МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра информационной безопасности

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_____________ О.Г. Локтионова
«__»_____________ 2017 г.

Интерполирование функций:
методические указания к практическим занятиям по дисциплинам
«Вычислительные методы», «Численные методы»

Курск 2017

УДК 510.6
Составители: В.П. Добрица, В.А. Милых, Ю.А. Халин

Рецензент
Кандидат физико-математических наук, доцент В.И. Дмитриев

Интерполирование функций: методические указания к практическим занятиям по дисциплинам «Вычислительные методы», «Численные методы» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост. В.П. Добрица, В.А. Милых, Ю.А. Халин. Курск, 2017. – 16 с. Библиогр.: с. 16.

Приводится описание основных методов интеполирования функций: полином Лагранжа, интеполяция в случае равноотстоящих узлов, схема Эйткена.

Методические рекомендации предназначены для студентов, обучающихся по направлениям, укрупнённых групп специальностей 02.00.00, 09.00.00, 10.00.00

Текст печатается в авторской редакции.

Подписано в печать 17.11.17. Формат 60x84 1/16.
Усл.печ. л. 1,56 п.л . Уч.-изд. л. 1,22 . Тираж 100 экз. Заказ. 1931
Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Содержание

1.1. Интерполирование функций

Постановка задачи. На практике не всегда удается описывать требуемые функциональные зависимости аналитически. Часто приходится иметь дело с функциями $y = f(x)$, заданными лишь таблицей своих значений, например:

x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_n
y_0	y_1	y_2	$\dots$	y_n

где $y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2),\ ...,\ y_n = f(x_n)$.

При этом известно, что областью определения *f(x)* служит некоторый непрерывный интервал $[a,\ b]$, включающий в себя интервал $[x_0, x_n]$, *п*оэтому возникают все-таки вопросы и о значениях *f(x)* в промежуточных точках $x \in [a,b]$, не фигурирующих среди абсцисс (1.1). Подобные вопросы составляют задачу *интерполирования функций*, при этом говорят об экстраполировании, если $x \in [a,b]$, но $x \notin [x_0, x_n]$. Точки $x_0, x_1, ..., x_n$ называются *узлами интерполяции.*

Примеры интерполирования функций в практике чрезвычайно разнообразны.

В простейших случаях обычно достаточно ограничиваться *линейной интерполяцией,* суть которой видна из следующей формулы:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0). \qquad (1)$$

Здесь имеется в виду, что $x \in (x_0, x_1)$. Именно линейная интерполяция (1) обычно используется при нахождении промежуточных значений функции в таблицах логарифмов, тригонометрических функций и т. п. С геометрической точки зрения формуле (1) соответствует прямая линия (рис. 1.1), определяемая двумя точками плоскости: $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$, при этом для каждой промежуточной абсциссы x требуются лишь два узла интерполяции: ближайший слева и ближайший справа.

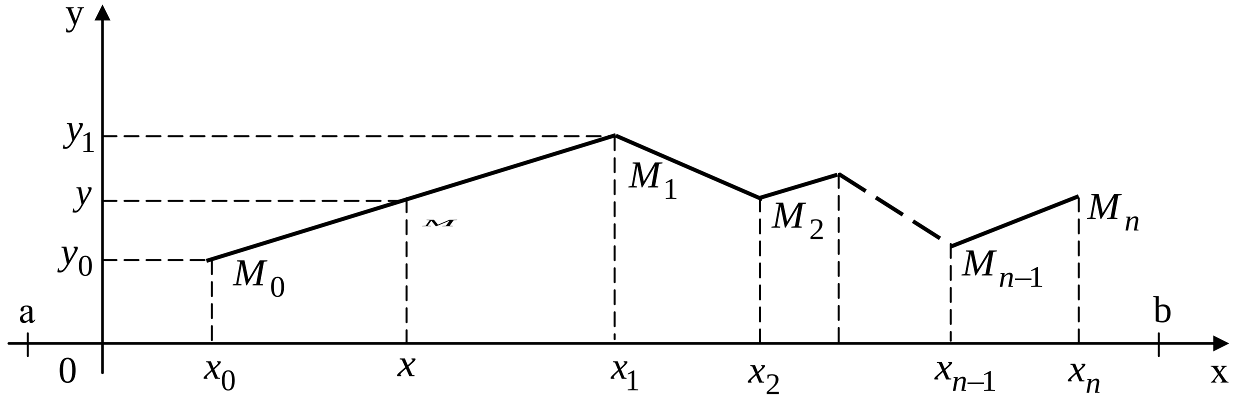

Рис. 1.1. Кусочно-линейчатая интерполяция

Таким образом, линейная интерполяция базируется на гипотезе о том, что *f(x)* есть ломаная $\varphi(x)$ с вершинами в точках $M_0, M_1, ..., M_n$, при этом $\varphi(x)$ называется *интерполяционной функцией*.

Разумеется, такой простейший подход, использующий для каждой точки x из всей исходной информации лишь пару узлов, далеко не всегда обеспечивает требуемую точность интерполяции. Другими словами, ошибка интерполяции $|f(x)-\varphi(x)|$ может быть слишком велика, поэтому приходится прибегать к интерполяционной функции $\varphi(x)$, более сложной, чем ломаная с прямолинейными отрезками.

Построение достаточно простой для вычислений интерполяционной функции $\varphi(x)$, совпадающей в узлах интерполяции со значениями *f(x),* а в остальных точках *(a, b)* приближенно представляющей *f(x)* с заданной точностью, и называется, вообще говоря, *интерполированием функций.* Чаще всего $\varphi(x)$ выбирается из класса полиномов (многочленов). В этом случае интерполяция называется параболической (очевидно, что линейная интерполяция есть частный случай параболической – $\varphi(x)$ есть многочлен 1-й степени).

В основе параболической интерполяции лежит известная из математического анализа теорема Вейерштрасса о том, что если *f(x)* непрерывна в интервале *(a, b),* то для всякого сколь-угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такой полином $\varphi_k(x)$ степени *k,* что $|f(x)-\varphi_k(x)|<\varepsilon$ для любого $x \in (a,b)$. Поэтому есть смысл сформировать интерполяционный полином $\varphi_k(x)$, причем, желательно, такой, чтобы его степень *k* была возможно меньшей, лишь бы обеспечить требуемую точность.

В этом разделе будем заниматься именно параболической интерполяцией функции *f(x)*, заданной таблично, при этом предстоит ответить на следующие вопросы:

1)как определить наименьшую возможную степень k интерполяционного полинома $\varphi_k(x)$*;*

2)как построить этот полином и как им пользоваться;

3) как произвести оценивание точности интерполирования.

Рассмотрим некоторые часто используемые интерполяционные полиномы

1.2. Интерполяционный полином Лагранжа

Пусть, по-прежнему, некоторая функция *f(x)* задана таблицей своих значений, причем узлы интерполяции $x_0, x_1, ..., x_n$ не обязательно равностоящие (но обязательно все различные). Пусть далее установлено, что желательная степень интерполяционного полинома $\varphi(x)$ равна $k \le n$. Требуется составить сам полином $\varphi(x)$, при этом надо иметь в виду следующие теоретические предпосылки.

Теорема 1. Существует один полином $\varphi(x)$ степени не выше n со свойствами

$$\varphi(x_0) = y_0,\ \varphi(x_1) = y_1,\ \varphi(x_2) = y_2,\ \dots, \varphi(x_n) = y_n, \qquad (2)$$

или, что все равно, через $n+1$ точку плоскости всегда можно провести параболу n-го порядка и притом только одну.

Пусть искомый полином имеет вид

$$\varphi(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n,$$

где коэффициенты $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ подлежат определению.

Начальные условия (1.4) задают фактически систему $(n+1)$ - линейных уравнений с $n+1$ неизвестными $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$:

$$a_0 x_i^n + a_1 x_i^{n-1} + \dots + a_{n-1} x_i + a_n = y_i, \quad i = 0,1,\dots,n. \qquad (3)$$

Определитель системы (3) есть определитель Вандермонда, и так как x_i различны между собой, он отличен от нуля. Поэтому система (3) всегда имеет единственное решение, что и требовалось доказать. _____

Мы будем предполагать сейчас, что $\varphi(x)$ предназначается для работы в той части области определения *f(x)*, которая лучше всего представляется первыми $k+1$ узлами $x_0, x_1, ..., x_k$.

Теорема 2. Искомый интерполяционный полином может быть записан в виде

$$\varphi(x)=\sum_{i=0}^{k} y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1),...,(x-x_{i-1})(x-x_{i+1}),...,(x-x_k)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1),...,(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}),...,(x_i-x_k)}. \qquad (4)$$

Обратим внимание на структуру записи (4). Дроби, стоящие в качестве сомножителей перед y_i в каждом слагаемом, называются *полиномами влияния узла* x_i либо коэффициентами Лагранжа и обозначаются $L_i(x)$. Существенно, что в числителе $L_i(x)$ отсутствует сомножитель вида $(x-x_i)$, а в знаменателе – (x_i-x_i). Ясно, что:

1) степень полинома $L_i(x)$ $(i=0,1,...,k)$ равна k;

2) он обращается в единицу при $x=x_i$, в нуль - во всех прочих узлах x_j $(j \neq i)$. Отсюда следует, что

$$\varphi(x)=\sum_{i=0}^{k} y_i \cdot L_i(x) \qquad (5)$$

есть полином степени не выше *k*, причем

$$\varphi(x)=y_0\cdot 0+y_1\cdot 0+...+y_j\cdot 1+y_{j+1}\cdot 0+...+y_k\cdot 0=y_j,$$

где *j* принимает значения 0, 1, . . ., k.

Таким образом, условия (2) выполнены и, следовательно, теорема доказана, так как других полиномов с теми же свойствами быть не может согласно теореме 1.

Полином (4) называется интерполяционным полиномом Лагранжа. В частности, если все $y_i=1$, то $\varphi(x)=1$, поэтому из (5) следует

$$1 \equiv \sum_{i=0}^{k} L_i(x). \qquad (6)$$

Этим свойством коэффициентов Лагранжа удобно пользоваться для контроля. Важно также, что $L_i(x)$ зависят только от узлов интерполяции, а не от самой функции *f(x)*.

Погрешность интерполяции методом Лагранжа в точке $x\in[x_0, x_n]$ можно оценить по формуле

$$| f(x) - L_n(x) | \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i), \qquad (7)$$

где $M_{n+1} = \max | f^{(n+1)}(x) |$ – максимальное значение $(n+1)$-й производной исходной функции *f(x)* на отрезке $[x_0, x_n]$. Следовательно, чтобы оценить погрешность интерполяции, необходима дополнительная информация об исходной функции. Это следует из того, что через заданные исходные точки может проходить бесчисленное количество различных функций, для которых и погрешность будет разной. Отметим также, что применение формулы для оценки погрешности возможно, если функция дифференцируема $n+1$ раз.

Пример 1.1. Дана функция $y = \sqrt{x}$. Для иллюстрации возможности оценки погрешности будем считать ее сложной. Найти погрешность интерполяции при $x = 115$.

Составим таблицу

	x_0	x_1	x	x_2
x	100	121	115	144
y	10	11		12

Имеем три узла интерполяции: x_0, x_1, x_2 $n = 2$.

Оценим максимальное значение третьей производной функции:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \quad y'' = -\frac{1}{\sqrt{x^3}}; \quad y''' = \frac{3}{8}\frac{1}{\sqrt{x^5}};$$

$$M_3 = \max | y''' | = \frac{3}{8}\frac{1}{\sqrt{(100)^5}} = 3{,}75 \cdot 10^{-6}.$$

$$R \le M_3 \cdot \left| \frac{(115-100)(115-121)(115-144)}{3!} \right| \le 3{,}75 \cdot 10^{-6} \cdot \left| \frac{15 \cdot (-6) \cdot (-29)}{6} \right| \le 1{,}6 \cdot 10^{-3}$$

Интерполяционная функции Лагранжа $L(x)$:

$$L_2(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} =$$

$$= 10 \cdot \frac{(115-121)(115-144)}{(100-121)(100-144)} + 11 \cdot \frac{(115-100)(115-144)}{(121-100)(121-144)} +$$

$$+ 12 \cdot \frac{(115-100)(115-121)}{(144-100)(144-121)} = 10{,}723$$

Точное значение 10,72380 получено непосредственным вычислением.

1.3. Интерполяция в случае равноотстоящих узлов

Рассмотрим сейчас важный частный случай, когда $x_{i+1}-x_i=h=const$, $i=0,1,\dots,k-1$. Если ввести новую переменную $t=\dfrac{x-x_0}{h}$, $x=x_0+th$, то при любом h узлы интерполяции всегда принимают стандартные значения: соответственно $t_0=0,\ t_1=1,\ t_2=2,\ \dots,\ t_k=k$. Переменная t имеет смысл числа шагов h от x_0 до x, это позволяет унифицировать соответствующие формулы интерполяции. Так, коэффициенты Лагранжа $L_i(x)$ в (6) удается представить в виде

$$L_i(t)=(-1)^{k-i}C_k^i\,\frac{t(t-1)(t-2)\cdot\ldots\cdot(t-k)}{(t-i)n!}. \qquad (8)$$

Это выражение не зависит ни от *f(x)*, ни от *h*, что позволяет составить таблицы $L_i(t)$, которые известны под названием *таблиц коэффициентов Лагранжа*.

Для вычисления коэффициентов Лагранжа удобно применить следующее расположение разностей, выделив разности, расположенные на главной диагонали:

$$\left.\begin{array}{ccccc}
\boxed{x-x_0} & x_0-x_1 & x_0-x_2 & \dots & x_0-x_n \\
x_1-x_0 & \boxed{x-x_1} & x_1-x_2 & \dots & x_1-x_n \\
x_2-x_0 & x_2-x_1 & \boxed{x-x_2} & \dots & x_2-x_n \\
\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\
x_n-x_0 & x_n-x_1 & x_n-x_2 & \dots & \boxed{x-x_n}
\end{array}\right\} \qquad (9)$$

Если обозначить произведение элементов i-й строки через D_i, а произведение главной диагонали $\Pi_{n+1}=(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$, тогда формула коэффициентов Лагранжа приобретает вид

$$\ell_i^{(n)}(x)=\frac{\Pi_{n+1}}{D_i};\quad i=0,1,2,\dots,n. \qquad (10)$$

Пример 1.2. Для данных, приведенных в таблице, определить значение функции для $x = 0{,}2$, используя многочлен Лагранжа. Найти $L_2(0{,}2)$.

i	0	1	2
x	0,1	0,5	0,9
y	1,6	0,5	–1,5

Решение

Сгруппируем разности согласно схеме (9):

$$\begin{array}{ccc} \boxed{x - x_0} & x_0 - x_1 & x_0 - x_2 \\ x_1 - x_0 & \boxed{x - x_1} & x_1 - x_2 \\ x_2 - x_0 & x_2 - x_1 & \boxed{x - x_2} \end{array}$$

Определим составляющие формулы (10):

$$\Pi_3 = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) = (0{,}2 - 0{,}1)(0{,}2 - 0{,}5)(0{,}2 - 0{,}9) = 0{,}012;$$

$$D_0 = (x - x_0)(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) = (0{,}2 - 0{,}1)(0{,}1 - 0{,}5)(0{,}1 - 0{,}9) = 0{,}032;$$

$$D_1 = (x_1 - x_0)(x - x_1)(x_1 - x_2) = (0{,}5 - 0{,}1)(0{,}2 - 0{,}5)(0{,}5 - 0{,}9) = 0{,}048;$$

$$D_2 = (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x - x_2) = (0{,}9 - 0{,}1)(0{,}9 - 0{,}5)(0{,}2 - 0{,}9) = -0{,}224.$$

Тогда

$$\ell_0 = \frac{\Pi_3}{D_0} = \frac{0{,}021}{0{,}032} = 0{,}65625; \qquad \ell_1 = \frac{\Pi_3}{D_1} = \frac{0{,}021}{0{,}048} = 0{,}4375;$$

$$\ell_2 = \frac{\Pi_3}{D_2} = \frac{0{,}021}{-0{,}224} = -0{,}09375.$$

Отсюда, по формуле (1.10) получаем

$$L_2(0{,}2) = 1{,}6 \cdot 0{,}65625 + 0{,}5 \cdot 0{,}4375 + (-1{,}5) \cdot (-0{,}09375) = 1{,}409375.$$

Этот результат полностью совпадает с ранее полученным решением.

1.4. Интерполяционная схема Эйткена

Если сам интерполяционный полином $\varphi(x)$ не требуется, а нужно найти лишь его значение $\varphi(x')$ в некоторой промежуточной точке x', то в общем случае неравноотстоящих узлов удобно пользоваться так называемой *схемой Эйткена.*

Введем обозначение

$$L_{01}(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x \\ y_1 & x_1 - x \end{vmatrix}}{x_1 - x_0}. \qquad (11)$$

Это есть, очевидно, полином 1-й степени относительно *x,* принимающий в точках x_0 и x_1 значения соответственно y_0 и y_1 (проверяется непосредственно). Следовательно, $L_{01}(x)$ есть интерполяционный полином Лагранжа 1-й степени, решающий задачу линейной интерполяции по двум узлам x_0 и x_1. Для другой пары соседних узлов x_1, x_2 можно составить такой же полином

$$L_{12}(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & x_1 - x \\ y_2 & x_2 - x \end{vmatrix}}{x_2 - x_1}, \qquad (12)$$

$L_{23}(x)$, $L_{34}(x)$, … .

Убедимся теперь, что выражение

$$L_{012}(x) = \frac{\begin{vmatrix} L_{01}(x) & x_0 - x \\ L_{12}(x) & x_2 - x \end{vmatrix}}{x_2 - x_0} \qquad (13)$$

решает задачу квадратичной интерполяции по трем узлам x_0, x_1, x_2. Действительно, при $x = x_0$ формула (13) дает

$$L_{012}(x_0) = \frac{1}{x_2 - x_0}\begin{vmatrix} L_{01}(x) & 0 \\ L_{12}(x) & x_2 - x_0 \end{vmatrix} = L_{01}(x_0) = y_0,$$

при $x = x_1$ имеем

$$L_{012}(x_0) = \frac{1}{x_2 - x_0}\begin{vmatrix} L_{01}(x_1) & x_0 - x_1 \\ L_{12}(x_1) & x_2 - x_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{x_2 - x_0}\begin{vmatrix} y_1 & x_0 - x_1 \\ y_1 & x_2 - x_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{y_1}{x_2 - x_0}\begin{vmatrix} 1 & x_0 - x_1 \\ 1 & x_2 - x_1 \end{vmatrix} = \frac{y_1}{x_2 - x_0}(x_2 - x_0) = y_1,$$

при $x = x_2$ получаем $L_{012}(x_2) = y_2$.

Аналогично может быть записан полином Лагранжа $L_{123}(x)$ для интерполирования по трем узлам x_1, x_2, x_3:

$$L_{123} = \frac{1}{x_3 - x_1}\begin{vmatrix} L_{12}(x) & x_1 - x \\ L_{23}(x) & x_3 - x \end{vmatrix} \qquad \text{и т. д.}$$

По индукции можно записать, что

$$L_{012....k}(x) = \frac{1}{x_k - x_0} \begin{vmatrix} L_{012....k-1}(x) & x_0 - x \\ L_{123....k}(x) & x_k - x \end{vmatrix} \qquad (14)$$

есть специальная форма записи интерполяционного полинома Лагранжа, принимающего в узлах $x_0, x_1, ..., x_k$ соответственно значения $y_0, y_1, ..., y_k$.

Вычисления по схеме Эйткена удобно расположить в таблице 1 (для $k = 4$). Таким образом, описанный рекуррентный процесс интерполяции не требует априорного задания степени интерполяционного полинома. Здесь можно постепенно подключать все новые и новые узлы интерполяции до тех пор, пока последовательные значения $L_{012....k}(x')$ и $L_{0..2....k,k+1}(x')$ не совпадут в пределах заданной точности.

Таблица 1

x_i	y_i	$x_i - x'$	$L_{i-1,i}$	$L_{i-2,i-1,i}$	$L_{i-3,i-2,i-1}$	$L_{1/-4,i-3,i-2,i-1,i}$
x_0 x_1 x_2 x_3 x_4	y_0 y_1 y_2 y_3 y_4	$x_0 - x'$ $x_1 - x'$ $x_2 - x'$ $x_3 - x'$ $x_4 - x'$	L_{01} L_{12} L_{23} L_{34}	L_{012} L_{123} L_{234}	L_{0123} L_{1234}	L_{01234}

Единообразие вычислений и возможность автоматического контроля достигнутой точности позволяет рекомендовать процесс Эйткена как один из наиболее приемлемых алгоритмов интерполяции для реализации на ЭВМ, особенно при достаточно большом количестве узлов.

Пример 1.3. Приведем решение примера по схеме Эйткена для $x = 2$ (таблице 2).

Таблица 2

x_i	y_i	$x_i - x'$	$L_{i-1,i}$	$L_{i-2,i-1,i}$	$L_{i-3,i-2,i-1,i}$
0 1 3 4	–4 0,5 0,5 8	–2 –1 1 2	5 0,5 –7	2 –2	0

Ответ: $f(2) \approx \varphi(2) = 0.$

Будем предполагать, что исходные данные безошибочны, при этом решались в основном две задачи:

1) определение значения функции, заданной табличным способом в промежуточной фиксированной точке;

2) аналитическое описание табличной функции полиномом той или иной степени.

Задание 1. При проведении эксперимента пропущена запись опытной величины y для двух фиксированных значений x (табл. 3). Необходимо с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа восстановить запись и оценить относительную погрешность вычислений, полагая, что значение производной четвертого порядка задано $|f^{(4)}(x)| = N$.

Таблица 3

N	x	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5
1	y	1,0	1,5	?	2,5	?	4,5
N	x	10	12	14	16	18	20
2	y	0,5	?	2,5	?	4,0	5,5
N	x	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
3	y	5,5	6,5	?	8,0	?	10,0
N	x	8	9	10	11	12	13
4	y	21	?	25	?	35	45
N	x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
5	y	10	?	7	5	?	2
N	x	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
6	y	–5	0	?	12	?	20
N	x	10	20	30	40	50	60
7	y	2,5	?	–5,0	?	3,0	5,0
N	x	0	2	4	6	8	10
8	y	–10	–2	?	–4	?	–10
N	x	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5

9	y	12	?	18	?	24	30
N	x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
10	y	–10	–12	?	–8	?	–2

Пример выполнения задания 1. Используя интерполяционный многочлен Лагранжа, вычислить значение функции, заданной таблично в точке $x = 0{,}2$ и оценить абсолютную и относительную погрешности вычислений для заданного значения третьей производной: $|f^{(3)}(x)| = 1$.

i	0	1	2
x	0,1	0,5	0,9
y	1,6	0,5	–1,5

1. В нашем случае $n = 2$ (x_0, x_1, x_2), используем многочлен Лагранжа второй степени:

$$L_2(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} =$$

$$= 1{,}6 \frac{(x-0{,}5)(x-0{,}9)}{(0{,}1-0{,}5)(0{,}1-0{,}9)} + 0{,}5 \frac{(x-0{,}1)(x-0{,}9)}{(0{,}5-0{,}1)(0{,}5-0{,}9)} + (-1{,}5) \frac{(x-0{,}1)(x-0{,}5)}{(0{,}9-0{,}1)(0{,}9-0{,}5)};$$

$$L_2(0{,}2) = 1{,}6 \frac{(-0{,}3)(-0{,}7)}{(-0{,}4)(-0{,}8)} + 0{,}5 \frac{0{,}1\cdot(-0{,}7)}{0{,}4\cdot(-0{,}4)} - 1{,}5 \frac{0{,}1\cdot(-0{,}3)}{0{,}8\cdot 0{,}4} = 1{,}4094.$$

2. Оценим погрешность интерполяции:

$$R(x) = \frac{f^{(3)}(x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) = \frac{1}{3!}(x-0{,}1)(x-0{,}5)(x-0{,}9);$$

$$R(0{,}2) = \frac{1}{6} \cdot 0{,}1 \cdot (-0{,}3) \cdot (-0{,}7) = 0{,}0035.$$

Абсолютная погрешность составит

$$\Delta f(0{,}2) = |R(0{,}2)| = 0{,}0035.$$

Относительная погрешность составит

$$\delta\ f(0{,}2) = \frac{\Delta f(0{,}2)}{f(0{,}2)} = \frac{0{,}0035}{1{,}4094} = 2{,}483 \cdot 10^{-3}.$$

Библиографический список

1. Амосов, А. А. Вычислительные методы для инженеров [Текст] : учебное пособие для втузов / А. А. Амосов, Ю. А. Дубинский, Н.В. Копченова. - М. : Высшая школа, 1994. - 544 с..

2. Вержбицкий В.М. Численные методы математической физики [Электронный ресурс]: учебное пособие / В.М.Вержбицкий. - М: Директ.-Медиа, 2013. - 212 с. // Режим доступа -http://biblioclub.ru/

3. Волков Е.А. Численные методы [Текст]: учебное пособие / Е.А. Волков. - 4 –е изд., стер.– СПб.: Лань., 2007. - 256 с.

4. Киреев, В. И. Численные методы в примерах и задачах [Текст] : учебное пособие / В. И. Киреев, А. В. Пантелеев. - Изд. 4-е, испр. - Санкт-Петербург : Лань, 2015. - 448 с. : ил. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - Библиогр.: с. 441-443.

5. Численные методы [Текст] : учебное пособие : [для студентов 2 курса специальности 230700.62 «Прикладная информатика» при изучении дисциплины «Численные методы»] / В. А. Милых, Ю. А. Халин ; - Курск : ЮЗГУ, 2013. - 155 с.