий для каждой точки  $x$  из всей исходной информации лишь пару узлов, далеко не всегда обеспечивает требуемую точность интерполяции. Другими словами, ошибка интерполяции  $|f(x) - \varphi(x)|$  может быть слишком велика, поэтому приходится прибегать к интерполяционной функции  $\varphi(x)$ , более сложной, чем ломаная с прямолинейными отрезками.

Построение достаточно простой для вычислений интерполяционной функции  $\varphi(x)$ , совпадающей в узлах интерполяции со значениями  $f(x)$ , а в остальных точках  $(a, b)$  приближенно представляющей  $f(x)$  с заданной точностью, и называется, вообще говоря, *интерполированием функций*. Чаще всего  $\varphi(x)$  выбирается из класса полиномов (многочленов). В этом случае интерполяция называется параболической (очевидно, что линейная интерполяция есть частный случай параболической –  $\varphi(x)$  есть многочлен 1-й степени).

В основе параболической интерполяции лежит известная из математического анализа теорема Вейерштрасса о том, что если  $f(x)$  непрерывна в интервале  $(a, b)$ , то для всякого сколь-угодно малого  $\varepsilon > 0$  найдется такой полином  $\varphi_k(x)$  степени  $k$ , что  $|f(x) - \varphi_k(x)| < \varepsilon$  для любого  $x \in (a, b)$ . Поэтому есть смысл сформировать интерполяционный полином  $\varphi_k(x)$ , причем, желательно, такой, чтобы его степень  $k$  была возможно меньшей, лишь бы обеспечить требуемую точность.

В этом разделе будем заниматься именно параболической интерполяцией функции  $f(x)$ , заданной таблично, при этом предстоит ответить на следующие вопросы:

1) как определить наименьшую возможную степень  $k$  интерполяционного полинома  $\varphi_k(x)$ ;

2) как построить этот полином и как им пользоваться;

3) как произвести оценивание точности интерполирования.

Рассмотрим некоторые часто используемые интерполяционные полиномы

## 1.2. Интерполяционный полином Лагранжа

Пусть, по-прежнему, некоторая функция  $f(x)$  задана таблицей своих значений, причем узлы интерполяции  $x_0, x_1, \dots, x_n$  не обязательно равностоящие (но обязательно все различные). Пусть далее установлено, что желательная степень интерполяционного полинома  $\varphi(x)$  равна  $k \leq n$ . Требуется составить сам полином  $\varphi(x)$ , при этом надо иметь в виду следующие теоретические предпосылки.

**Теорема 1.** Существует один полином  $\varphi(x)$  степени не выше  $n$  со свойствами

$$\varphi(x_0) = y_0, \varphi(x_1) = y_1, \varphi(x_2) = y_2, \dots, \varphi(x_n) = y_n, \quad (2)$$

или, что все равно, через  $n+1$  точку плоскости всегда можно провести параболу  $n$ -го порядка и притом только одну.

Пусть искомый полином имеет вид

$$\varphi(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n,$$

где коэффициенты  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  подлежат определению.

Начальные условия (1.4) задают фактически систему  $(n+1)$ -линейных уравнений с  $n+1$  неизвестными  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ :

$$a_0 x_i^n + a_1 x_i^{n-1} + \dots + a_{n-1} x_i + a_n = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (3)$$

Определитель системы (3) есть определитель Вандермонда, и так как  $x_i$  различны между собой, он отличен от нуля. Поэтому система (3) всегда имеет единственное решение, что и требовалось доказать. \_\_\_\_\_

Мы будем предполагать сейчас, что  $\varphi(x)$  предназначается для работы в той части области определения  $f(x)$ , которая лучше всего представляется первыми  $k + 1$  узлами  $x_0, x_1, \dots, x_k$ .

**Теорема 2.** Искомый интерполяционный полином может быть записан в виде

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^k y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_k)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_k)}. \quad (4)$$

Обратим внимание на структуру записи (4). Дроби, стоящие в качестве сомножителей перед  $y_i$  в каждом слагаемом, называются *полиномами влияния узла  $x_i$*  либо коэффициентами Лагранжа и обозначаются  $L_i(x)$ . Существенно, что в числителе  $L_i(x)$  отсутствует сомножитель вида  $(x-x_i)$ , а в знаменателе —  $(x_i-x_i)$ . Ясно, что:

- 1) степень полинома  $L_i(x)$  ( $i = 0, 1, \dots, k$ ) равна  $k$ ;
- 2) он обращается в единицу при  $x = x_i$ , в нуль — во всех прочих узлах  $x_j$  ( $j \neq i$ ). Отсюда следует, что

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^k y_i \cdot L_i(x) \quad (5)$$

есть полином степени не выше  $k$ , причем

$$\varphi(x) = y_0 \cdot 0 + y_1 \cdot 0 + \dots + y_j \cdot 1 + y_{j+1} \cdot 0 + \dots + y_k \cdot 0 = y_j,$$

где  $j$  принимает значения  $0, 1, \dots, k$ .

Таким образом, условия (2) выполнены и, следовательно, теорема доказана, так как других полиномов с теми же свойствами быть не может согласно теореме 1.

Полином (4) называется интерполяционным полиномом Лагранжа. В частности, если все  $y_i = 1$ , то  $\varphi(x) = 1$ , поэтому из (5) следует

$$1 \equiv \sum_{i=0}^k L_i(x). \quad (6)$$

Этим свойством коэффициентов Лагранжа удобно пользоваться для контроля. Важно также, что  $L_i(x)$  зависят только от узлов интерполяции, а не от самой функции  $f(x)$ .

Погрешность интерполяции методом Лагранжа в точке  $x \in [x_0, x_n]$  можно оценить по формуле

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i), \quad (7)$$

где  $M_{n+1} = \max |f^{(n+1)}(x)|$  – максимальное значение  $(n+1)$ -й производной исходной функции  $f(x)$  на отрезке  $[x_0, x_n]$ . Следовательно, чтобы оценить погрешность интерполяции, необходима дополнительная информация об исходной функции. Это следует из того, что через заданные исходные точки может проходить бесчисленное количество различных функций, для которых и погрешность будет разной. Отметим также, что применение формулы для оценки погрешности возможно, если функция дифференцируема  $n+1$  раз.

**Пример 1.1.** Дана функция  $y = \sqrt{x}$ . Для иллюстрации возможности оценки погрешности будем считать ее сложной. Найти погрешность интерполяции при  $x=115$ .

Составим таблицу

	$x_0$	$x_1$	$x$	$x_2$
х	100	121	115	144
у	10	11		12

Имеем три узла интерполяции:  $x_0, x_1, x_2$   $n=2$ .

Оценим максимальное значение третьей производной функции:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \quad y'' = -\frac{1}{\sqrt{x^3}}; \quad y''' = \frac{3}{8} \frac{1}{\sqrt{x^5}};$$

$$M_3 = \max |y'''| = \frac{3}{8} \frac{1}{\sqrt{(100)^5}} = 3,75 \cdot 10^{-6}.$$

$$R \leq M_3 \cdot \left| \frac{(115-100)(115-121)(115-144)}{3!} \right| \leq 3,75 \cdot 10^{-6} \cdot \left| \frac{15 \cdot (-6) \cdot (-29)}{6} \right| \leq 1,6 \cdot 10^{-3}$$

Интерполяционная функция Лагранжа  $L(x)$ :

$$\begin{aligned} L_2(x) &= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \\ &= 10 \cdot \frac{(115-121)(115-144)}{(100-121)(100-144)} + 11 \cdot \frac{(115-100)(115-144)}{(121-100)(121-144)} + \\ &+ 12 \cdot \frac{(115-100)(115-121)}{(144-100)(144-121)} = 10,723 \end{aligned}$$

Точное значение 10,72380 получено непосредственным вычислением.

### 1.3. Интерполяция в случае равноотстоящих узлов

Рассмотрим сейчас важный частный случай, когда  $x_{i+1} - x_i = h = const$ ,  $i = 0, 1, \dots, k-1$ . Если ввести новую переменную  $t = \frac{x - x_0}{h}$ ,  $x = x_0 + th$ , то при любом  $h$  узлы интерполяции всегда принимают стандартные значения: соответственно  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 2$ , ...,  $t_k = k$ . Переменная  $t$  имеет смысл числа шагов  $h$  от  $x_0$  до  $x$ , это позволяет унифицировать соответствующие формулы интерполяции. Так, коэффициенты Лагранжа  $L_i(x)$  в (6) удастся представить в виде

$$L_i(t) = (-1)^{k-i} C_k^i \frac{t(t-1)(t-2)\dots(t-k)}{(t-i)n!}. \quad (8)$$

Это выражение не зависит ни от  $f(x)$ , ни от  $h$ , что позволяет составить таблицы  $L_i(t)$ , которые известны под названием *таблиц коэффициентов Лагранжа*.

Для вычисления коэффициентов Лагранжа удобно применить следующее расположение разностей, выделив разности, расположенные на главной диагонали:

$$\left. \begin{array}{cccccc} \boxed{x - x_0} & x_0 - x_1 & x_0 - x_2 & \dots & x_0 - x_n \\ x_1 - x_0 & \boxed{x - x_1} & x_1 - x_2 & \dots & x_1 - x_n \\ x_2 - x_0 & x_2 - x_1 & \boxed{x - x_2} & \dots & x_2 - x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n - x_0 & x_n - x_1 & x_n - x_2 & \dots & \boxed{x - x_n} \end{array} \right\} \quad (9)$$

Если обозначить произведение элементов  $i$ -й строки через  $D_i$ , а произведение главной диагонали  $\Pi_{n+1} = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$ , тогда формула коэффициентов Лагранжа приобретает вид

$$\ell_i^{(n)}(x) = \frac{\Pi_{n+1}}{D_i}; \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (10)$$

**Пример 1.2.** Для данных, приведенных в таблице, определить значение функции для  $x=0,2$ , используя многочлен Лагранжа. Найти  $L_2(0,2)$ .

i	0	1	2
x	0,1	0,5	0,9
y	1,6	0,5	-1,5

*Решение*

Сгруппируем разности согласно схеме (9):

$$\begin{array}{ccc}
 \boxed{x - x_0} & & x_0 - x_1 & & x_0 - x_2 \\
 x_1 - x_0 & \boxed{x - x_1} & & & x_1 - x_2 \\
 x_2 - x_0 & x_2 - x_1 & \boxed{x - x_2} & & 
 \end{array}$$

Определим составляющие формулы (10):

$$P_3 = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) = (0,2 - 0,1)(0,2 - 0,5)(0,2 - 0,9) = 0,012;$$

$$D_0 = (x - x_0)(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) = (0,2 - 0,1)(0,1 - 0,5)(0,1 - 0,9) = 0,032;$$

$$D_1 = (x_1 - x_0)(x - x_1)(x_1 - x_2) = (0,5 - 0,1)(0,2 - 0,5)(0,5 - 0,9) = 0,048;$$

$$D_2 = (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x - x_2) = (0,9 - 0,1)(0,9 - 0,5)(0,2 - 0,9) = -0,224.$$

Тогда

$$\ell_0 = \frac{P_3}{D_0} = \frac{0,021}{0,032} = 0,65625; \quad \ell_1 = \frac{P_3}{D_1} = \frac{0,021}{0,048} = 0,4375;$$

$$\ell_2 = \frac{P_3}{D_2} = \frac{0,021}{-0,224} = -0,09375.$$

Отсюда, по формуле (1.10) получаем

$$L_2(0,2) = 1,6 \cdot 0,65625 + 0,5 \cdot 0,4375 + (-1,5) \cdot (-0,09375) = 1,409375.$$

Этот результат полностью совпадает с ранее полученным решением.

#### 1.4. Интерполяционная схема Эйткена

Если сам интерполяционный полином  $\varphi(x)$  не требуется, а нужно найти лишь его значение  $\varphi(x')$  в некоторой промежуточной точке  $x'$ , то в общем случае неравноотстоящих узлов удобно пользоваться так называемой *схемой Эйткена*.

Введем обозначение

$$L_{01}(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x \\ y_1 & x_1 - x \end{vmatrix}}{x_1 - x_0}. \quad (11)$$

Это есть, очевидно, полином 1-й степени относительно  $x$ , принимающий в точках  $x_0$  и  $x_1$  значения соответственно  $y_0$  и  $y_1$  (проверяется непосредственно). Следовательно,  $L_{01}(x)$  есть интерполяционный полином Лагранжа 1-й степени, решающий задачу линейной интерполяции по двум узлам  $x_0$  и  $x_1$ . Для другой пары соседних узлов  $x_1, x_2$  можно составить такой же полином

$$L_{12}(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & x_1 - x \\ y_2 & x_2 - x \end{vmatrix}}{x_2 - x_1}, \quad (12)$$

$L_{23}(x), L_{34}(x), \dots$

Убедимся теперь, что выражение

$$L_{012}(x) = \frac{\begin{vmatrix} L_{01}(x) & x_0 - x \\ L_{12}(x) & x_2 - x \end{vmatrix}}{x_2 - x_0} \quad (13)$$

решает задачу квадратичной интерполяции по трем узлам  $x_0, x_1, x_2$ . Действительно, при  $x = x_0$  формула (13) дает

$$L_{012}(x_0) = \frac{1}{x_2 - x_0} \begin{vmatrix} L_{01}(x_0) & 0 \\ L_{12}(x_0) & x_2 - x_0 \end{vmatrix} = L_{01}(x_0) = y_0,$$

при  $x = x_1$  имеем

$$\begin{aligned} L_{012}(x_1) &= \frac{1}{x_2 - x_0} \begin{vmatrix} L_{01}(x_1) & x_0 - x_1 \\ L_{12}(x_1) & x_2 - x_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{x_2 - x_0} \begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x_1 \\ y_1 & x_2 - x_1 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{y_0}{x_2 - x_0} \begin{vmatrix} 1 & x_0 - x_1 \\ 1 & x_2 - x_1 \end{vmatrix} = \frac{y_0}{x_2 - x_0} (x_2 - x_0) = y_0, \end{aligned}$$

при  $x = x_2$  получаем  $L_{012}(x_2) = y_2$ .

Аналогично может быть записан полином Лагранжа  $L_{123}(x)$  для интерполирования по трем узлам  $x_1, x_2, x_3$ :

$$L_{123} = \frac{1}{x_3 - x_1} \begin{vmatrix} L_{12}(x) & x_1 - x \\ L_{23}(x) & x_3 - x \end{vmatrix} \quad \text{и т. д.}$$

По индукции можно записать, что

$$L_{012\dots k}(x) = \frac{1}{x_k - x_0} \begin{vmatrix} L_{012\dots k-1}(x) & x_0 - x \\ L_{123\dots k}(x) & x_k - x \end{vmatrix} \quad (14)$$

есть специальная форма записи интерполяционного полинома Лагранжа, принимающего в узлах  $x_0, x_1, \dots, x_k$  соответственно значения  $y_0, y_1, \dots, y_k$ .

Вычисления по схеме Эйткена удобно расположить в таблице 1 (для  $k=4$ ). Таким образом, описанный рекуррентный процесс интерполяции не требует априорного задания степени интерполяционного полинома. Здесь можно постепенно подключать все новые и новые узлы интерполяции до тех пор, пока последовательные значения  $L_{012\dots k}(x')$  и  $L_{0..2\dots k,k+1}(x')$  не совпадут в пределах заданной точности.

Таблица 1

$x_i$	$y_i$	$x_i - x'$	$L_{i-1,i}$	$L_{i-2,i-1,i}$	$L_{i-3,i-2,i-1}$	$L_{1/-4,i-3,i-2,i-1,i}$
$x_0$	$y_0$	$x_0 - x'$	$L_{01}$			
$x_1$	$y_1$	$x_1 - x'$	$L_{12}$	$L_{012}$		
$x_2$	$y_2$	$x_2 - x'$	$L_{23}$	$L_{123}$	$L_{0123}$	
$x_3$	$y_3$	$x_3 - x'$	$L_{34}$	$L_{234}$	$L_{1234}$	$L_{01234}$
$x_4$	$y_4$	$x_4 - x'$				

Единообразие вычислений и возможность автоматического контроля достигнутой точности позволяет рекомендовать процесс Эйткена как один из наиболее приемлемых алгоритмов интерполяции для реализации на ЭВМ, особенно при достаточно большом количестве узлов.

**Пример 1.3.** Приведем решение примера по схеме Эйткена для  $x=2$  (таблице 2).

Таблица 2

$x_i$	$y_i$	$x_i - x'$	$L_{i-1,i}$	$L_{i-2,i-1,i}$	$L_{i-3,i-2,i-1,i}$
0	-4	-2	5		
1	0,5	-1	0,5	2	
3	0,5	1	-7	-2	0
4	8	2			

Ответ:  $f(2) \approx \varphi(2) = 0$ .

Будем предполагать, что исходные данные безошибочны, при этом решались в основном две задачи:

- 1) определение значения функции, заданной табличным способом в промежуточной фиксированной точке;
- 2) аналитическое описание табличной функции полиномом той или иной степени.

**Задание 1.** При проведении эксперимента пропущена запись опытной величины  $y$  для двух фиксированных значений  $x$  (табл. 3). Необходимо с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа восстановить запись и оценить относительную погрешность вычислений, полагая, что значение производной четвертого порядка задано  $|f^{(4)}(x)| = N$ .

Таблица 3

$N$	$x$	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5
1	$y$	1,0	1,5	?	2,5	?	4,5
$N$	$x$	10	12	14	16	18	20
2	$y$	0,5	?	2,5	?	4,0	5,5
$N$	$x$	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
3	$y$	5,5	6,5	?	8,0	?	10,0
$N$	$x$	8	9	10	11	12	13
4	$y$	21	?	25	?	35	45
$N$	$x$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
5	$y$	10	?	7	5	?	2
$N$	$x$	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
6	$y$	-5	0	?	12	?	20
$N$	$x$	10	20	30	40	50	60
7	$y$	2,5	?	-5,0	?	3,0	5,0
$N$	$x$	0	2	4	6	8	10
8	$y$	-10	-2	?	-4	?	-10
$N$	$x$	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5

9	y	12	?	18	?	24	30
N	x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
10	y	-10	-12	?	-8	?	-2

**Пример выполнения задания 1.** Используя интерполяционный многочлен Лагранжа, вычислить значение функции, заданной таблично в точке  $x=0,2$  и оценить абсолютную и относительную погрешности вычислений для заданного значения третьей производной:  $|f^{(3)}(x)|=1$ .

i	0	1	2
x	0,1	0,5	0,9
y	1,6	0,5	-1,5

1. В нашем случае  $n=2$  ( $x_0, x_1, x_2$ ), используем многочлен Лагранжа второй степени:

$$L_2(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} =$$

$$= 1,6 \frac{(x-0,5)(x-0,9)}{(0,1-0,5)(0,1-0,9)} + 0,5 \frac{(x-0,1)(x-0,9)}{(0,5-0,1)(0,5-0,9)} + (-1,5) \frac{(x-0,1)(x-0,5)}{(0,9-0,1)(0,9-0,5)};$$

$$L_2(0,2) = 1,6 \frac{(-0,3)(-0,7)}{(-0,4)(-0,8)} + 0,5 \frac{0,1 \cdot (-0,7)}{0,4 \cdot (-0,4)} - 1,5 \frac{0,1 \cdot (-0,3)}{0,8 \cdot 0,4} = 1,4094.$$

2. Оценим погрешность интерполяции:

$$R(x) = \frac{f^{(3)}(x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x-x_i) = \frac{1}{3!} (x-0,1)(x-0,5)(x-0,9);$$

$$R(0,2) = \frac{1}{6} \cdot 0,1 \cdot (-0,3) \cdot (-0,7) = 0,0035.$$

Абсолютная погрешность составит

$$\Delta f(0,2) = |R(0,2)| = 0,0035.$$

Относительная погрешность составит

$$\delta f(0,2) = \frac{\Delta f(0,2)}{f(0,2)} = \frac{0,0035}{1,4094} = 2,483 \cdot 10^{-3}.$$

## Библиографический список

1. Амосов, А. А. Вычислительные методы для инженеров [Текст] : учебное пособие для втузов / А. А. Амосов, Ю. А. Дубинский, Н.В. Копченова. - М. : Высшая школа, 1994. - 544 с..
2. Вержбицкий В.М. Численные методы математической физики [Электронный ресурс]: учебное пособие / В.М.Вержбицкий. - М: Директ.-Медиа, 2013. - 212 с. // Режим доступа -<http://biblioclub.ru/>
3. Волков Е.А. Численные методы [Текст]: учебное пособие / Е.А. Волков. - 4 –е изд., стер.– СПб.: Лань., 2007. - 256 с.
4. Киреев, В. И. Численные методы в примерах и задачах [Текст] : учебное пособие / В. И. Киреев, А. В. Пантелеев. - Изд. 4-е, испр. - Санкт-Петербург : Лань, 2015. - 448 с. : ил. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - Библиогр.: с. 441-443.
5. Численные методы [Текст] : учебное пособие : [для студентов 2 курса специальности 230700.62 «Прикладная информатика» при изучении дисциплины «Численные методы»] / В. А. Милых, Ю. А. Халин ; - Курск : ЮЗГУ, 2013. - 155 с.