МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)
Кафедра информационных систем и технологий

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_________ О.Г. Локтионова
«___» ______________ 2018 г.

Двойственная задача линейного программирование:
методические указания к практическим занятиям по дисциплине
«Исследование операций и методы оптимизации»

Курск 2018

УДК 519.8
Составитель Ю.А. Халин

Рецензент
Кандидат физико-математических наук, доцент В.В. Свиридов

Двойственная задача линейного программирование: методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Исследование операций и методы оптимизации» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост. Ю.А. Халин. Курск, 2018. 10 с. Библиогр.: с. 10.

Приводится описание двойственной задачи линейного программирования. Приведены теоретические положения, основные расчетные формулы, практические примеры и задания.

Методические рекомендации предназначены для студентов, обучающихся по направлениям, укрупнённой группы специальностей 09.00.00.

Текст печатается в авторской редакции.

Подписано в печать . Формат 60x84 1/16.
Усл.печ. л. 0,58. Уч.-изд. л. 0,62. Тираж 100 экз. Заказ.
Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

1. Краткие теоретические сведения

Любой задаче линейного программирования (исходной, или прямой) можно поставить в соответствие задачу, которая называется сопряженной или двойственной.

Рассмотрим производственную задачу оптимального распределения ресурсов в известной постановке: дана технологическая матрица $\overline{A}$, запасы ресурса $\overline{B}$ и вектор удельных прибылей $\overline{C}$.

$$Z(\overline{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ ...., \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, ..., x_n \ge 0.$$

Пусть некая фирма обращается к руководству предприятия с целью приобретения части ресурсов $\overline{B}$. Возникает вопрос о цене. Естественно – цели у сторон разные: руководство предприятия хочет продать подороже, а приобретатель ресурса хочет купить подешевле. Начинается торг вокруг цен на ресурсы. Обозначим цену ресурса b_1как y_1, тогда цены ресурсов $b_2 - y_2, ..., b_m - y_m$. Цель покупателя в этом случае будет

$$y_1b_1 + y_2b_2 + ...y_mb_m \to \min\ . \qquad (1)$$

А у владельца ресурса своя цель в торге: за единицу продукции j он получает прибыль c_j, истратив на это $(a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj})$ единиц ресурсов, поэтому он так должен задавать цены, чтобы

$$y_1a_{1j} + y_2a_{2j}, ..., y_ma_{mj} \ge c_j. \qquad (2)$$

При обоюдном согласии сторон (продавца и покупателя) получаем новую задачу ЛП

$$Z(\overline{y}) = y_1b_1 + y_2b_2 + ... + y_mb_m \to \min$$

$$\begin{cases} y_1a_{11} + y_2a_{21} + ... + y_ma_{m1} \ge c_1, \\ y_1a_{12} + y_2a_{22} + ... + y_ma_{m2} \ge c_2, \\ ...., \\ y_1a_{1n} + y_2a_{2n} + ... + y_ma_{mn} \ge c_n, \end{cases}$$

$$y_1, y_2, ..., y_m \ge 0.$$

Получили задачу ЛП двойственную по отношению к исходной задаче.

В матричной форме запишем обе задачи и сформулируем правила построения двойственной задачи

Прямая	Двойственная
$Z(\bar{x}) = \bar{C} \cdot \bar{X} \to \max$	$Z(\bar{y}) = \bar{Y} \cdot \bar{B} \to \min$
$\bar{A} \cdot \bar{X} \le \bar{B}$	$\bar{Y} \cdot \bar{B} \ge \bar{C}$
$\bar{X} \ge 0$.	$\bar{Y} \ge 0$.

Получили симметричную пару двойственных задач ЛП.

Из анализа этих задач следуют правила построения:

1. Число переменных двойственной задачи ЛП равно числу ограничений прямой задачи.

2. Каждой переменной прямой задачи соответствует ограничение двойственной, то есть число ограничений двойственной задачи равно числу переменных прямой.

3. Матрица ограничений двойственной задачи получается транспонированием матрицы ограничений прямой задачи.

4. Вектор $\bar{C}$ целевой функции прямой задачи становится вектором правой части ограничений двойственной задачи, а вектор $\bar{B}$ правой части прямой задачи – вектором целевой функции двойственной задачи.

5. Если целевая функция прямой задачи максимизируется, то целевая функция двойственной задачи минимизируется, а ограничения имеют вид $\ge$ и наоборот.

Задачи ЛП, обладающие пятью указанными признаками, называются симметричными.

Несимметричные двойственные задачи. Если исходная прямая задача ЛП дана в канонической форме

$$Z(\bar{x}) = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,\ldots,n.$$

Для составления несимметричной двойственной задачи используют те же правила, что и для симметричной с учетом следующих особенностей:

– ограничениями двойственной задачи будут неравенства. Если в целевой функции $Z(\bar{y})$ двойственной задачи требуется найти минимум, то знак неравенства будет ≥, если минимум, то будет знак ≤;

– переменные y_j- произвольные по знаку.

К пяти пунктам построения двойственной задачи, приведенным выше, необходимо добавить следующее:

– в прямой задаче ограничения — неравенства следует записывать со знаком ≥, если целевая функция минимизируется, и со знаком ≤, если целевая функция максимизируется;

– каждому ограничению-неравенству прямой задачи соответствует в двойственной задаче условие неотрицательности переменных $y_i \ge 0$;

– каждому условию равенства соответствует сопряженная переменная y_j

без ограничения на знак, и наоборот: неотрицательным переменным x_j из прямой задачи в двойственной соответствуют ограничения неравенства, а неограниченным по знаку переменным соответствуют равенства.

2 Примеры решения задач нелинейного программирования

Пример 2.1. Исходная задача представлена в виде

$$Z(\bar{x}) = -5x_1 + 2x_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \ge -2, \\ -x_1 + 3x_2 \le 4, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Проверяем условие задачи. $Z(\bar{x})$ стремится к минимуму, следовательно знаки неравенства должны быть ≥. Второе ограничение умножим на -1. Исходная задача приобретет вид :

$$Z(\bar{x}) = -5x_1 + 2x_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \ge -2, & \Big| \; y_1 \\ x_1 - 3x_2 \ge -4, & \Big| \; y_2 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Теперь можно построить симметричную двойственную задачу:

$$Z(\overline{x}) = -2y_1 - 4y_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 \le -5, \\ y_1 - 3y_2 \le 2, \end{cases}$$

$$y_1, y_2 \ge 0.$$

Правильность построения задачи можно иллюстрировать графически построением областей допустимых решений для прямой (рис. 1) и двойственной задачи (рис. 2). Для прямой задачи оптимальное решение соответствует точке B(5; 3); $\overline{X}^* = (x_1 = 5; x_2 = 3)$; $Z_{min} = -5 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = -19.$

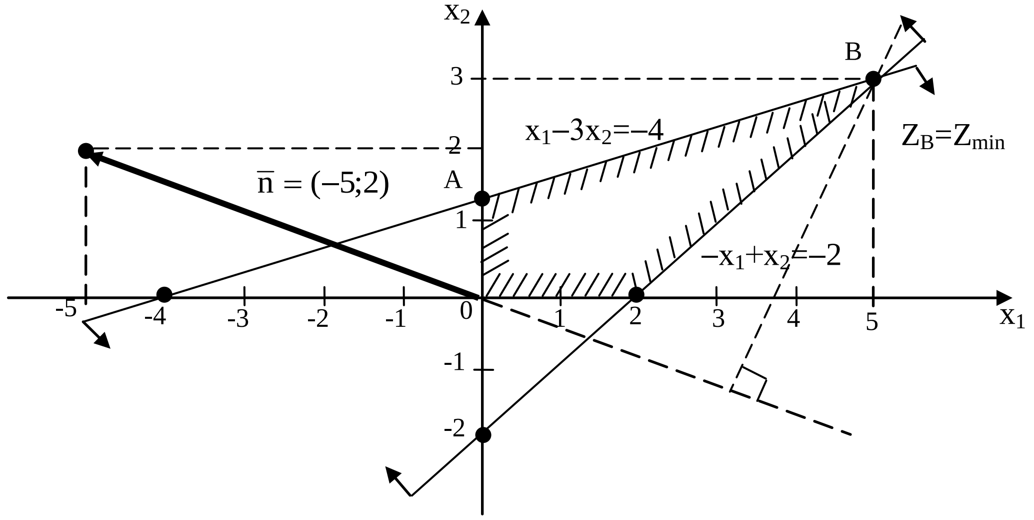

Рис.1.

Решение двойственной задачи представлено на рис.2.

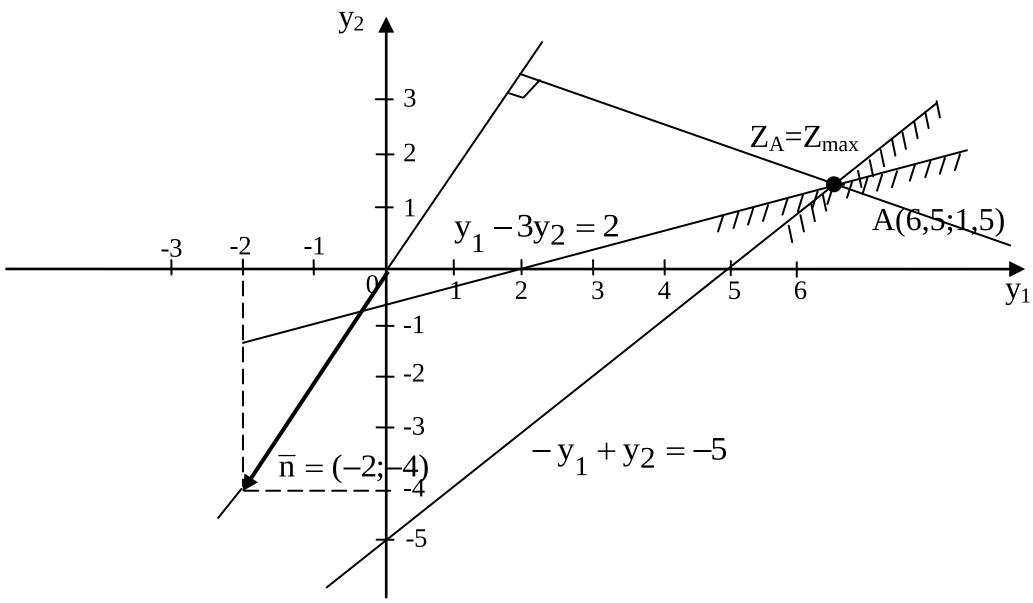

Рис. 2

Здесь допустимое решение соответствует единственной точке A(6,5; 1,5); $Y^* = (y_1 = 6{,}5; y_2 = 1{,}5)$, при этом решении значение целевой функции

$$Z(\bar{y}) = -2 \cdot 6{,}5 - 4 \cdot 1{,}5 = -19 \text{ ед.}$$

Значения целевых функций $Z(\bar{x})$ и $Z(\bar{y})$ совпадают, следовательно, области допустимых решений для сопряженных задач построены правильно.

Пример 2.2. Прямая задача дана в виде:

$$Z(\bar{x}) = x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 \le 4, \\ x_1 \qquad + 3x_3 \qquad - 4x_5 \ge 8, \end{cases}$$

$x_1, x_3, x_5 \ge 0$; x_2, x_4 – не имеют ограничения знака.

В прямой задаче число ограничений равно 3, следовательно, в двойственной задаче будет три переменных y_1, y_2, y_3. Так как y_2, y_3 соответствуют неравенствам, то $y_2, y_3 \ge 0$, а переменная y_1– не будет иметь ограничения в знаке; целевая функция минимизируется, поэтому в прямой задаче знаки неравенств должны быть $\ge$. Умножим второе неравенство на -1:

$$-2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 \ge -4.$$

Тогда прямая задача приобретет вид:

$$Z(\bar{x}) = x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 6, \\ -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 \ge -4, \\ x_1 \qquad + 3x_3 \qquad - 4x_5 \ge 8, \end{cases} \left| \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{matrix} \right.$$

$x_1, x_3, x_5 \ge 0$; x_2, x_4 – не ограничены в знаке.

Запишем двойственную задачу:

$$Z(\bar{y}) = 6y_1 - 4y_2 + 8y_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} y_1 - 2y_2 + y_3 \le 1, \\ -2y_1 - 3y_2 \qquad = -2 \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 \le 1, \\ 3y_1 + y_2 \qquad = -1, \\ -2y_1 - y_2 - 4y_3 \le 1, \end{cases}$$

$y_2, y_3 \ge 0$; y_1 – не ограничена в знаке.

Здесь первое, третье и пятое ограничения будут неравенствами, т.к. они соответствуют неотрицательным переменным $x_1, x_3, x_5 \ge 0$, а второе и четвертое ограничения запишем уравнениями, т.к. они соответствуют переменным x_2 и x_4, неограниченным по знаку.

3. Индивидуальное задание студента

Для заданной прямой задачи линейного программирования, найти соответствующую ей двойственную:

1. $Z = x_1 + 4x_2 + 2x_3 \to \max$ $-2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \le 1;$ $6x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 18;$ $4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \le 12;$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$	**2.** $Z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max$ $-2x_1 - 4x_2 + x_3 \le 1;$ $6x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 6;$ $x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 8;$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$
3. $Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \to \max$ $-x_1 - 2x_2 + x_3 \le 2;$ $4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \le 12;$ $2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 4;$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$	**4.** $Z = 2x_1 + x_2 + 4x_3 \to \max$ $-3x_1 - 4x_2 + x_3 \le 1;$ $6x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 6;$ $5x_1 + 20x_2 + 4x_3 \le 20;$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$
5. $Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to \max$ $-3x_1 - 5x_2 + 3x_3 \le 3;$ $3x_1 + 6x_2 + 2x_3 \le 12;$ $10x_1 + 6x_2 + 15x_3 \le 30;$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$	**6.** $Z = 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to \max$ $-3x_1 - x_2 + x_3 \le 2;$ $12x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 12;$ $3x_1 + 6x_2 + 2x_3 \le 6;$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$
7. $Z = 4x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max$ $-2x_1 - x_2 + 3x_3 \le 5;$ $2x_1 + 4x_2 + x_3 \le 4;$ $6x_1 + 15x_2 + 10x_3 \le 30;$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$	**8.** $Z = 2x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max$ $-x_1 - 2x_2 + 3x_3 \le 6;$ $6x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 12;$ $12x_1 + 20x_2 + 15x_3 \le 60;$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$

9. $Z = 2x_1 + x_2 + 4x_3 \to \max$ $-2x_1 - x_2 + x_3 \le 1;$ $5x_1 + 10x_2 + 4x_3 \le 20;$ $4x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 12;$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$	**10.** $Z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \to \max$ $-4x_1 - 2x_2 + x_3 \le 1;$ $x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 4;$ $3x_1 + 6x_2 + 2x_3 \le 6;$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$
11. $Z = x_1 + 7x_2 + 3x_3 \to \max$ $-2x_1 - 2x_2 + x_3 \le 1;$ $3x_1 + 6x_2 + 2x_3 \le 6;$ $4x_1 + x_2 + 2x_3 \le 6;$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$	**12.** $Z = 4x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max$ $-x_1 - 2x_2 + 3x_3 \le 2;$ $10x_1 + 15x_2 + 6x_3 \le 30;$ $12x_1 + 3x_2 + 6x_3 \le 12;$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$
13. $Z = 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 \to \max$ $-3x_1 - x_2 + x_3 \le 2;$ $4x_1 + 10x_2 + 5x_3 \le 20;$ $3x_1 + 4x_2 + 4x_3 \le 12;$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$	**14.** $Z = x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \max$ $-2x_1 - 3x_2 + 3x_3 \le 3;$ $6x_1 + 3x_2 + x_3 \le 6;$ $2x_1 + 4x_2 + x_3 \le 12;$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$
15. $Z = x_1 + x_2 + 3x_3 \to \max$ $-2x_1 - x_2 + x_3 \le 1;$ $2x_1 + x_2 + x_3 \le 2;$ $4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \le 12;$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$	**16.** $Z = x_1 + 4x_2 + 2x_3 \to \max$ $-2x_1 - 4x_2 + 3x_3 \le 6;$ $6x_1 + 15x_2 + 10x_3 \le 30;$ $10x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 10;$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$
17. $Z = 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to \max$ $-2x_1 - x_2 + 2x_3 \le 1;$ $3x_1 + 6x_2 + 2x_3 \le 6;$ $6x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 24;$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$	**18.** $Z = 4x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max$ $-2x_1 - 3x_2 + 3x_3 \le 3;$ $x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 6;$ $2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 12;$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$

19. $Z = 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \to \max$ $-3x_1 - 5x_2 + x_3 \le 1;$ $4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 4;$ $12x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 12;$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$	**20.** $Z = 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 \to \max$ $-x_1 - x_2 + x_3 \le 0{,}5;$ $5x_1 + 10x_2 + 4x_3 \le 20;$ $4x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 12;$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$

Проверить полученный результат, используя встроенную надстройку Ms Excel «Поиск решения».

Контрольные вопросы

1. Сущность теории двойственности в линейном программировании.
2. По каким правил из заданной прямой задачи линейного программирования, получаю двойственную задачу?.
3. Каков геометрический и экономический смысл двойственной задачи?
4. Как, исходя из теории двойственности, получить решение прямой задачи?

Библиографический список

1. Акулич, И.Л. Математическое программирование в упражнениях и задачах [Текст] : учебное пособие - М.: Высшая школа, 1986. – 319 с.
2. Аттеков, А.В. Методы оптимизации [Текст] : учебное пособие/ Под ред. В.С. Зарубина - М.: ПрСМ, 2003. – 440 с.
3. Вентцель, Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология [Текст]: учебное пособие для студ. втузов. - М.: Высш. шк., 2001. – 208 с.
4. Ржевский, С. В. Исследование операций [Текст] : учебное пособие / С. В. Ржевский. - Санкт-Петербург : Лань, 2013. - 480 с. : ил. - (Учебники для вузов. Специальная литература).