МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)
Кафедра информационных систем и технологий

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
____________ О.Г. Локтионова
«___» ______________ 2018 г.

Линейное программирование. Симплексный метод решения:
методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Исследование операций и методы оптимизации»

Курск 2018

УДК 519.8
Составитель Ю.А. Халин

Рецензент
Кандидат физико-математических наук, доцент В.В. Свиридов

Линейное программирование. Симплексный метод решения: методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Исследование операций и методы оптимизации» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост. Ю.А. Халин. Курск, 2018. 15 с. Библиогр.: с. 15.

Приводится описание симплексного метода решения задачи линейного программирования. Приведены теоретические положения, основные расчетные формулы, практические примеры и задания.

Методические рекомендации предназначены для студентов, обучающихся по направлениям, укрупнённой группы специальностей 09.00.00.

Текст печатается в авторской редакции.

Подписано в печать . Формат 60x84 1/16.
Усл.печ. л. 0,87 п.л . Уч.-изд. л. 0,78 . Тираж 100 экз. Заказ.
Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

1. Краткие теоретические сведения

Доказано, что оптимальное решение задачи линейного программирования связано с угловыми точками многогранника решений, то есть с опорными планами, каждый из которых определяется системой m линейно независимых векторов $\overline{P}_j$, содержащихся в данной системе $\overline{P}_1, \overline{P}_2, ..., \overline{P}_n$. Количество опорных планов, содержащихся в задаче, определяется числом сочетаний C_n^m. Поэтому необходимо иметь метод, позволяющий осуществлять упорядоченный переход от одного опорного плана к другому, - алгоритм последовательного улучшения опорного плана. Такой алгоритм, являющийся основой современного метода, был опубликован в 1947г. Дж.Данцигом и получил название ***симплексного метода***. Название метода возникло от термина "симплекс", что означает простейший многогранник n-мерного пространства, имеющий n+1 вершину.

Алгоритм, реализующий этот метод, включает три этапа:

1. Способ определения исходного опорного решения.
2. Правило перехода к следующему "лучшему" опорному плану.
3. Критерий проверки оптимальности найденного решения или необходимости его улучшения.

Найдем такие значения $x_1, x_2, ..., x_n$, которые обращают в ***минимум*** линейную форму $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... c_n x_n$ при условиях

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + ...a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + ...a_{2n} x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1} x_1 + ...a_{mn} x_n = b_m \\ x_j \geq 0, \quad j = 1,2,..., n, m < n. \end{cases} \qquad (1)$$

Ограничения вида неравенств могут быть приведены к уравнениям введением неотрицательных переменных x_{n+i}, которые называются дополнительными. В линейную форму они входят с нулевыми коэффициентами. Необходимо заметить, что неравенства $\sum a_{ij} x_j \geq b_i$ приводят к каноническому виду введением дополнительных переменных с коэффициентом (-1), а неравенства $\sum a_{ij}x_j \le b_i$ - с коэффициентом (+1):

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i \quad \to \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+1} = b_i \qquad (i=1,2,...,m), \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \quad \to \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+1} = b_i \qquad (i=1,2,...,m). \end{aligned} \tag{2}$$

Задача линейного программирования, в которой максимизируется линейная форма, может быть приведена к задаче минимизации умножением всех коэффициентов c_j на (-1). Таким образом, любая задача линейного программирования может быть записана в канонической форме.

Симплекс-методом задача линейного программирования решается за конечное число шагов (итераций). На первом шаге отыскивается исходный опорный план, содержащий не более m ненулевых компонент, и на каждом шаге осуществляется нахождение нового опорного плана со значением линейной формы не большим, чем у предыдущего для задачи минимизации или не меньшим – для задачи максимизации.

При сведении задачи линейного программирования к каноническому виду $\sum a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i, \quad (i=1,2,..,m)$ коэффициенты при переменных x_{n+i} образуют систему m линейно-независимых векторов $\overline{P}_{n+1}, \overline{P}_{n+2},..., \overline{P}_{n+m}$. В качестве исходного опорного плана принимается следующий:

$$\overline{X} = (0,0,...,0,.b_1, b_2,...b_m),$$

т.е. $x_1 = 0, x_2 = 0,..., x_n = 0, x_{n+1} = b_1, x_{n+2} = b_2,..., x_{n+m} = b_m$.

Условия задачи можно представить в виде табл.1.

Таблица 1 - Условия задачи

№	Б	C	P_0	$\frac{C_1}{P_1}$	$\frac{C_2}{P_2}$	…	$\frac{C_j}{P_j}$	…	$\frac{C_n}{P_n}$	$\frac{C_{n+1}}{P_{n+1}}$	…	$\frac{C_{n+m}}{P_{n+m}}$
1	P_{n+1}	C_{n+1}	b_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1j}	…	a_{1n}	1	…	0
2	P_{n+2}	C_{n+2}	b_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2j}	…	a_{2n}	0	…	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
i	P_{n+i}	C_{n+i}	b_i	a_{i1}	a_{i2}	…	a_{ij}	…	a_{in}	0	…	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	P_{n+m}	C_{n+m}	b_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mj}	…	a_{mn}	0	…	1
m+1	x	x	Z_0	Z_1-C_1	Z_2-C_2		Z_j-C_j	…	Z_n-C_n	0	…	0

Здесь столбцы:

Б – вектора, соответствующие базисным переменным;

$С_Б$ – коэффициенты линейной формы при соответствующих базисных переменных;

P_0 – вектор-столбец свободных членов (значения базисных переменных опорного плана);

$Z_o = C_{n+1}b_1 + C_{n+2}b_2 + ... + C_{n+m}b_m$ - значение линейной формы, соответствующее опорному плану;

$\overline{P}_j$ - вектор-столбец коэффициентов при x_j в системе ограничений.

Элементы (m+1)-й строки

$$Z_j - C_j = (C_{n+1}a_{1j} + C_{n+2}a_{2j} + ... + C_{n+m}a_{mj}) - C_j.$$

Первый шаг в анализе исходного опорного плана – проверка его на оптимальность. План является оптимальным, если в (m+1)-й строке отсутствуют положительные элементы (в задаче минимизации):

$$Z_j - C_j \le 0, \quad j = 1,2,..., n+m.$$

Если же в (m+1)-й строке имеются положительные элементы, то это свидетельствует о возможности улучшения опорного плана.

При переходе от одного опорного плана к другому осуществляют следующие вычисления:

1. Выбирают вектор для ввода в базис, т.е. выбирают ведущий (разрешающий) столбец $\overline{P}_k$ среди векторов $\overline{P}_1, \overline{P}_2, ..., \overline{P}_n$ по правилу $Z_k - C_k = \max\limits_j (Z_j - C_j),\ Z_j - C_j > 0$.

2. Выбирают вектор для исключения из базиса, т.е. выбирают ведущую (разрешающую) строку с номером ℓ по правилу

$\min\limits_{a_{ik}>0} \dfrac{b_i}{a_{ik}} = \dfrac{b_\ell}{a_{\ell k}}$, элемент $a_{\ell k}$ называется разрешающим.

3. Переходят к новой симплексной таблице, соответствующей новому опорному плану.

В столбцах Б, $С_Б$, в ℓ-й строке записывается $\overline{P}_k$ и C_k. новые элементы ℓ-й (разрешающей) строки пересчитывают по правилу:

$$b'_\ell = \frac{b_\ell}{a_{\ell k}}, \qquad a'_\ell = \frac{a_\ell}{a_{\ell k}}, \quad j = 1,2,..., m+n. \tag{3}$$

Элементы столбца $\overline{P}_0$ пересчитывают следующим образом:

$$b_i^/ = b_i - \frac{b_\ell}{a_{\ell k}} \cdot a_{ik}, \qquad i = 1,2,\ldots,\ell-1,\ell+1,\ldots,m. \tag{4}$$

Аналогично пересчитывают остальные элементы матрицы коэффициентов и (m+1)-й строки

$$a_{ij}^/ = a_{ij} - \frac{a_{\ell j}}{a_{\ell k}} \cdot a_{ik}, \qquad i = 1,2,\ldots,\ell-1,\ell+1,\ldots,m$$

$$Z_0^/ = (\overline{C}_Б, \overline{P}_0), \tag{5}$$

$$(Z_j - C_j)^/ = (Z_j - C_j) - \frac{a_{\ell j}}{a_{\ell k}} a_{ik}.$$

Замечания: 1. Элемент (m+1)-й строки j столбца равен скалярному произведению вектора $\overline{C}$ на $\overline{P}_j$ минус C_j $(j = 1,2,\ldots,n+m)$. Дублирующий пересчет этих элементов по такому правилу позволяет контролировать правильность вычислений.

Новый опорный план проверяют на оптимальность. План является оптимальным, если в (m+1)-й строке отсутствуют положительные элементы (в задаче минимизации): $Z_j - C_j \le 0, \quad j = 1,2,\ldots,n+m.$ В случае неоптимальности расчеты повторяют.

2. Если в разрешающем столбце все элементы $a_{ik} \le 0, \; i = 1,2,\ldots,m,$ то линейная форма не ограничена на данном множестве планов.

3. Признаком существования альтернативного оптимального плана является наличие в последней симплексной таблице нулевых элементов в (m+1)-й
строке в небазисных столбцах.

Альтернативный оптимальный план может быть рассчитан, если выбрать соответствующий столбец в качестве разрешающего и произвести один шаг симплексных преобразований.

2 Примеры решения задач линейного программирования

Производственно-экономическая ситуация задана следующей системой линейных ограничений

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 7x_4 \le 46, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \le 8, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \le 10, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

Найти максимальное значение целевой функции $Z = 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4$.

Запишем задачу в каноническом виде

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 7x_4 + x_5 = 46, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 8, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + x_7 = 10. \end{cases}$$

Преобразованную систему уравнений запишем в векторном виде

$$x_1 \cdot \overline{P}_1 + x_2 \cdot \overline{P}_2 + x_3 \cdot \overline{P}_3 + x_4 \cdot \overline{P}_4 + x_5 \cdot \overline{P}_5 + x_6 \cdot \overline{P}_6 + x_7 \cdot \overline{P}_7 = \overline{P}_0,$$

где

$$\overline{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \overline{P}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}; \overline{P}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}; \overline{P}_4 = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \overline{P}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \overline{P}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \overline{P}_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \overline{P}_0 = \begin{pmatrix} 46 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Так как среди векторов $\overline{P}_j$ есть три единичных, то можно записать опорный план: $\overline{X} = (0; 0; 0; 0; 46; 8; 10)$, т.е. $x_1 = 0; x_2 = 0 x_3 = 0; x_4 = 0; x_5 = 46;\ x_6 = 8;\ x_7 = 10.$

Условие задачи для первой итерации представим в виде табл. 2.

Таблица 2

i	Б	$C_Б$	P_0	2	1	-3	5	0	0	0	Σ
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	
1	P_5	0	46	1	7	3	7	1	0	0	19
2	P_6	0	8	3	-1	1	2	0	1	0	6
3	P_7	0	10	2	3	-3	1	0	0	1	4
m+1	$Z_j - C_j$		Z_0 0	Z_1-C_1 -2	Z_2-C_2 -1	Z_3-C_3 3	Z_4-C_4 -5	Z_5-C_5 0	Z_6-C_6 0	Z_7-C_7 0	–

Примечание. Столбец Σ - проверочный, величина в нем содержащая равна сумме $\sum a_{ij}$.Дублирующий пересчет этого столбца по формулам (3) позволяет контролировать правильность вычисления элементов a_{ij}.

Столбцы: Б – базисные вектора;

$C_Б$ – коэффициенты линейной формы при базисных переменных;

$\overline{P}_0$ - базисные переменные $x_5 = 46;\ x_6 = 8;\ x_7 = 10.$

Рассчитываем элементы (m+1)-й строки:

$$Z_0 = (C_Б, P_0) = 0 \cdot 46 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 10 = 0;$$

$$Z_1 - C_1 = (C_Б, P_1) - C_1 = (0 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 2) - 2 = -2;$$

$$Z_2 - C_2 = -1; \quad Z_3 - C_3 = 3; \quad Z_4 - C_4 = -5;$$

$$Z_5 - C_5 = Z_6 - C_6 = Z_7 - C_7 = 0.$$

На основании формального признака оптимальности симплекс-метода максимальное по абсолютной величине отрицательное число стоит в (m+1) строке вектора $\overline{P}_4$. Следовательно, в базис введем вектор $\overline{P}_4$. Определяем вектор, подлежащий исключению из базиса по величине

$$(b_i / a_{i_4}) \quad \text{для} \quad a_{i_4} > 0 : \left(\frac{b_i}{a_{i_4}} \right)_{\min} = \min\left(\frac{46}{7}; \frac{8}{2}; \frac{10}{1} \right) = \frac{8}{2} = 4,$$

что соответствует 2 строке. Следовательно вектор $\overline{P}_6$ подлежит исключению.

Столбец $\overline{P}_4$ и вторая строка являются разрешающими. Составляем симплекс-план второй итерации в табл. 3.

Таким образом: разрешающий столбец k=4,
разрешающая строка ℓ=2,
разрешающий элемент $a_{\ell k} = a_{24} = 2.$

Новые элементы разрешающей строки (второй):

$$b'_\ell = \frac{b_\ell}{a_{\ell k}} = \frac{b_2}{a_{24}} = \frac{8}{2} = 4;$$

$$a'_{\ell_1} = a'_{21} = \frac{a_{21}}{a_{24}} = \frac{3}{2}; \quad a'_{22} = \frac{a_{22}}{a_{24}} = -\frac{1}{2}; \quad a'_{23} = \frac{a_{23}}{a_{24}} = \frac{1}{2};$$

$$a'_{24} = 1; \quad a'_{25} = a'_{27} = 0; \quad a'_{26} = \frac{1}{2}.$$

Элементы столбца $\overline{P}_0$: $b_i^{/} = bi - \dfrac{b_\ell}{a_{\ell k}} \cdot a_{ik}$.

$$b_1^{/} = b_1 - \frac{b_2}{a_{24}} \cdot a_{14} = 46 - \frac{8}{2} \cdot 7 = 18;$$

$$b_3^{/} = b_3 - \frac{b_2}{a_{24}} \cdot a_{34} = 10 - \frac{8}{2} \cdot 1 = 6;$$

$$Z_0^{/} = 18 \cdot 0 + 5 \cdot 4 + 0 \cdot 6 = 20.$$

Остальные элементы матрицы (a_{ij}): $a_{ij}^{/} = a_{ij} - \dfrac{a_{\ell j}}{a_{\ell k}} \cdot a_{ik}$.

1-я строка $i = 1$: $\quad a_{11}^{/} = a_{11} - \dfrac{a_{21}}{a_{24}} \cdot a_{14} = 1 - \dfrac{3}{2} \cdot 7 = -\dfrac{19}{2};$

$$a_{12}^{/} = a_{12} - \frac{a_{22}}{a_{24}} \cdot a_{14} = 7 - \frac{(-1)}{2} \cdot 7 = \frac{21}{2};$$

$$a_{13}^{/} = a_{13} - \frac{a_{23}}{a_{24}} \cdot a_{14} = 3 - \frac{1}{2} \cdot 7 = -\frac{1}{2}; \qquad a_{14}^{/} = 0;$$

$$a_{15}^{/} = a_{15} - \frac{a_{25}}{a_{24}} \cdot a_{14} = 1 - \frac{0}{2} \cdot 7 = 1;$$

$$a_{16}^{/} = a_{16} - \frac{a_{26}}{a_{24}} \cdot a_{14} = 0 - \frac{1}{2} \cdot 7 = -\frac{7}{2}; \qquad a_{17}^{/} = 0.$$

3-я строка $i = 3$: $\quad a_{31}^{/} = a_{31} - \dfrac{a_{21}}{a_{24}} \cdot a_{34} = 2 - \dfrac{3}{2} \cdot 1 = \dfrac{1}{2};$

$$a_{32}^{/} = a_{32} - \frac{a_{22}}{a_{24}} \cdot a_{34} = 3 - \frac{(-1)}{2} \cdot 1 = \frac{7}{2};$$

$$a_{33}^{/} = a_{33} - \frac{a_{23}}{a_{24}} \cdot a_{34} = -3 - \frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{7}{2}; \qquad a_{34}^{/} = 0;$$

$$a_{35}^{/} = a_{35} - \frac{a_{25}}{a_{24}} \cdot a_{34} = 0; \qquad a_{36}^{/} = a_{36} - \frac{a_{26}}{a_{24}} \cdot a_{34} = 0 - \frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{2};$$

$$a_{37}^{/} = a_{37} - \frac{a_{27}}{a_{24}} \cdot a_{34} = 1.$$

(m+1) строка $i=4$: $a_{41}^{/} = a_{41} - \frac{a_{21}}{a_{24}} \cdot a_{44} = -2 - \frac{3}{2} \cdot (-5) = \frac{11}{2}$;

$$a_{42}^{/} = a_{42} - \frac{a_{22}}{a_{24}} \cdot a_{44} = -1 - \frac{(-1)}{2} \cdot (-5) = -\frac{7}{2};$$

$$a_{43}^{/} = a_{43} - \frac{a_{21}}{a_{24}} \cdot a_{44} = 3 - \frac{1}{2} \cdot (-5) = \frac{11}{2}; \qquad a_{44}^{/} = 0;$$

$$a_{45}^{/} == 0; \qquad a_{46}^{/} = a_{46} - \frac{a_{26}}{a_{24}} \cdot a_{44} = 0 - \frac{1}{2} \cdot (-5) = \frac{5}{2}; \qquad a_{47}^{/} = 0.$$

Анализируем на оптимальность табл. 3; план не оптимален, т.к. в (m+1)-й строке есть отрицательное число (–7/12)

Таблица 3

i	Б	$C_Б$	P_0	2	1	-3	5	0	0	0	Σ
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	
1	P_5	0	18	-19/2	21/2	-1/2	0	1	-7/2	0	-2
2	P_4	5	4	3/2	-1/2	1/2	1	0	1/2	0	3
3	P_7	0	6	1/2	7/2	-7/2	0	0	-1/2	1	1
m+1	$Z_j - C_j$		Z_0 20	Z_1-C_1 11/2	Z_2-C_2 -7/2	Z_3-C_3 11/2	Z_4-C_4 0	Z_5-C_5 0	Z_6-C_6 5/2	Z_7-C_7 0	–

Максимальное по абсолютной величине отрицательное число принадлежит столбцу $\overline{P}_2$. Определим вектор, подлежащий исключению из базиса

$$\left(\frac{b_i}{a_{i_2}}\right)_{\min} = \min\left(\frac{18}{21/2}; \frac{6}{7/12}\right) = \frac{18 \cdot 2}{21} = \frac{12}{7}$$ - величины одинаковы.

Выбираем 3-ю строку, вектор $\overline{P}_7$ подлежит исключению. Столбец $\overline{P}_2$ и 3-я строка являются разрешающими. Составляем симплекс-план 3-й итерации (табл.4).

Таблица 4

i	Б	$C_Б$	P_0	2	1	-3	5	0	0	0	Σ
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	
1	P_5	0	0	-11	0	10	0	1	-2	-3	-5
2	P_4	5	34/7	11/7	0	0	1	0	3/7	1/7	22/7
3	P_2	1	12/7	1/7	1	-1	0	0	-1/7	2/7	2/7
m+1	$Z_j - C_j$		Z_0 26	Z_1-C_1 6	Z_2-C_2 0	Z_3-C_3 2	Z_4-C_4 0	Z_5-C_5 0	Z_6-C_6 2	Z_7-C_7 1	–

Таким образом: разрешающий столбец $\overline{P}_2$ k=4,

разрешающая строка $\ell = 2$,

разрешающий элемент $a_{\ell k} = a_{32} = 7/2.$

Новые элементы разрешающей строки (третьей)

$$b_\ell' = \frac{b_\ell}{a_{\ell k}} = \frac{b_3}{a_{32}} = \frac{6}{7/2} = \frac{12}{7}; \qquad a_{\ell_1}' = a_{31}' = \frac{a_{31}}{a_{32}} = \frac{1/2}{7/2} = \frac{1}{7};$$

$$a_{32}' = \frac{a_{32}}{a_{32}} = 1; \qquad a_{33}' = \frac{a_{33}}{a_{32}} = \frac{-7/2}{7/2} = -1; \qquad a_{34}' = a_{35}' = 0;$$

$$a_{36}' = \frac{a_{36}}{a_{32}} = \frac{-1/2}{7/2} = -\frac{1}{7}; \quad a_{37}' = \frac{a_{37}}{a_{32}} = \frac{1}{7/2} = \frac{2}{7}.$$

Элементы столбца $\overline{P}_0$: $b_i' = b_i - \frac{b_\ell}{a_{\ell k}} \cdot a_{ik}$;

$$b_1' = b_1 - \frac{b_3}{a_{32}} \cdot a_{12} = 18 - \frac{6}{7/2} \cdot \frac{21}{2} = 18 - \frac{12}{7} \cdot \frac{21}{2} = 0;$$

$$b_2' = b_2 - \frac{b_3}{a_{32}} \cdot a_{22} = 4 - \frac{12}{7} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 4 + \frac{6}{7} = 4\frac{6}{7} = \frac{34}{7};$$

$$Z_0' = 0 \cdot 0 + 5 \cdot \frac{34}{7} + 1 \cdot \frac{12}{7} = \frac{170}{7} + \frac{12}{7} = \frac{182}{7} = 26.$$

Остальные элементы матрицы (a_{ij}): $a_{ij}' = a_{ij} - \frac{a_{\ell j}}{a_{\ell k}} \cdot a_{ik}$.

1-я строка $i = 1$:

$$a_{11}' = a_{11} - \frac{a_{31}}{a_{32}} \cdot a_{12} = -\frac{19}{2} - \frac{1/2}{7/2} \cdot \frac{21}{2} = -\frac{19}{2} - \frac{3}{2} = -11; \qquad a_{12}' = 0;$$

$$a_{13}' = a_{13} - \frac{a_{33}}{a_{32}} \cdot a_{12} = -\frac{1}{2} - \frac{(-7/2)}{7/2} \cdot \frac{21}{2} = 10;$$

$$a_{14}' = a_{14} - \frac{a_{34}}{a_{32}} \cdot a_{12} = 0; \qquad a_{15}' = a_{15} - \frac{a_{35}}{a_{32}} \cdot a_{12} = 1;$$

$$a_{16}' = a_{16} - \frac{a_{36}}{a_{32}} \cdot a_{12} = -\frac{7}{2} - \frac{(-1/2)}{7/2} \cdot \frac{21}{2} = -2;$$

$$a'_{17} = a_{17} - \frac{a_{37}}{a_{32}} \cdot a_{12} = -\frac{1}{7/2} \cdot \frac{21}{2} = -3.$$

2-я строка $i = 2$:

$$a'_{21} = a_{21} - \frac{a_{31}}{a_{32}} \cdot a_{22} = \frac{3}{2} - \frac{1/2}{7/2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{22}{14} = \frac{11}{7}; \qquad a'_{22} = 0;$$

$$a'_{23} = a_{23} - \frac{a_{33}}{a_{32}} \cdot a_{22} = \frac{1}{2} - \frac{(-7/2)}{7/2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 0;$$

$$a'_{24} = a_{24} - \frac{a_{34}}{a_{32}} \cdot a_{22} = 1; \qquad a'_{25} = 0;$$

$$a'_{26} = a_{26} - \frac{a_{36}}{a_{34}} \cdot a_{22} = \frac{1}{2} - \frac{(-1/2)}{7/2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{6}{14} = \frac{3}{7};$$

$$a'_{27} = a_{27} - \frac{a_{37}}{a_{32}} \cdot a_{22} = 0 - \frac{1}{7/2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{7}.$$

(m+1) строка $i = 4$:

$$a'_{41} = a_{41} - \frac{a_{31}}{a_{32}} \cdot a_{42} = \frac{11}{2} - \frac{1/2}{7/2} \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) = 6; \qquad a'_{42} = 0;$$

$$a'_{43} = a_{43} - \frac{a_{33}}{a_{32}} \cdot a_{42} = \frac{11}{2} - \frac{(-7/2)}{7/2} \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) = 2;$$

$$a'_{44} = a_{44} - \frac{a_{34}}{a_{32}} \cdot a_{42} = 0; \qquad a'_{45} = 0;$$

$$a'_{46} = a_{46} - \frac{a_{36}}{a_{32}} \cdot a_{42} = \frac{5}{2} - \frac{(-1/2)}{7/2} \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) = 2;$$

$$a'_{47} = a_{47} - \frac{a_{37}}{a_{32}} \cdot a_{42} = 0 - \frac{1}{7/2} \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) = 1.$$

Анализ плана 3-й итерации по элементам (m+1) строки показывает, что нет отрицательных значений $(Z_j - C_j)$. Следовательно, получен оптимальный план. Для него решение $\overline{X} = (0;12/7;0;34/7;0;0;0)$, т.е. $x_1 = 0; x_2 = 12/7; x_3 = 0; x_4 = 34/7; x_5 = 0; x_6 = 0; x_7 = 0.$ Получено максимальное значение целевой функции Z_0=26, действительно

$$Z = 2 \cdot 0 + \frac{12}{7} - 3 \cdot 0 + 5 \cdot \frac{32}{7} = 26 \quad \text{ед.}$$

3. Индивидуальное задание студента

Используя симплексный метод, найдите экстремальное значение Z при указанных ограничениях:

1. $Z = x_1 + 4x_2 + 2x_3 \to \max$ $-2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \le 1;$ $6x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 18;$ $4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \le 12;$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$	**2.** $Z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max$ $-2x_1 - 4x_2 + x_3 \le 1;$ $6x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 6;$ $x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 8;$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$
3. $Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \to \max$ $-x_1 - 2x_2 + x_3 \le 2;$ $4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \le 12;$ $2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 4;$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$	**4.** $Z = 2x_1 + x_2 + 4x_3 \to \max$ $-3x_1 - 4x_2 + x_3 \le 1;$ $6x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 6;$ $5x_1 + 20x_2 + 4x_3 \le 20;$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$
5. $Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to \max$ $-3x_1 - 5x_2 + 3x_3 \le 3;$ $3x_1 + 6x_2 + 2x_3 \le 12;$ $10x_1 + 6x_2 + 15x_3 \le 30;$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$	**6.** $Z = 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to \max$ $-3x_1 - x_2 + x_3 \le 2;$ $12x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 12;$ $3x_1 + 6x_2 + 2x_3 \le 6;$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$
7. $Z = 4x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max$ $-2x_1 - x_2 + 3x_3 \le 5;$ $2x_1 + 4x_2 + x_3 \le 4;$ $6x_1 + 15x_2 + 10x_3 \le 30;$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$	**8.** $Z = 2x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max$ $-x_1 - 2x_2 + 3x_3 \le 6;$ $6x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 12;$ $12x_1 + 20x_2 + 15x_3 \le 60;$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$
9. $Z = 2x_1 + x_2 + 4x_3 \to \max$ $-2x_1 - x_2 + x_3 \le 1;$ $5x_1 + 10x_2 + 4x_3 \le 20;$ $4x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 12;$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$	**10.** $Z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \to \max$ $-4x_1 - 2x_2 + x_3 \le 1;$ $x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 4;$ $3x_1 + 6x_2 + 2x_3 \le 6;$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$

11. $Z = x_1 + 7x_2 + 3x_3 \to \max$ $-2x_1 - 2x_2 + x_3 \le 1;$ $3x_1 + 6x_2 + 2x_3 \le 6;$ $4x_1 + x_2 + 2x_3 \le 6;$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$	**12.** $Z = 4x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max$ $-x_1 - 2x_2 + 3x_3 \le 2;$ $10x_1 + 15x_2 + 6x_3 \le 30;$ $12x_1 + 3x_2 + 6x_3 \le 12;$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$
13. $Z = 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 \to \max$ $-3x_1 - x_2 + x_3 \le 2;$ $4x_1 + 10x_2 + 5x_3 \le 20;$ $3x_1 + 4x_2 + 4x_3 \le 12;$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$	**14.** $Z = x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \max$ $-2x_1 - 3x_2 + 3x_3 \le 3;$ $6x_1 + 3x_2 + x_3 \le 6;$ $2x_1 + 4x_2 + x_3 \le 12;$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$
15. $Z = x_1 + x_2 + 3x_3 \to \max$ $-2x_1 - x_2 + x_3 \le 1;$ $2x_1 + x_2 + x_3 \le 2;$ $4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \le 12;$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$	**16.** $Z = x_1 + 4x_2 + 2x_3 \to \max$ $-2x_1 - 4x_2 + 3x_3 \le 6;$ $6x_1 + 15x_2 + 10x_3 \le 30;$ $10x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 10;$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$
17. $Z = 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to \max$ $-2x_1 - x_2 + 2x_3 \le 1;$ $3x_1 + 6x_2 + 2x_3 \le 6;$ $6x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 24;$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$	**18.** $Z = 4x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max$ $-2x_1 - 3x_2 + 3x_3 \le 3;$ $x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 6;$ $2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 12;$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$
19. $Z = 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \to \max$ $-3x_1 - 5x_2 + x_3 \le 1;$ $4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 4;$ $12x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 12;$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$	**20.** $Z = 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 \to \max$ $-x_1 - x_2 + x_3 \le 0{,}5;$ $5x_1 + 10x_2 + 4x_3 \le 20;$ $4x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 12;$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$

Проверить полученный результат, используя встроенную надстройку Ms Excel «Поиск решения».

Контрольные вопросы

1. Сущность симплексного метода решения задачи линейного программирования.

2. Как определить начальное допустимое (базисное) решение?.

3. По каким правилам в симплексном методе переходят к новому базису?

4. Как определить оптимальность полученного решения?

Библиографический список

1. Акулич, И.Л. Математическое программирование в упражнениях и задачах [Текст] : учебное пособие - М.: Высшая школа, 1986. – 319 с.

2. Аттеков, А.В. Методы оптимизации [Текст] : учебное пособие/ Под ред. В.С. Зарубина - М.: ПрСМ, 2003. – 440 с.

3. Вентцель, Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология [Текст]: учебное пособие для студ. втузов. - М.: Высш. шк., 2001. – 208 с.

4. Ржевский, С. В. Исследование операций [Текст] : учебное пособие / С. В. Ржевский. - Санкт-Петербург : Лань, 2013. - 480 с. : ил. - (Учебники для вузов. Специальная литература).