

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Емельянов Сергей Геннадьевич
Должность: ректор
Дата подписания: 16.12.2021 20:54:34
Уникальный программный ключ:
9ba7d3e34c012eba476ffd2d064c12781953be730df2374d16f3c0ce538f0acc

МИНОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра биомедицинской инженерии

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
О.И. Поктионова
(ЮЗГУ)
« 1 » _____ 2018 г.

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ АНАЛИЗА И
КЛАССИФИКАЦИИ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Методические рекомендации по организации и выполнению
практических занятий для аспирантов направления подготовки
09.06.01 и 12.06.01

УДК 004.93:61

Составители: С.А. Филист., К.Д.А. Кассим

Рецензент

Доктор технических наук, профессор А.Ф. Рыбочкин

Интеллектуальные системы анализа и классификации квазипериодических сигналов: методические рекомендации по организации и выполнению практических занятий / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: С.А. Филист., К.Д.А. Кассим. Курск, 2018. 68 с.

Методические указания по структуре, содержанию и стилю изложения материала соответствуют требованиям, предъявляемым к учебным и методическим пособиям.

Предназначены для аспирантов направлений подготовки 09.06.01 «Информатика и вычислительная техника (Системный анализ, управление и обработка информации (технические и медицинские системы)) и 12.06.01 «Фотоника, приборостроение, оптические и биотехнические системы и технологии (Приборы, системы и изделия медицинского назначения)»

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 1.03.18. Формат 60x84 1/16.

Усл.печ.л. 3,3. Уч.-изд.л. 3,1 Тираж 100 экз. Заказ: 1450. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.

305040, г.Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №1. ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ ФОРМИРОВАНИЯ ФАЙЛОВ ДАННЫХ С ЦИФРОВЫМИ ОТСЧЕТАМИ СИГНАЛОВ

1.1 Краткие теоретические сведения

Во многих случаях непрерывные сигналы, поступающие с выхода измерительного устройства, не обрабатываются непосредственно, а сначала подвергаются дискретизации, то есть наблюдаются только в определенные моменты времени. В общем случае наблюдения производятся периодически через постоянный промежуток времени T – шаг дискретизации. Следовательно, для физической реализации процесса дискретизации необходимо осуществить свертку дискретизируемой функции $x(\tau)$ с импульсом Дирака:

$$x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - \tau)dt \quad (1.1)$$

при $\tau = 0, T, 2T, 3T \dots$

Перейдем от периода дискретизации T к частоте дискретизации $F = \frac{1}{T}$ и перепишем равенство (1.1) в дискретной форме:

$$x(\tau) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{k}{F_c}\right). \quad (1.2)$$

Учитывая формулу Пуассона, согласно которой $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{k}{F_c}\right) \Leftrightarrow F_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(v - nF_c)$, и теорему свертки, согласно которой умножение оригиналов соответствует свертка Фурье-образов, из (1.2) получим:

$$x(\tau) \Leftrightarrow F_c X(v) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(v - nF_c). \quad (1.3)$$

Из выражения (1.3) следует, что спектр дискретного сигнала $x(\tau)$ представляет собой «периодическую» функцию с периодом F_c , показанную на рисунке 1.1.

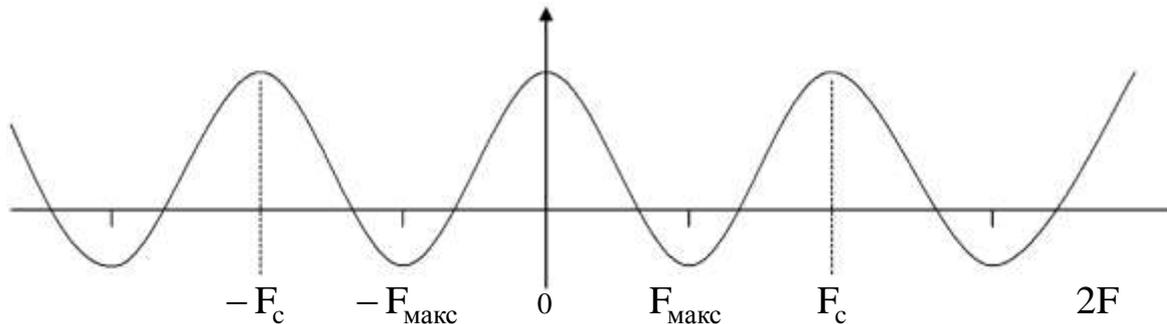


Рисунок 1.1 – Спектр дискретного сигнала

В данном случае спектр сигнала $x(t)$ расположен в интервале $(-F_{\text{макс}}, F_{\text{макс}})$ и, согласно теореме Шеннона, для того, чтобы периодическое повторение спектра, вызванное дискретизацией сигнала, не изменяло повторяемый спектр, необходимо и достаточно выполнения неравенства $F_c \geq 2F_{\text{макс}}$.

В этом случае сигнал может быть восстановлен по дискретным значениям по интерполяционной формуле

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{k}{F_c}\right) \cdot \frac{\sin \pi F_c (t - k/F_c)}{\pi F_c (t - k/F_c)}. \quad (1.4)$$

Для ответа на вопрос «Как следует на практике производить дискретизацию сигнала?» – необходимо знать, с какой целью осуществляется эта операция: в целях дальнейших вычислений или в целях восстановления сигнала.

Пусть мы дискретизируем сигнал $x(t)$, в целях дальнейших вычислений, который имеет спектр Фурье $X(\nu)$, где ν лежит в интервале $[-F; F]$. Согласно теореме Шеннона, шаг дискретизации T должен удовлетворять неравенству $T \leq \frac{1}{2} \cdot F$. Если дискретизация функции $x(t)$ произведена при выполнении этих условий, то по значениям $x_k = x(kT)$ функции $x(t)$ в точках дискретизации можно восстановить непрерывный сигнал $x(t)$ по интерполяционной формуле Шеннона (1.4).

Таким образом, вычисление любых значений функции $x(t)$ сводится к вычислению ее значений $x(kT)$ в точках дискретизации, то есть вся информация о функции $x(t)$ содержится в точках дискретизации.

Пусть мы дискретизируем сигнал с целью восстановления непрерывного сигнала.

Хотя интерполяционная формула Шеннона (1.4) теоретически обоснована, ее практическое применение, особенно при приближенных вычислениях, затруднительно.

Обозначим через $S(t)$ и $S_1(t)$ точный и восстановленный сигналы. Пусть $\varepsilon = \Delta S_M(t)/S_M(t) = (S_M(t) - S_1(t))/S_M(t)$, где $S_M(t)$ – максимальное значение $S(t)$. Доказано, что для синусоидального сигнала с частотой F , частота дискретизации F_c должна удовлетворять неравенству:

$$F_c \geq F \left(\frac{2,2}{\sqrt{\varepsilon}} \right),$$

где ε – допустимая ошибка.

Если $\varepsilon = 0,01$, то $F_c \geq 22 \cdot F$, т.е. частота дискретизации должна быть приблизительно в 10 раз больше частоты Шеннона.

Пусть спектр сигнала обрезан максимальной частотой F_c . Доказано, что в этом случае:

$$F_c \geq F_c \left(2,2 / \sqrt{\varepsilon} \right).$$

Например, если ошибка $\varepsilon \leq 0,01$, то должно быть $F_c \geq 22 \cdot F_c$.

После дискретизации из непрерывного сигнала получается дискретный сигнал. Ось времени t разбивается на равные интервалы τ . Получают, как показано на рис. 1.2, а, $N - 1$ интервала дискретизации. При этом на оси времени отмечают N точек, координатами которых являются следующие значения t : $0; \tau; 2\tau; \dots, (N - 1)\tau$. Для каждой из этих точек берется отвечающее ей значение x : производится отсчет исходной функции в данной точке.

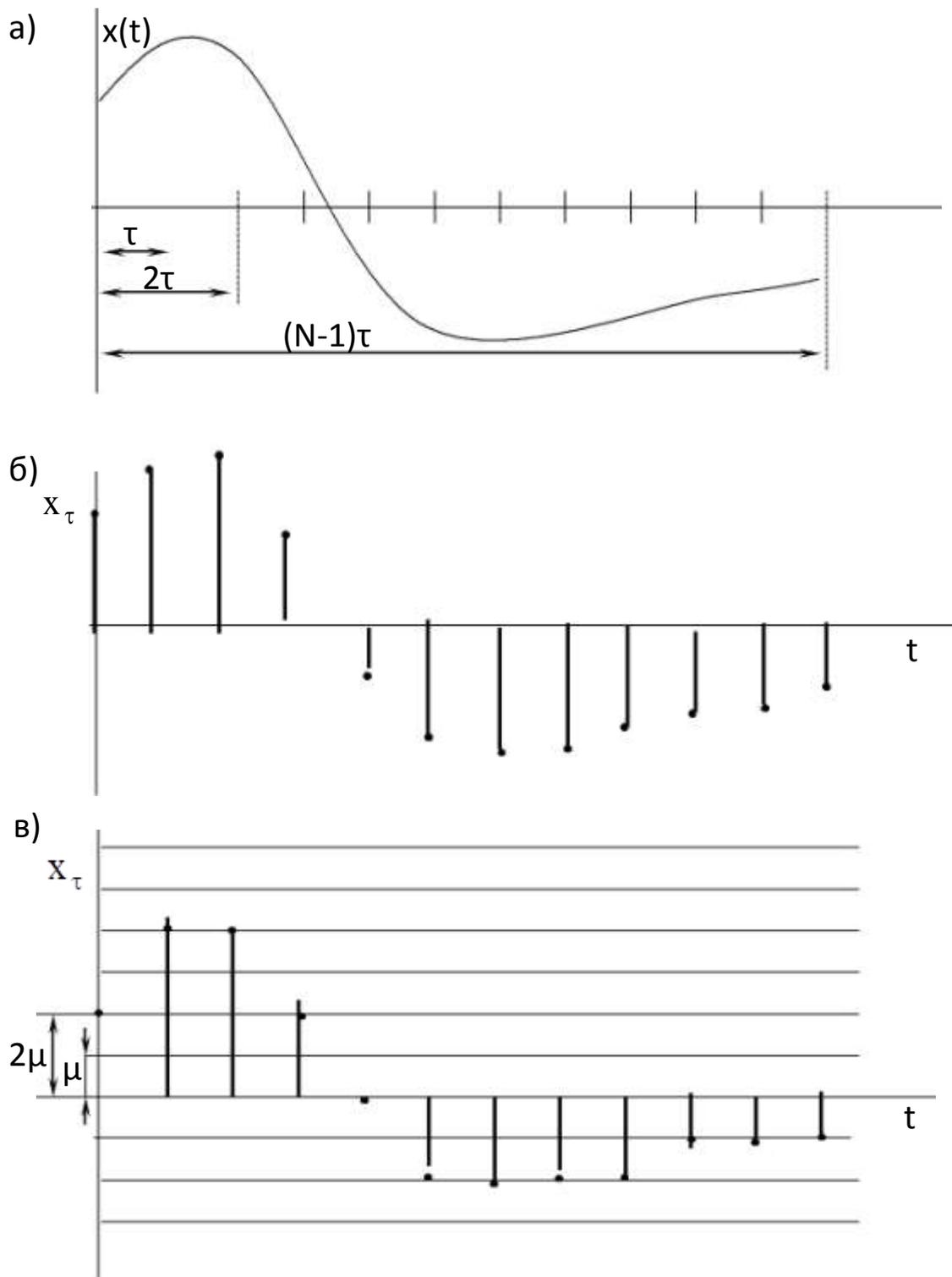


Рисунок 1.2 – а) исходный непрерывный сигнал; б) дискретизированный сигнал; в) цифровой сигнал

Принято изображать полученное дискретное значение переменной величины, опуская из каждой из указанных точек перпендикуляр на ось t . Таким образом, получается, так называемая, решетчатая функция в виде дискретных значений x , для которых примем обозначение x_τ (рисунок 1.2, б).

Для того, чтобы дискретизированные указанным образом величины могли быть подвергнуты обработке с помощью цифровых устройств, необходимо из дискретного сигнала получить цифровой сигнал. Для нахождения его производится квантование по уровню: ось x_t разбивается, как показано на рисунке 1.2, в ряд интервалов и с точностью до единицы отсчета μ определяется величина каждой из дискрет-ординат x_t . Полученные значения ординат кодируются и в таком виде вводятся в цифровое устройство.

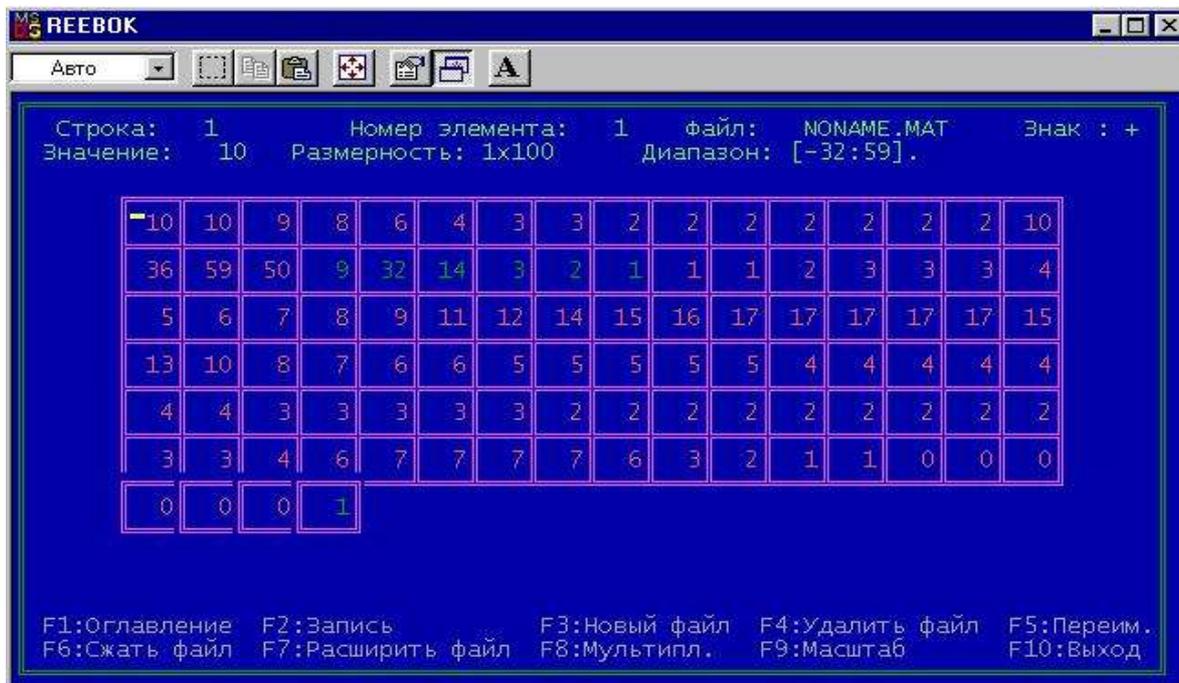
1.2. Объект исследования

Объектом исследования в данной лабораторной работе является электрокардиосигнал с различными патологиями, взятый из атласа клинических электрокардиограмм. Рекомендуется использовать электрокардиограммы из атласа [3]. Выбранный электрокардиосигнал дискретизируется и квантуется. Необходимо сначала получить ксерокопию выбранного электрокардиосигнала, а затем с помощью программы REEВОК сохранить полученные отсчеты в файле данных.

Разрешение, с которым электрокардиосигнал представлен в атласе [3], составляет 1 мм как по вертикали, так и по горизонтали. Масштабы сигналов, представленных в атласе, составляют 25 мм/с и 10 мм/мВ. Реально, на 1 мм мы можем получить не более двух отсчетов, следовательно, частота дискретизации составит не более 50 Гц. Однако это вполне достаточно для исследуемого сигнала, так как он получен с помощью электромеханического самописца, который является фильтром нижних частот и имеет большую постоянную времени.

Оцифровка электрокардиосигнала осуществляется с помощью программы REEВОК, которая имеет два окна: окно графического редактора и окно текстового редактора. Возможные виды этих окон показаны на рисунке 1.3, а и 1.3, б.

а)



б)



Рисунок 1.3 – Окна программы REEBOK: а) окно графического редактора, б) окно текстового редактора

В каждом окне имеется оконное меню, управляемое посредством функциональных клавиш. Процесс создания файла данных начинается с нажатия клавиши F3 – создать файл. Создаваемый файл имеет заголовок, после которого идут данные по умолчанию представляемые в виде матрицы целочисленных данных, которая может иметь произвольную размерность. Максимальная размерность матрицы файла 128x128 элементов.

Если векторный сигнал имеет длину более 128 (точнее более 144) отсчетов, то его целесообразно сегментировать и представить в виде матрицы, которую записать в файле с помощью программы REEВOK. Если данные необходимо обрабатывать в векторной, а не в матричной форме, то после выборки данных из файла, полученная матрица разворачивается по строкам в вектор.

Формат файла данных, получаемый с помощью этой программы, иллюстрирует Листинг 1. Как видно из него перед размещением данных в файле вначале записывается заголовок длиной в 30 байт. Таким образом, файл данных является нетипизированным и запись и считывание из него ведется с помощью процедур работы с нетипизированными файлами, ознакомиться с которыми можно в [2].

Листинг 1.

```
PFHeader = ^FHeader;
```

```
FHeader = record           { заголовок файла данных }
    DataType :string[4];   { тип данных REAL или INTG }

    Cols :longint;         { число столбцов }
    Lines :byte;           { число строк }
    Frequency :longint;    { частота дискретизации }
    Time :longint;         { время наблюдения }
    Period :longint;       { период наблюдения }
    Pause :longint;        { период паузы }

    Min,Max :integer;      { минимальный и максимальный }
                           { элементы }
end;                       { всего 30 байт }
```

В программе REEВOK из элементов заголовка, представленных в Листинге 1, указываются только число столбцов, число строк, максимальный элемент массива и минимальный элемент массива. Необходимо помнить, что хотя целочисленные переменные могут принимать значения в диапазон (–1024... +1024), динамический диапазон сигнала не должен превышать 200. Это объясняется тем, что не все режимы мониторов отображают более 200 точек по вертикали.

Данные целесообразно вводить в текстовом редакторе, а корректировать в графическом редакторе. При этом в окне текстового редактора отображаются элементы только одной строки. Переход по строкам, если их больше одной, осуществляется клавишами PageUp – PageDown. Выбор элемента строки осуществляется клавишами "→", "←", "↓", "↑". После ввода числа в ячейку необходимо подтвердить ввод клавишей "Enter". В противном случае в ячейке останутся старые данные.

Подсказки и параметры ввода расположены в верхней части окна. Меню располагается в нижней части окна. После ввода данных их необходимо записать с помощью клавиши F2. Имя файла вводится после команды создать файл (F3). Расширение файла данных .mat формируется автоматически.

1.3. Цель работы

Изучить методы получения цифровых сигналов и программное обеспечение для формирования файлов данных с цифровыми отсчетами сигналов.

1.4. Порядок выполнения работы

1. Изучите раздел «Дискретизация непрерывных сигналов» [1].
2. Из атласа [3] отсканируйте страницу с электрокардиосигналами выбранной патологии. Каждый студент получает свой индивидуальный вариант (номер страницы атласа с индивидуальным вариантом записывается в журнал преподавателя). Выберите три непрерывных сигнала из разных отведений (по консультации с преподавателем). В указанных трех сигналах обязательно должен присутствовать сигнал второго отведения. Изобразите теоретический спектр электрокардиосигнала. Определите теоретическую частоту дискретизации сигналов.
3. Изучите программу моделирования данных REEВOK и ее графический и символьный интерфейсы, обратите особое внимание на структуру файла и его заголовков.
4. Выбрав частоту дискретизации сигналов, полученных в п. 2, и задавшись остальными параметрами заголовка файла данных,

получите с помощью программы REEBOK файлы данных согласно п. 1.

5. Сосчитайте заголовок файлов данных и сами данные с помощью программы, имеющейся в базе данных или разработанной самостоятельно. Сделайте необходимые выводы.

1.5. Содержание отчета

1. Ксерокопия исследуемого сигнала.
2. Распечатки окон графического редактора с исследуемыми сигналами.
3. Предполагаемый вид спектра исследуемого сигнала и расчет теоретических значений его частоты дискретизации.
4. Распечатка листингов созданных программ.
5. Распечатка заголовков созданных файлов данных.
6. Электронная форма на компакт-диске.
7. Выводы.

1.6. Контрольные вопросы

1. Чем отличается дискретный сигнал от цифрового?
2. Дайте определение Найквистовской частоты дискретизации.
3. Как изменится спектр сигнала, если он дискретизирован с частотой, меньшей, чем Найквистовская?
4. С какой целью перед дискретизацией аналоговый сигнал подвергают низкочастотной фильтрации? Как выбирается частота среза этого фильтра?
5. Нарисуйте структурную схему дискретизатора. Как в ней реализуется соотношение (1.1)?
6. Какие искажения имеют место при переходе от цифрового сигнала к непрерывному? Как реализуется этот переход?
7. Какие искажения дискретного сигнала вызывает отличие дискретизирующего импульса от δ -импульса Дирака?
8. Нарисуйте частотную характеристику усилительного тракта электрокардиосигнала.
9. С чем связаны искажения сигнала при его квантовании? Как изменится спектр функции в результате квантования?

10. С чем связаны искажения сигнала при его дискретизации? Как изменится спектр функции в результате дискретизации?
11. Объясните, почему в кино колесо отправляющего поезда сначала медленно вращается вперед, потом останавливается, а затем начинается вращаться назад?
12. Пусть мы имеем сигнал вида $\cos(8\pi/3t - \pi/3)$. Какова самая низкая искажаемая дискретизацией частота, если шаг дискретизации равен единице?
13. Как изменится спектр функции в результате квантования? Покажите, что это преобразование нелинейное.
14. Представьте алгоритм равномерного квантования функции $f(t)$.
15. Пусть мы дискретизируем функцию $\cos(8\pi/3t - \pi/3)$ с шагом дискретизации единица. Трансформируется ли при этом частота, если да, то в какую?
16. К каким сигналам: дискретным или непрерывным может быть применено поэлементное квантование?
17. Представьте алгоритм равномерного квантования функции $f(t)$ в логарифмическом масштабе.
18. Чем определяются погрешности квантования?

19. Пусть мы имеем сигнал вида $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \cos(2\pi n x / 9 + \pi/3)$.

Какова самая низкая искажаемая дискретизацией частота, если дискретизация ведется в точках, соответствующих целым значениям x ?

20. Чем принципиально отличается спектр непрерывной и спектр дискретной функции?

21. Колесо велосипеда вращается с частотой 100 Гц. Какова кажущаяся частота вращения колеса, если стробоскоп дает вспышки с частотой 99 вспышек в 1 с?

22. Используя простые тригонометрические соотношения показать, что в точках дискретизации любая синусоида произвольной частоты f равнозначна синусоиде, лежащей в интервале $[0, 1/(2f)]$. Дискретизация ведется с найквистовской частотой в целые моменты t .

23. Приведите случаи, когда доказательство теоремы отсчетов будет некорректно.

24. Перечислите случаи, когда необходимо уменьшать шаг дискретизации по сравнению с расчетным. Почему рекомендуется это делать всегда.

25. Как изменится спектр сигнала при его дискретизации? Покажите, что это преобразование линейное.

1.7. Порядок защиты работы

Работа может быть зачтена, если студент представил отчет согласно пункту 1.5, исследуемые в работе сигналы соответствуют индивидуальному варианту, электронная форма соответствует представленному тексту, и студент дал исчерпывающие ответы на 10 произвольных вопросов из пункта 1.6.

Список литературы

1. Сергиенко, А. Б. Цифровая обработка сигналов: учебное пособие / А.Б. Сергиенко. - 2-е изд. - СПб.: Питер, 2006. - 751 с.

2. Бежанова, М. М. Практическое программирование. Приемы создания программ на языке Паскаль: учебное пособие / М.М. Бежанова, Л.А. Москвина. - М. : Научный мир, 2001. - 269 с.

3. Струтынский, А. В. Электрокардиограмма: анализ и интерпретация / А. В. Струтынский. - 7-е изд. - М. : МЕДпресс-информ, 2007. - 224 с.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №2

МОДЕЛИРОВАНИЕ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Цель работы: Получить практические навыки моделирования сигналов.

2.1 Теоретические сведения

Сигнал – это зависимость одной величины от другой (функция). Для обработки на компьютере требуется перевести сигналы в цифровую форму. Один из способов сделать это – равномерно по времени измерить значения сигнала на определенном промежутке времени и ввести полученные значения амплитуд в компьютер. Если делать измерения достаточно часто, то по полученному дискретному сигналу можно будет достаточно точно восстановить вид исходного непрерывного сигнала. Как правило, непрерывные сигналы в системах компьютерной математики являются абстракцией. В них обычно задаются дискретные сигналы, определяемые в некоторые промежутки времени – чаще всего с постоянным шагом. Для описания таких сигналов в Matlab задается вектор времени, например: $t=0:0.1:10$. Здесь задано 11 отсчетов времени от 0 до 10 с шагом 0.1. Одиночные (или одноканальные) сигналы задаются как

$$y1=\sin(t)$$

$$y2=t$$

$$y3=t.^2$$

$$y4=\exp(-t)$$

% Синусоидальный сигнал

% Линейно нарастающий сигнал

% Квадратичный сигнал

% Экспоненциально спадающий сигнал

Каждый из этих сигналов представляется вектором, размер которого равен размеру вектора времени t . В Matlab возможно и задание множественных (многоканальных) сигналов, например:

$$y_m = [y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4] \text{ или } y_m = [\sin(t) \quad t \quad t.^2 \quad \exp(-t)]$$

Такой сигнал представляется матрицей.

Для моделирования шумов используется генератор случайных чисел с тем или иным законом распределения. Наиболее важные сигналы в пакете Signal Processing Toolbox задаются специальными функциями, хотя любой сигнал можно создать средствами Matlab по подобию описанных выше примеров.

Моделирование сигналов – одна из важнейших задач пакета Signal Processing Toolbox среды Matlab. Многие сигналы являются детерминированными, т.е. их временная зависимость $y(t)$ аналитически определена и для любого момента времени t . Детерминированные сигналы удобны для аналитического описания и анализа систем обработки и преобразования сигналов и широко используются в роли тестовых сигналов. Однако большинство сигналов не являются детерминированными. Одной из причин этого является засоренность сигналов шумами и помехами, имеющими случайный характер с тем или иным законом распределения. Моделирование зашумленных сигналов в пакете Signal Processing Toolbox обеспечивается при помощи генератора случайных чисел. Другая причина заключена в самой сути сигналов как носителей информации. Разумным компромиссом между детерминированными и недетерминированными сигналами являются детерминированные сигналы с повторяющейся при каждом запуске моделирования шумовой компонентой. Это позволяет, с одной стороны, обеспечить учет влияния шума, а с другой – обеспечить повторяющиеся в процессе многократного моделирования результаты.

Далее рассмотрим некоторые примеры моделирования детерминированных и недетерминированных сигналов при помощи пакета Signal Processing Toolbox.

2.1.1 Построение зашумленного сигнала

Пусть нужно создать зашумленный сигнал, содержащий две синусоидальные компоненты – первой (основной) и третьей гармоник. Ниже приводится листинг программы для построения зашумленного сигнала.

```
t=(0:.01:2)';  
y=sin(2*pi*1*t)+0.25*sin(2*pi*3*t)  
randn('state',0);  
yn=y+0.5*randn(size(t));  
plot(t,y,t,yn)
```

Рисунок 2.1 – Листинг программы

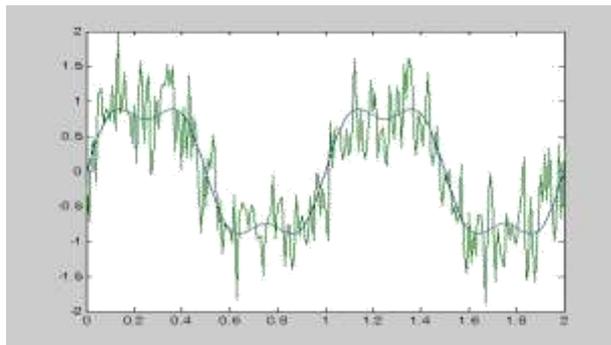


Рисунок 2.2 – Зашумленный сигнал

В первой строке программы задается вектор-столбец времени, что обеспечивает квантование сигнала по времени. Знак апострофа означает транспонирование вектора, т.е. превращение его из вектор-строки в вектор-столбец. Хотя на первых порах такое преобразование не имеет существенного значения, оно принципиально важно – многие функции Matlab требуют однозначного задания векторов либо в виде векторов-строк, либо в виде векторов-столбцов. Во второй строке программы задается вектор некоторой функции $y(t)$, которая представляет собой суммусинусоиды с амплитудой 1 и частотой 1 Гц с синусоидой, имеющей амплитуду 0.25 Гц и частоту 3 Гц. Третья строка предназначена для создания сигнала, на который наложен аддитивно шум, моделируемый с помощью генератора случайных чисел. Четвертая строка предназначена для построения вектора yn зашумленного сигнала. Результат представлен на рисунке 1. Из рисунка видно, насколько шум искажает форму сигнала.

2.1.2 Моделирование косинусоиды с переменной частотой

Для этих целей используется функция `chirp`. Она задается следующим образом:

$$y = \text{chirp}(t, f_0, t_1, f_1, ['\text{method}', \text{phi}]).$$

Функция `chirp` формирует выборку (дискретные значения) косинусоидального сигнала с частотой от f_0 в начальный момент времени t до f_1 в конечный момент времени t_1 . По умолчанию $t = 0$, $f_0 = 0$, $f_1 = 100$. Необязательный параметр `phi` (по умолчанию 0) задает начальную фазу сигнала. Другой необязательный параметр `'method'` задает закон изменения частоты. Этот параметр может принимать следующие значения:

1. `linear` - линейный закон изменения частоты
2. `quadratic` – квадратичный закон изменения частоты
3. `logarithmic` – логарифмический закон изменения частоты f

По умолчанию принято значение `method=linear`. Значения параметров по умолчанию используются, если соответствующая переменная отсутствует или задано пустое значение.

Пусть требуется задать косинусоидальный сигнал, частота которого меняется по полиномиальному закону. Ниже приводится листинг соответствующей программы.

```
t=[0 0.5 1.0 1.5 2.0] % задание вектора времени
f=[0 200 100 150 300]; % задание вектора частот
p=polyfit(t,f,4) % регрессия полиномом 4-го порядка
t=0:0.001:2; % задание вектора времени
y=chirp(t,p) % генерация сигнала и построение графиков
subplot(211); plot(t,polyval(p,t)); set(gca,'ylim',[0 500]);
subplot(212); specgram(y,128,1E3,128,120);
```

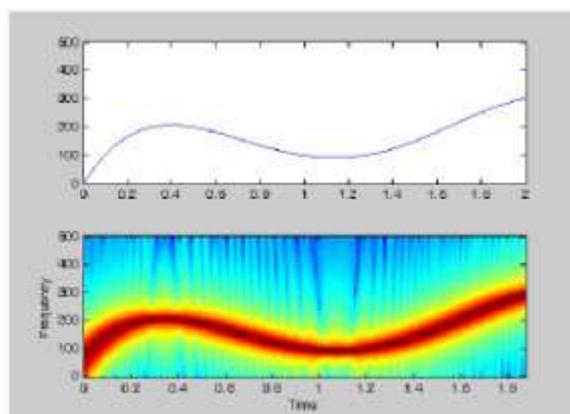


Рисунок 2.3 – Листинг программы

Функция `subplot` позволяет вывести в графическом окне сразу несколько графиков. Применение функции `subplot(m,n,p)` разбивает графическое окно на $m \times n$ подокон, при этом m – число подокон по вертикали, n – число подокон по горизонтали, p – номер текущего подокна.

В первых трех строчках модуля задано построение полинома 4-го порядка, описывающего функцию времени, которая используется для модуляции частоты косинусоидального сигнала – следующие две строки.

На рисунке справа приводятся графики моделирующей полиномиальной функции и спектрограмма сигнала (амплитудная составляющая вектора по времени), модулированного по заданному этой функцией закону. Вообще спектрограммой сигнала называют его мгновенный спектр, зависящий от времени. Из рисунка мы видим, что спектрограмма оконного преобразования Фурье идентифицирует модуляцию синусоидального сигнала, она строит модулирующую функцию. На рисунке приводятся графики моделирующей полиномиальной функции и спектрограмма сигнала (амплитудная составляющая вектора по времени), модулированного по заданному этой функцией закону.

2.1.3 Генерация импульсов

Для создания отсчетов импульсных сигналов разной формы служит функция `y=pulstran(t,d,'func',[p1,p2,...])`. Форма задается параметром `func`, который может иметь значения:

- `gauspuls` – синусоида, модулированная по закону Гаусса ;
- `rectpuls` – прямоугольный импульс;
- `tripuls` – треугольный импульс.

Вектор `y` вычисляется для отсчетов времени, заданных вектором `t`, по формуле $y = \text{func}(t-d(1)) + \text{func}(t-d(2)) + \dots$

Число импульсов в заданном интервале времени задается длиной вектора `d`, т.е. `length(d)`. Необязательные параметры `p1,p2,...` при необходимости позволяют задать дополнительные параметры обращения к `'func'`, например, типа `func(t-d(1), p1,p2,...)`. При записи функции в виде `y=pulstran(t,d,p,[fs])` можно задать частоту дискретизации `fs` (по умолчанию 1 Гц).

Листинг программы, построенной с использованием функции `pulstran`.

```

t=0:.00001:.005;
d=[0:.001:.01;0.5.^(0:10)]';
y=pulstran(t,d,@gauspuls,5000,.5);
plot(t,y)

```

Рисунок 2.4 – Листинг программы

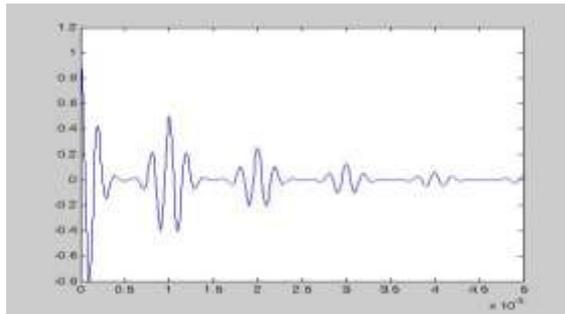


Рисунок 2.5 – График сигнала, построенного функцией pulstran.

2.1.4 Моделирование сигнала при помощи функции Дирихле

Функция Дирихле может рассматриваться как сигнал и описывается так $y=\text{diric}(x,n)$. Здесь n – целое положительное число, влияет на вид функции Дирихле.

```

x=0:0.1:20;n=10;
y=diric(x,n);
plot(x,y)

```

Рисунок 2.6 – Листинг программы

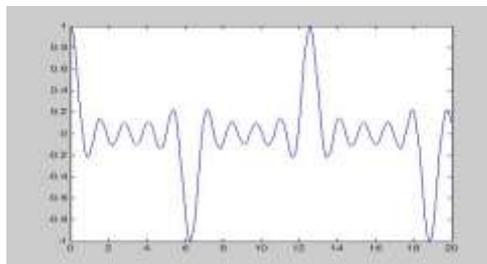


Рисунок 2.7 – Сигнал, построенный при помощи функции Дирихле

При моделировании сигналов этим методом целесообразно рассмотреть влияние параметра n на вид сигнала.

2.1.5 Моделирование трапециевидного импульса

Сформируем симметричный трапециевидный импульс с амплитудой 10 В и размерами верхнего и нижнего оснований 20 и 60 мс соответственно. Частота дискретизации равна 1 кГц. Листинг соответствующей программы приведен ниже.

```
Fs=1e3;  
t=-50e-3:1/Fs:50e-3;  
A=10;  
T1=20e-3;  
T2=60e-3;  
s=A*(T2*tripuls(t,T2)-T1*tripuls(t,T1))/(T2-T1);  
plot(t,s,'k');
```

Рисунок 2.8 – Листинг программы

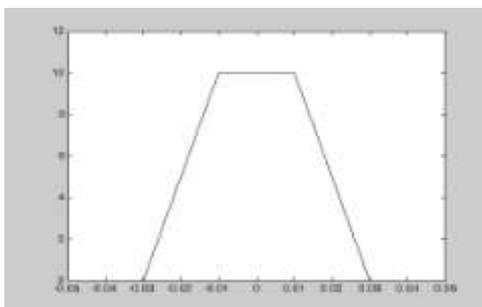


Рисунок 2.9 – Трапециевидный импульс

В результате на экран выводится одиночный трапециевидный импульс.

2.1.6 Моделирование прямоугольного импульса

Последовательность прямоугольных импульсов формируется при помощи функции `square`. Функция `square` принимает в общем виде два входных параметра – вектор значений времени `t` и параметр `duty`, с помощью которого можно регулировать скважность получаемой последовательности:

$$y=\text{square}(t,\text{duty}).$$

Параметр `duty` задает не саму скважность (скважность – это отношение периода к длительности импульса), а обратную ей величину – коэффициент заполнения (в процентах), т.е. отношение длительности импульса к периоду. Сформируем прямоугольный сигнал скважности 50% на интервале времени от 0 до 20 с.

```
t=0:0.1:20;
y=square(t,50);
plot(t,y)
ylim([-1.1 1.1]);
```

Рисунок 2.10 – Листинг программы

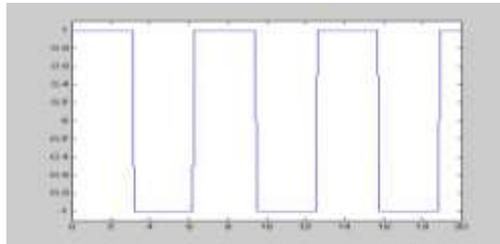


Рисунок 2.11 – Прямоугольный сигнал

2.1.7 Моделирование пилообразного сигнала

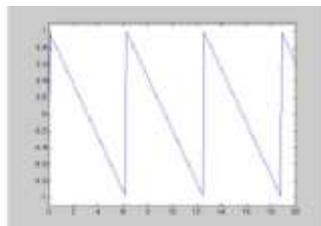
Для моделирования пилообразного сигнала применяется функция `sawtooth`, которая также имеет два входных параметра – вектор значений времени `t` и параметр `width`, при помощи которого можно регулировать длительность «обратного хода» – промежутка, на котором уровень сигнала линейно падает от 1 до -1. Значение параметра `width` должно быть в пределах от 0 до 1.

$$y=\text{sawtooth}(t,\text{width})$$

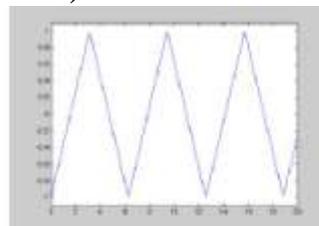
Сформируем треугольный сигнал на интервале времени от 0 до 20 с. Исследуем влияние параметра `width` на форму сигнала.

a)

```
t=0:0.1:20;
y=sawtooth(t,0);
plot(t,y)
ylim([-1.1 1.1]);
```



b)



c)

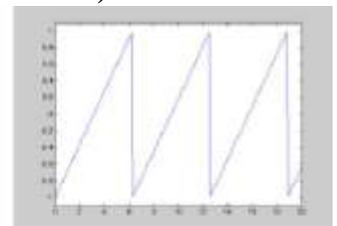


Рисунок 2.12 – Пилообразный сигнал. а) - `width=0`, б) `width=0.5`, в) `width=1`

2.2 Порядок выполнения работы

1. Используя листинги приведенных выше программ, получите при помощи пакета расширения Signal Processing Toolbox графики, показанные на рис.1-7.

2. Постройте синусоидальный, линейно нарастающий, квадратичный и экспоненциально спадающий сигналы.

2.3 Список литературы

1. Волков, В. И. Моделирование квазипериодических процессов/ Д. Ю. Козлов - Матем. моделирование, 2008. - 23–29с.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №3

АППРОКСИМАЦИЯ И ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

3.1 Теоретические сведения

Наиболее удобной в обращении на практике функцией является алгебраический многочлен. Чтобы задать многочлен, нужно задать только конечное число его коэффициентов. Значения многочлена легко вычисляются, его легко продифференцировать, проинтегрировать и т. д. Поэтому алгебраические многочлены нашли широкое применение для приближения (аппроксимации) функций. Наряду с алгебраическими многочленами применяются также тригонометрические многочлены, которые являются более естественными для приближения периодических функций.

Интерполяция функций по формуле Лагранжа

Пусть известны значения некоторой функции f в $n + 1$ различных точках x_0, x_1, \dots, x_n , которые обозначим следующим образом:

$$f_i = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n.$$

Например, эти значения получены из эксперимента или найдены с помощью достаточно сложных вычислений. Возникает задача приближенного восстановления функции f в произвольной точке x . Часто для решения этой задачи строится алгебраический многочлен $L_n(x)$ степени n , который в точках x_i принимает заданные значения, т. е.

$$L_n(x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (4.1)$$

и называется интерполяционным. Точки $x_i; i = 0, 1, \dots, n$ называются узлами интерполяции.

Приближенное восстановление функции f по формуле:

$$f(x) = L_n(x) \quad (3.2)$$

называется интерполяцией функции f с помощью алгебраического многочлена.

Существует теорема, согласно которой имеется только один интерполяционный многочлен n -й степени, удовлетворяющий условию (1).

Интерполяционный многочлен, представленный в виде:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n P_{ni}(x) f_i, \quad (3.3)$$

где

$$P_{ni}(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} \quad (3.4)$$

$x \in [ab]$

называется интерполяционным многочленом Лагранжа, а функции (3.4) – Лагранжевыми коэффициентами.

Погрешность интерполяции (экстраполяции) в текущей точке оценивается по формуле:

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |w_n(x)|, \quad (3.5)$$

$$M_{n+1} = \max_{[a,b]} |f^{(n+1)}(x)| \quad (3.6)$$

где

$$w_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n). \quad (3.7)$$

Максимальная погрешность интерполяции на всем отрезке $[a,b]$:

$$\max_{[a,b]} |f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{[a,b]} |w_n(x)|. \quad (3.8)$$

3.1.1 Линейная интерполяция

Интерполяция по формуле (3.2) при $n = 1$, т. е. с помощью линейной функции (3.3) называется линейной.

Если ввести обозначения $h = x_1 - x_0$, $q = (x - x_0)/h$, то формула линейной интерполяции может быть записана в следующем виде:

$$f(x) \approx L_1(x) = L_1(x_0 + qh) = (1 - q)f_0 + q_1f_1. \quad (3.9)$$

Величина q называется фазой интерполяции, которая изменяется в пределах от 0 до 1, когда x пробегает значение от x_0 до x_1 .

Геометрическая линейная интерполяция означает замену графика функции на отрезке $[x_0, x_1]$ хордой, соединяющей точки (x_0, f_0) , (x_1, f_1) , как показано на нижеприведенном рисунке.

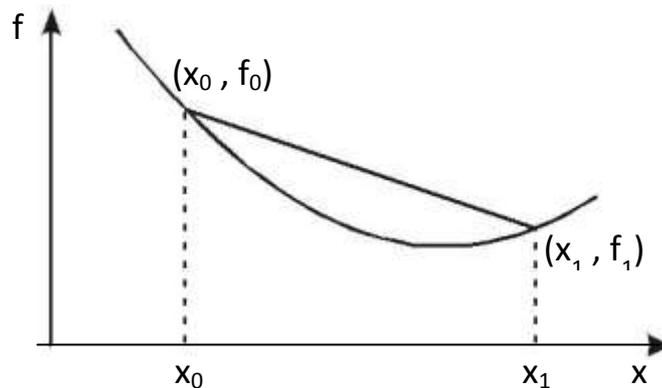


Рисунок 3.1 – Геометрическая линейная интерполяция

3.1.2 Сплайны

Пусть отрезок $[a, b]$ разбит на N равных частичных отрезков $[x_i, x_{i+1}]$, где $x_j = a + jh$, $i = 0, 1, \dots, N - 1$; $x_N = b$, $h = (b - a)/N$.

Сплайном называется функция, которая вместе с несколькими производными непрерывна на всем заданном отрезке $[a, b]$, а на каждом частичном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ в отдельности является некоторым алгебраическим многочленом.

Максимальная по всем частичным отрезкам степень многочленов называется степенью сплайна, а разность между степенью сплайна и порядком наивысшей непрерывной на $[a, b]$ производной – дефектом сплайна.

На практике наиболее широко распространение получили кубические сплайны – сплайны третьей степени, имеющие на $[a, b]$ непрерывную, по крайней мере, первую производную. Величина $m_i = S_3^1(x)$ называется наклоном сплайна в точке (узле) x_i .

$$S_3(x) = \frac{(x_{i+1} - x)^2(2(x - x_i) + h)}{h^3} \cdot f_i + \frac{(x - x_i)^2(2(x_{i+1} - x) + h)}{h^3} \cdot f_{i+1} + \frac{(x_{i+1} - x)^2(x - x_i)m_i}{h^2} + \frac{(x - x_i)^2(x - x_{i+1})^2 m_{i+1}}{h^2} \quad (3.10)$$

Нетрудно убедиться, что кубический сплайн $S_3(x)$, принимающий в узлах x_i, x_{i+1} , соответственно значения f_i, f_{i+1} , имеет на частичном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ вид.

Действительно, легко видеть, что $S_3(x_i) = f_i, S_3(x_{i+1}) = f_{i+1}$. Кроме того, простые вычисления показывают, что $S_3'(x_i) = m_i, S_3'(x_{i+1}) = m_{i+1}$. Можно доказать, что любой алгебраический многочлен третьей степени, принимающий в точках x_i, x_{i+1} значения, равные соответственно f_i, f_{i+1} соответственно равную m_i, m_{i+1} , тождественно совпадает с многочленом (10).

Итак, чтобы задать кубический сплайн $S_3(x)$ на всем отрезке $[a, b]$, нужно задать в $N + 1$ узлах x_i его значения f_i и наклоны или касательные $m_i, i = 0, 1, \dots, N$.

Кубический сплайн, принимающий в узлах x_i те же значения, что и некоторая функция f называется интерполяционным. Он служит для аппроксимации функции f на отрезке $[a, b]$ вместе с несколькими производными.

Способы задания наклонов интерполяционного кубического сплайна.

1) Упрощенный способ.

$$m_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \cdot 2h, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (3.11)$$

$$m_0 = \frac{4 \cdot f_1 - f_2 - 3 \cdot f_0}{2h}, \quad m_n = \frac{3 \cdot f_n + f_{n-2} - 4 \cdot f_{n-1}}{2h}.$$

2) Если известны значения f_i производной f' в узлах x_i , то полагаем $m_i = f_i, i = 0, 1, \dots, N$.

Способы 1 и 2 – локальные, так как с их помощью сплайн строится отдельно на каждом частичном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$.

3) Глобальный способ.

Обозначаем через $S_3''(x_i + 0)$ значение $S_3''(x_i)$ в узле x_i справа, найденное непосредственно из выражения (10), а через $S_3''(x_i - 0)$ значение $S_3''(x_i)$ в узле x_i слева, т. е. найденное из соответствующего выражения $S_3(x)$ на частичном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, которое получается из (10) заменой i на $i - 1$.

Имеем

$$S_3''(x_i + 0) = \frac{4 \cdot m_i}{h} - \frac{2 \cdot m_{i+1}}{h} + 6 \cdot \frac{f_{i+1} - f_i}{h^2},$$

$$S_3''(x_i - 0) = \frac{2 \cdot m_{i-1}}{h} - \frac{4 \cdot m_i}{h} - 6 \cdot \frac{f_i - f_{i-1}}{h^2}.$$

Требуем непрерывности $S''(x)$ в узлах:

$$S_3''(x_i - 0) = S_3''(x_i + 0), \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.12)$$

приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно наклонов:

$$m_{i-1} + 4 \cdot m_i + m_{i+1} = \frac{3 \cdot (f_{i+1} - f_{i-1})}{h}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Поскольку неизвестных $N + 1$, то необходимо задать еще два условия, которые называются краевыми (они обычно связаны с крайними значениями m_0 , и m_N). Дадим три варианта краевых условий.

а) Если известны $f'_0 = f'(a)$, $f'_N = f'(b)$, то задать $m_0 = f'_0$, $m_N = f'_N$.

б) Производные f'_0 и f'_N аппроксимируем формулами численного дифференцирования третьего порядка точности:

$$\begin{aligned} m_0 &= \frac{1}{6h} \cdot (-11 \cdot f_0 + 18 \cdot f_1 - 9 \cdot f_2 + 2 \cdot f_3); \\ m_n &= \frac{1}{6h} \cdot (11 \cdot f_N - 18 \cdot f_{N-1} - 9 \cdot f_{N-2} - 2 \cdot f_{N-3}). \end{aligned} \quad (3.13)$$

в) В некоторых случаях бывают известны значения f'' на концах отрезка $[a, b]$, т. е. величины $f''_0 = f''(a)$, $f''_N = f''(b)$. Тогда требование $S''_3(a) = f''_0$, $S''_3(b) = f''_N$ приводит к краевым условиям:

$$\begin{aligned} m_0 &= -\frac{m_1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{f_1 - f_0}{h} - \frac{h}{4} \cdot f''_0, \\ m_N &= -\frac{m_{N-1}}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{f_N - f_{N-1}}{h} + \frac{h}{4} \cdot f''_N. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Система (12) при всех рассматриваемых краевых условиях имеет единственное решение. Решая систему (3.12) при выбранных краевых условиях, находим наклоны m_i , $i = 0, 1, \dots, N$, во всех узлах. Затем по формуле (3.10) задаем сплайн на каждом частичном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, N-1$.

Построенный данным глобальным способом сплайн $S_3(x)$ имеет дефект не больше единицы, т. к. этот сплайн обладает на отрезке $[a, b]$ непрерывной второй производной.

$$\max_{[x_i, x_{i+1}]} |f^{(m)}(x) - S_3^{(m)}(x)| \leq ch^{k+1-m} \max_{[a, b]} |f^{(k+1)}(x)|,$$

Интерполяционный сплайн $S_3(x)$ с наклоном, заданным способом 2 или 3, удовлетворяет неравенству:

$$i = 0, 1, \dots, N-1; \quad m = 0, 1, \dots, k; \quad 0 \leq k \leq 3; \quad (3.15)$$

где c – независящая от h , i , f – постоянная.

Точность аппроксимации функции f сплайном $S_3(x)$ управляется выбором N , т. е. шагом $h = (b - a)/N$.

3.2 Аппроксимация функций по методу наименьших квадратов

Интерполяция на практике хороша лишь для таких функций, значения которых не искажены шумом. Случайные ошибки в значениях функции сильно искажают интерполяционное многочлены высоких степеней, а при интерполяции многочленами низких степеней теряется существенная информация. Поэтому, в этом случае, целесообразно применять «сглаживающую» аппроксимацию с минимизацией взвешенной средней квадратической ошибки аппроксимации. Это значит, что для данной функции $f(x)$ требуется построить функцию $F(x)$ вида

$$F(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_n\varphi_m(x) \quad (3.16)$$

так, чтобы минимизировать взвешенную среднюю квадратическую ошибку на интервале $[a, b]$:

$$\sigma^2 = \int_a^b \gamma(x)[F(x) - f(x)]^2 dx \quad (3.17)$$

где $\gamma(x)$ – заданная весовая неотрицательная функция.

Если функции $\varphi(x)$ действительны и попарно ортогональны с весом $\gamma(x)$ на интервале $[a, b]$, то есть если

$$\int_a^b \gamma(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = 0; \quad \text{при } i \neq j, \quad (3.18)$$

то искомые коэффициенты определяются по формуле:

$$a_i = \frac{\int_a^b \gamma(x)f(x)\varphi_i(x)dx}{\int_a^b \gamma(x)\varphi_i^2(x)dx}, \quad (i = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.19)$$

Аппроксимация ортогональными функциями, например, ортогональными многочленами или тригонометрическими полиномами имеет то замечательное преимущество, что улучшение аппроксимации путем добавления нового члена $a_{n+1}\varphi_{n+1}(x)$ не меняет ранее вычисленные коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$.

Таким образом, для аппроксимации функции $f(x)$ необходимо задать класс приближающих функций или n -мерное пространство, где n – число заданных значений функции $f(x)$, и норму в этом пространстве. При приближении функций многочленами на дискретном множестве точек норма имеет вид:

$$\sigma^2 = \sum_{k=0}^m \gamma_k [F(x_k) - f(x_k)]^2, \quad (3.20)$$

где γ_k заданные положительные веса; $m + 1$ – дискретное множество точек.

Согласно условию ортогональности (3.18):

$$\sum_{k=0}^m \gamma_k \varphi_i(x_k) \varphi_j(x_k) = 0, \quad (i \neq j). \quad (3.21)$$

и на основании (3.19) имеем:

$$a_i = \sum_{k=0}^m \gamma_k f(x_k) \varphi_i(x_k) / \sum_{k=0}^m \gamma_k \varphi_i^2(x_k), \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n, n \leq m). \quad (3.22)$$

Отметим, что можно использовать другую норму (3.20), тогда получим другое приближение, которое может значительно отличаться от предыдущего.

Приведем пример аппроксимации функций тригонометрическим многочленом:

$$F_m(x) = \alpha_0 + \sum_{p=1}^{m/2} (\alpha_p \cos px + \beta_p \sin px). \quad (3.23)$$

Коэффициенты этого многочлена при учете условия (3.20) находятся согласно формулам:

$$\alpha_0 = \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{i=0}^n f \cdot \left(\frac{2\pi i}{n+1} \right), \quad \alpha_p = \frac{2}{n-1} \cdot \sum_{i=0}^n f \cdot \left(\frac{2\pi i}{n+1} \right) \cos \frac{2\pi i}{n+1} p, \quad (3.24)$$
$$\beta_p = \frac{2}{n+1} \cdot \sum_{i=0}^n f \cdot \left(\frac{2\pi i}{n+1} \right) \sin p \frac{2\pi i}{n+1}, \quad p = 1, 2, \dots, m,$$

где

$$x_i = \frac{2\pi i}{n+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

3.3 Цель работы

Получить практические навыки децимации и интерполяции сигналов

3.4 Порядок выполнения работы

1. Запишите математическое выражение полигармонического сигнала с трендом. Нарисуйте его спектр.

2. Вычислите частоту дискретизации сигнала, полученного в пункте 1, и с помощью программы REEВОК создайте файл данных с этим сигналом. Вычислите спектр сигнала, записанного в полученном файле данных, и сравните его с теоретическим, полученным в пункте 1.

3. Составьте схему алгоритма и программный модуль для уменьшения в два раза числа отсчетов сигнала, полученного в пункте 1, не изменяя интервал наблюдения сигнала (апертуру).

4. Запустите программный модуль, полученный в пункте 3, подав на его вход сигнал, файл данных которого был получен в пункте 2. Зарисуйте сигнал на выходе программного модуля. Получите его спектр. Сравните его со спектром исходного сигнала.

5. Составьте схему алгоритма и программный модуль для увеличения в два раза числа отсчетов сигнала, полученного в пункте 1, не изменяя интервал наблюдения сигнала.

6. Запустите программный модуль, полученный в пункте 5, подав на его вход сигнал, файл данных которого был получен в пункте 2. Зарисуйте сигнал на выходе программного модуля. Получите его спектр. Сравните его со спектром исходного сигнала.

3.5 Контрольные вопросы

1. Что такое «сплайн»?
2. Перечислите способы задания наклонов интерполяционного кубического сплайна.
3. Какой график имеет геометрическая линейная интерполяция?
4. Что такое «децимация»?
5. В чем заключается отличие децимации сигнала от интерполяции?
6. Какие этапы имеет децимация цифрового сигнала с целым коэффициентом?
7. Для чего необходим первый этап децимации сигнала?
8. В чем заключается стандартный алгоритм интерполяции сигнала с целым коэффициентом?
9. Как осуществляется прореживание отсчетов сигнала?
10. К чему приводит выполнение процедуры децимации сигнала?
11. Для чего применяют «сглаживающую» аппроксимацию с минимизацией взвешенной средней квадратической ошибки аппроксимации?
12. Как осуществляется интерполяция функций по методу Лагранжа?
13. Какие сплайны на практике наиболее широко распространены?
14. Что Вы понимаете под термином «степень сплайна»?
15. Какая функция наиболее удобна в обращении на практике?

3.6 Список литературы

1. Интерполяция и аппроксимация кривых: методические указания к лабораторной работе / Курск. политехн. ин-т; сост. С.А. Филист. – Курск. – 1993. – 13 с.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №4

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ ЦИФРОВОЙ ФИЛЬТРАЦИИ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

4.1. Краткие теоретические сведения

Фильтрация представляет собой одну из самых распространенных операций обработки сигналов. Цель фильтрации состоит в подавлении помех, содержащихся в сигнале, или в выделении отдельных составляющих сигнала, соответствующего тем или иным свойствам исследуемого процесса.

В электрических и электронных измерительных устройствах уже давно находят применение различные типы RLC-фильтров. С появлением доступных и дешевых интегральных операционных усилителей получили широкое распространение активные фильтры. Прогресс в развитии цифровых интегральных схем, повсеместное применение микропроцессоров для цифровой обработки измерительной информации обусловили интерес разработчиков аппаратуры к цифровым фильтрам.

Фильтрация сигнала – это целенаправленное изменение соотношения между различными компонентами спектра сигнала. Как известно, спектр сигнала, получаемого на выходе линейной цепи, $Y(f)$, равен произведению входного спектра $X(f)$ и частотной характеристики (ЧХ) цепи $G(f)$:

$$Y(f) = X(f)G(f). \quad (4.1)$$

На практике разложение сигнала в спектр и обратно занимает довольно большое время, поэтому рассмотрим теперь соотношения, позволяющие непосредственно находить временное описание сигнала. Как известно, спектр δ -импульса равен единице. Если такой δ -импульс подать на вход линейной цепи, то тогда $X(f) = 1$ и в соответствии с формулой (4.1) получим:

$$Y(f) = G(f). \quad (4.2)$$

Таким образом, ЧХ цепи можно найти как спектр выходного сигнала цепи при подаче на ее вход δ -импульса. Реакция цепи $g(t)$ на δ -импульс носит название импульсной характеристики (ИХ). В

соответствии с (4.2) спектр этой функции равен ЧХ цепи. Отсюда следует, что импульсная и частотная характеристики линейной цепи связаны между собой парой преобразований Фурье:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)e^{j2\pi ft} df, \quad (4.3)$$

$$G(f) = \int_0^{\infty} g(t)e^{-j2\pi ft} dt. \quad (4.4)$$

В соответствии с теоремой свертки перемножение спектров соответствует свертке функций во временной области. Поэтому из равенства (4.1), определяющего спектр сигнала на выходе линейной цепи, следует, что выходной сигнал цепи может быть найден в виде свертки входного сигнала и импульсной характеристики цепи:

$$y(t) = x(t) * g(t) = \int_{-\infty}^t x(t')g(t-t')dt', \quad (4.5)$$

где * – знак свертки.

Последнее соотношение показывает, что функция $g(t)$ определяет веса, с которыми входят в выходной сигнал $y(t)$ различные мгновенные значения входного сигнала $x(t)$. Поэтому импульсную характеристику часто называют весовой функцией (ВФ).

Итак, динамические свойства линейной цепи (в том числе и цифровых фильтров) полностью определяются одной из двух характеристик: частотной характеристикой или импульсной. Одна из них может быть найдена из другой по формулам преобразования Фурье (4.3) и (4.4).

Если ИХ фильтра будет дискретной, то такие фильтры можно построить на цифровых элементах. Дискретную ИХ нерекурсивных фильтров $g(n)$ находят путем дискретного преобразования Фурье из дискретной ЧХ $G(k)$:

$$g(n) = \sum_{k=0}^{N-1} G(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}. \quad (4.6)$$

ЧХ фильтра, построенного по формуле (4.6), гарантированно будет проходить через точки заданной ЧХ $G(k)$. Однако между этими точками совпадение желаемой и реальной частотных характеристик не гарантируется.

На практике дискретный сигнал $s(n)$ фильтруют путем дискретной свертки самого сигнала и ИХ фильтра $g(n)$:

$$s_{\text{ВЫХ}}(n) = s(n) * g(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(m)g(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(n-m)g(m). \quad (4.7)$$

Эта операция занимает минимум вычислений. Однако анализ работы фильтров гораздо удобнее производить в частотной области.

Наибольшее распространение получили фильтры с четной ИХ. Они не вносят фазового сдвига в результирующий сигнал и их можно разложить в вещественный ряд косинусоид, что значительно облегчает их расчет.

4.2. Объект исследования

Для расчета дискретных цифровых фильтров используется программа `filters.exe`. Для запуска программы необходима ЭВМ IBM PC со стандартной конфигурацией. В текущем каталоге должен быть расположен драйвер видеоадаптера фирмы Borland (например, EGA, VGA.BGI).

Если на компьютере установлена операционная система WINDOWS XP, то необходимо воспользоваться командами: Программы/Командная строка/`Filter.exe`.

При запуске программы в диалоговом режиме необходимо ввести следующие входные данные:

- Частота дискретизации F_{diskr} фильтруемого сигнала. От этой величины зависит полоса частот, на которой задается АЧХ фильтра. В соответствии с теоремой Котельникова ширина этой полосы от 0 до $F_{\text{diskr}}/2$ Гц.

- Количество элементов N импульсной характеристики проектируемого фильтра. Это число должно быть нечетным и находиться в пределах от 3 до 4001 (верхняя граница зависит от количества свободной оперативной памяти). Чем выше значение N , тем выше порядок проектируемого фильтра.

- Значения АЧХ $G(f)$ проектируемого фильтра. Шаг дискретизации Δf зависит от частоты дискретизации сигнала и количества элементов N и определяется программой автоматически.

Выходные данные:

- Изображение требуемой АЧХ фильтра.
- Изображение АЧХ фильтра, который был рассчитан программой. Этот график строится по дискретному аналогу формулы (4.4). Для выявления характера кривой АЧХ вне заданных точек $G(k)$ программа расширяет время наблюдения найденной ИХ $g(n)$, путем дополнения ее нулями, что согласно свойствам дискретного спектра позволяет уменьшить частоту дискретизации графика АЧХ.
- Значения элементов ИХ проектируемого фильтра.

Пример: требуется рассчитать ФНЧ для сигнала с частотой дискретизации 200 Гц и с частотой среза 50 Гц. Следовательно, значения ЧХ фильтра $G(f)$ будут принимать значения 1 в полосе пропускания фильтра (т. е. когда $0 < f < 50$ Гц), и 0 в полосе задержания фильтра (когда $f > 50$ Гц).

Пусть число элементов ИХ фильтра $N = 15$. На запросы программы вводим:

$F_{diskr} = 200$ (это частота дискретизации нашего сигнала); $N = 15$ (число элементов ИХ фильтра);

$$G[0] = 1$$

$$G[14] = 1$$

$$G[28] = 1$$

$$G[42] = 1$$

$$G[57] = 0.5$$

$$G[71] = 0$$

$$G[85] = 0$$

$$G[100] = 0 ,$$

где 0, 14, 28, 42 и т. д. – отсчеты частот f , на которых должна задаваться АЧХ фильтра (рассчитываются программой);

значения $G[F] = 1$ характеризуют полосу пропускания фильтра, а значения $G[F] = 0$ характеризуют полосу задержания фильтра (вводятся пользователем).

В результате работы программы изображаются графики заданной и реальной АЧХ (рисунок 4.1).

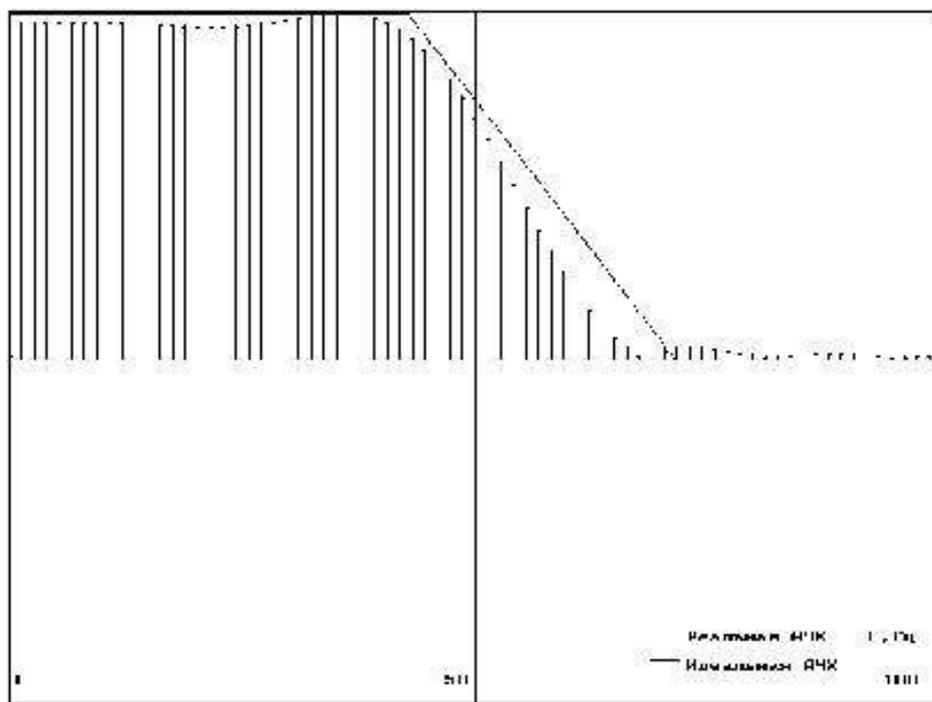


Рисунок 4.1 – Идеальная и реальная АЧХ НЧ фильтра

Далее на экран выводятся элементы ИХ фильтра, которые вычисляются программой по формуле (4.6) из заданной АЧХ $G(k)$. В нашем случае они равны $[-0.07 \ -0.19 \ 0.5 \ 0.36 \ -1.3 \ -0.47 \ 4.68 \ 8 \ 4.68 \ -0.47 \ -1.3 \ 0.36 \ 0.5 \ -0.19 \ -0.07]$.

4.3. Цель работы

Изучить методы синтеза цифровых фильтров и эффективность их применения.

4.4. Содержание работы и порядок ее выполнения

1. Получите у преподавателя задание на проектирование цифрового фильтра: АЧХ и порядок.
2. С помощью программы MODEL получите тестовый сигнал, в спектре которого присутствуют составляющие, лежащие как в полосе пропускания, так и в полосе задержания цифрового фильтра.
3. С помощью программы FILTERS.EXE получите коэффициенты цифрового фильтра.

4. Составьте схему алгоритма и программу цифровой фильтрации полученным в пункте 3 цифровым фильтром тестового сигнала, созданного в пункте 2.

5. Запустите полученную в пункте 4 программу, подав на ее вход файл данных, полученный в пункте 2. Сравните сигналы на входе и на выходе.

4.5. Содержание отчета

1. АЧХ и коэффициенты разработанного цифрового фильтра.
2. Спектральный состав и графическое изображение тестового сигнала.
3. Графическое изображение тестового сигнала после фильтрации.
4. Изображения реального сигнала до и после фильтрации.
5. Анализ спектрального состава реального сигнала, помех, присутствующих в нем, их спектра.
6. Выводы по эффективности цифровой фильтрации.

4.6. Контрольные вопросы

1. В чем состоят основные преимущества и недостатки цифровых фильтров?
2. Изобразите структурную схему цифровой обработки сигнала. Поясните этапы преобразования сигнала.
3. Какие методы математического описания и аппараты анализа дискретных сигналов и цепей Вы знаете?
4. Как выражается прямое (ДПФ) и обратное (ОДПФ) дискретные преобразования Фурье?
5. Как связаны коэффициенты ДПФ последовательности конечной длины с z -преобразованием этой последовательности?
6. Как связаны коэффициенты ДПФ последовательности конечной длины с ее непрерывным частотным спектром?
7. Как определяется линейная дискретная цепь с постоянными параметрами (ЛДЦПП)?
8. Что понимается под импульсной характеристикой $g(n)$ ЦФ?
9. Что понимается под системной функцией $H(z)$ цифрового фильтра? Как выражается системная функция через импульсную характеристику и элементы схемы фильтра?

10. Как определить устойчивость ЦФ по его системной функции?

11. Что понимается под частотной характеристикой ЦФ? Что отличает ее от частотной характеристики соответствующего аналогового фильтра-прототипа?

12. Как связана частотная характеристика с системной функцией цифрового фильтра?

13. Как определяется нерекурсивный цифровой фильтр? Запишите алгоритм обработки сигнала и изобразите соответствующую структурную схему фильтра.

14. В чем заключается недостаток нерекурсивных фильтров?

15. В чем состоит особенность рекурсивных ЦФ? Запишите алгоритм обработки сигнала и изобразите структурную схему фильтра.

16. Какой вид имеет структурная схема прямого рекурсивного ЦФ? Чем отличается от нее структура канонического фильтра?

17. Определение корреляционной функции. Определить циклическую корреляционную функцию следующих последовательностей с числом элементов

$N = 8$:

а) $\{1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\}$,

б) $\{1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\}$,

в) $\{1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\}$,

г) $\{1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\}$.

18. Определение корреляционной функции. Какова циклическая корреляционная функция последовательностей

а) $\{1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\}$, б) $\{1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\}$, в) $\{1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\}$?

Просуммировать элементы полученных корреляционных последовательностей и объяснить результат.

19. Определение корреляционной функции. Определить циклическую корреляционную функцию последовательностей

а) $\{1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\}$,

б) $\{1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\}$,

в) $\{1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\}$,

г) $\{1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\}$.

20. Определение корреляционной функции. Определить циклическую корреляционную функцию последовательностей

42

а) $\{-3\ -2\ -1\ 0\ 1\ 2\ 3\ 4\}$,

б) $\{-4 -3 -2 -1 1 2 3 4\}$.

Просуммировать элементы полученных корреляционных последовательностей и объяснить результат.

21. Корреляционные последовательности. Определить корреляционную функцию последовательностей

а) $\{1 1 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0\}$,

б) $\{0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 1 0 1 0\}$.

Вычислить произведение 1100101×1010011 и использовать полученный результат для вывода очень простого алгоритма определения корреляционной функции. Если алгоритм столь прост, то почему бы не существовать еще более оптимальному методу?

22. Получите последовательность, корреляционная функция которой имеет вид $\{1, 1.6 15 20 15 6 1, 1\}$.. Определение свертки. Выполнить свертку последовательности $\{1 1 1 1 1 0 0 0 0\}$ с последовательностями вида

а) $\{1 1 0 0 0 0 0 0\}$,

б) $\{1 1 1 0 0 0 0 0\}$,

в) $\{1 1 1 1 1 0 0 0\}$,

г) $\{1 1 1 1 1 1 1 1\}$.

23. Определение свертки. Выполнить свертку последовательности $\{1 (1/2) (1/4) (1/8) (1/16) (1/32) (1/64) (1/128)\}$ с последовательностями:

а) $\{1-10 0 0 0 0 0\}$,

б) $\{2-1 0 0 000-1\}$.

24. Свертка с нечетной функцией. Должна быть выполнена свертка последовательности данных с нечетной последовательностью, т. е. функцией, для которой $f(N - \tau) = -f(\tau)$ После определения ДПХ требуются только N произведений. Показать, что изменение знаков преобразования последовательности данных на обратные перед умножением и переходом в область обратного преобразования приводит к желаемому результату.

25. Уплотнение. Последовательность данных, состоящая из 1024 элементов, должна быть уплотнена до 256 элементов ценой потери тонкой структуры исходной последовательности. Показать, что это может быть осуществлено путем определения ДПХ для $N = 1024$ и последующего вычисления ДПХ первой четверти элементов преобразования для $N = 256$.

26. Скользящее среднее,

а) Вычислить скользящее среднее пяти последовательных элементов биномиальной последовательности {0000 1464 1000}.

б) Какова дисперсия полученной последовательности?

27. Циклическая функция $\text{sinc}(x) = \sin x / x$. Показать, что $\text{sinc}(x) + \text{sinc}(x - N) + \text{sinc}(x - 2N) + \dots + \text{sinc}(x + N) + \text{sinc}(x + 2N) + \dots + \text{sinc}(x + 3N) + \dots = N^{-1} \text{sinc}(N\pi x) / \text{sinc}(\pi x)$.

4.7. Порядок защиты работы

Работа может быть зачтена, если студент представил отчет согласно пункту 4.5, исследуемые в работе сигналы соответствуют индивидуальному варианту, электронная форма соответствует представленному тексту, и студент дал исчерпывающие ответы на 10 произвольных вопросов из пункта 4.6.

4.8. Список литературы

1. Гольденберг, Л.М. Цифровая обработка сигналов: справочник / Л.М. Гольденберг, Б.Д. Матюшкин, М.Н. Поляк. – М.: Радио и связь, 1985. – 312 с.

2. Гутников, В.С. Фильтрация измерительных сигналов. – Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1990. – 192 с.

3. Денисенко, А.Н. Цифровые сигналы и фильтры. Теория и практика применения: [монография] / А. Н. Денисенко. - М. : Мед-практика-М, 2008. - 188 с.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №5 ФУРЬЕ-АНАЛИЗ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

5.1. Краткие теоретические сведения

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) широко применяется в цифровой технике для обработки сигналов. Прямое ДПФ выполняется над последовательностью дискретных комплексных величин $\{a_k\}$ конечной длительности. В результате получается также конечной длительности дискретная последовательность комплексных величин $\{a_s\}$, представляющих спектр указанной исходной последовательности. При обратном ДПФ по второй последовательности находится первая из них. Каждая из этих последовательностей содержит одинаковое количество N дискретных отсчетов.

Преобразование Фурье можно рассматривать как линейное преобразование с ядром:

$$H(f, t) = \exp(-i2\pi ft). \quad (5.1)$$

Если спектр сигнала $a(t)$ лежит в интервале $[-F, F]$, то такой сигнал согласно теореме Шеннона-Котельникова может быть восстановлен по своим дискретным отсчетам $a(k/2F)$, согласно интерполяционной формуле:

$$a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a\left(\frac{k}{2F}\right) \cdot \operatorname{sinc}\left[2\pi F\left(t - \frac{k}{2F}\right)\right], \quad (5.2)$$

где k -номер отсчета, $1/(2F)$ – найквистовская частота дискретизации.

Преобразование Фурье сигнала (5.2) имеет вид:

$$\alpha(f) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t) \exp(-i2\pi ft) dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a\left(\frac{k}{2F}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sin c\left(2\pi F\left(t - \frac{k}{2F}\right)\right) \right] \exp(-i2\pi ft) dt = \quad (5.3) \\
&= \frac{1}{2F} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a\left(\frac{k}{2F}\right) \exp\left(-i2\pi f \frac{k}{2F}\right).
\end{aligned}$$

Рассмотрим периодический сигнал с периодом T :

$$a_{\text{пер}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(t + nT). \quad (5.4)$$

Пусть $\alpha_{\text{пер}}\left(\frac{s}{T}\right)$ – отсчеты спектра сигнала $a_{\text{пер}}(t)$, взятого на отрезке $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$.

Если T достаточно велико, а сигнал $a(t)$ достаточно быстро спадает до нуля на интервале T , так что его искажениями в сумме (5.4) за счет наложения периодов можно пренебречь, то:

$$\alpha_{\text{пер}}\left(\frac{s}{T}\right) \approx \alpha\left(\frac{s}{T}\right),$$

отсюда

$$\alpha_{\text{пер}}\left(\frac{s}{T}\right) \approx \frac{1}{2F} \cdot \sum_k a\left(\frac{k}{2F}\right) \exp\left(-i2\pi \frac{ks}{2TF}\right), \quad (5.5)$$

причем суммирование по k проводится в пределах $|k| < TF$.

Значения T и F можно всегда выбрать так, чтобы величина $2TF$ была целой. Обозначим ее N . Обозначим также

$$\alpha_s = \sqrt{\frac{2F}{T}} \cdot \alpha\left(\frac{S}{T}\right) \exp\left(-i2\pi \frac{k_0 S}{N}\right), \quad (5.6)$$

$$a_k = a\left(\frac{k - k_0}{2F}\right). \quad (5.7)$$

Здесь k_0 выбрано так, чтобы суммирование в (5.5) могло производиться по k от 0 до $N - 1$. Тогда, подставляя (5.7) в (5.5), а (5.5) в (5.6), получим

$$\alpha_S = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} a_k \exp\left(-i2\pi \frac{kS}{N}\right). \quad (5.8)$$

Это соотношение называется ДПФ.
ДПФ обратимо:

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{S=0}^{N-1} \alpha_S \exp\left(i2\pi \frac{kS}{N}\right). \quad (5.9)$$

Ядро ДПФ – матрица:

$$F_N = \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(-i2\pi \frac{kS}{N}\right) \right\}. \quad (5.10)$$

является дискретным представлением непрерывного преобразования Фурье (k – номер столбца, S – номер строки).

Коэффициенты $\{\alpha_S\}$ ДПФ последовательности $\{a_k\}$ приближенно равны отсчетам спектра сигнала $a(t)$, периодически продолженного с периодом T , взятым с шагом $1/T$. Такова связь ДПФ с непрерывным преобразованием Фурье. Из предположения ограниченной протяженности сигнала вытекает, что для его спектра справедлива теорема отсчетов и что, следовательно, он может быть восстановлен по величине $\{\alpha_S\}$ – коэффициентам ДПФ отсчетов сигнала.

Вместо представлений ДПФ в виде сумм удобнее пользоваться матричными обозначениями. В этих обозначениях одномерное ДПФ можно записать так:

$$\alpha = F_N \cdot a, \quad (5.11)$$

где a – матрица-столбец, составленная из отсчетов преобразуемой последовательности $\{a_k\}$;

α – матрица-столбец, составленная из коэффициентов ДПФ $\{\alpha_s\}$;

FN – квадратная матрица ДПФ порядка N .

Матрица ДПФ относится к классу так называемых унитарных матриц, для которых обратная матрица получается их транспонированием и заменой элементов на комплексно-сопряженные.

Общая формула для элемента матрицы, расположенного в k -м столбце и в s -й строки, выглядит так:

$$F(s, k) = \exp(-i2\pi(s-1)(k-1)/N),$$

где $1 \leq s \leq N$, $1 \leq k \leq N$.

Что соответствует формуле (5.10). Нормирование по N можно проводить после перемножения вектора a на столбец матрицы F , то есть нормирующий коэффициент может быть учтен в формуле (5.11), а не в (5.10).

5.2. Объект исследования

Объектом исследования в данной лабораторной работе являются дискретные отсчеты электрокардиосигналов, записанные в файлах, полученных в результате выполнения лабораторной работы №1.

5.3. Цель работы

Изучить методы получения дискретного спектра биомедицинских сигналов

5.4. Содержание работы и порядок ее выполнения

1. Задавшись соответствующим базисом (по умолчанию базисом Фурье) запишите матрицу спектрального преобразования для этого базиса.

2. Зарисуйте схему алгоритма и создайте программный модуль для выбранного спектрального преобразования.

3. Подайте на вход созданного в пункте 3 программного модуля сигнал, файл данных которого получен в результате выполнения лабораторной работы №1. Распечатайте сигнал на выходе программного модуля. Сравните полученный спектр с теоретической картиной спектра.

4. Получить обратное ДПФ найденного сигнала. Используя один из методов интерполяции постройте график найденной функции. Сравните полученный график с графиком исходного сигнала.

5.5. Содержание отчета

1. Распечатка графика исходного сигнала.
2. Распечатка графика ДПФ (спектральной плотности).
3. Распечатка графика обратного ДПФ.
3. Схемы алгоритмов и листинги созданных программ
4. Электронная форма на компакт-диск.
5. Выводы.

5.6. Контрольные вопросы

1. Как изменятся формулы (5.10) и (5.11), если в качестве ядра преобразования в формуле (5.1) использовать $\exp(i2\pi ft)$? Как при этом изменится спектр $a(t)$?

2. Составьте матрицу-ядро обратного ДПФ.

3. Какова связь угловой частоты с круговой? Какие преимущества дает использование круговой частоты в формулах (5.10) и (5.11)?

4. Что произойдет, если мы увеличим размерность матрицы отсчетов? Уменьшим размер?

5. Почему при разложении действительных функций времени $S(t)$ можно использовать систему комплексных базисных функций $\{\exp(i2\pi f_k t)\}$?

6. При каких условиях можно пользоваться формулой прямого ДПФ?

7. Что происходит со спектром при сжатии (растяжении) сигнала?

8. Как осуществляется дискретизация непрерывного сигнала по времени? Чем определить интервал дискретизации?

9. В каких случаях целесообразно использовать ДПФ, и для каких целей?

10. С чем связано требование ограниченности спектра сигнала, представляемого дискретным рядом Фурье? Что будет, если это требование не выполнено?

11. Что будет, если спектр сигнала оказался шире, чем предполагалось при представлении его дискретным рядом Фурье?

12. Коэффициенты разложения функций $s(t)$ и $f(t)$ по базису $\{\exp(i\omega t)\}$ равны, соответственно, $\{1, 0, 1, 2, 1\}$ и $\{4, 0, 1\}$. Определите коэффициенты разложения произведения этих функций в том же базисе.

13. Как изменится преобразование Фурье $G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-i\omega t} dt$ при умножении $s(t)$ на $\cos \omega_0 t$?

14. Чем отличается комплексный спектр Фурье от вещественного?

15. Как изменится преобразование Фурье $G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-i\omega t} dt$ при умножении $s(t)$ на $s(t - t_3)$, где t_3 – некоторая константа?

16. Произвольная функция $s(t)$ задана на интервале $(0; 3\pi/2)$. Как запишется тригонометрический базис для этой функции?

17. Как изменится преобразование Фурье $G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-i\omega t} dt$ если аргумент t заменить на $t - t_3$, где t_3 – некоторая константа?

18. Чем отличается спектр функции, полученный при ее разложении в комплексный ряд, от спектра функции, полученного при ее разложении в ряд по множеству Фурье?

19. Доказать, что энергетический спектр белого шума $s(\omega) = N_0 / 2$.

20. Известно, что множество Фурье ортогонально на любом интервале, длина которого 2π . Как разложить функцию по этому базису на этом интервале, если ее период составляет $\sqrt{2}\pi$?

21. Произвольная функция $s(t)$ задана на интервале $(-1, 1)$. Как запишется тригонометрический базис для этой функции?

22. Известно, что множество Фурье ортогонально на любом интервале, длина которого 2π . Как разложить функцию по этому базису на этом интервале, если ее период составляет $(6/2, 2)\pi$?

23. Почему для разложения действительной функции $s(t)$ можно использовать систему комплексных базисных функций $\{e^{in\omega_0 t}\}$?

24. Пусть мы раскладываем в ряд Фурье функцию вида:

$$y(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } -\tau_{и} \leq x \leq \tau_{и}; \\ 0 & \text{при } -T/2 \leq x \leq -\tau/2 \text{ и } \tau_{и} < x \leq T/2. \end{cases}$$

25. Как изменится спектр этой функции при уменьшении $\tau_{и}$?

26. Пусть мы определяем преобразование Фурье функции вида:

$$y(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } -\tau_{и} \leq x \leq \tau_{и}; \\ 0 & \text{при любых других } x. \end{cases}$$

27. Как изменится спектр этой функции при увеличении $\tau_{и}$?

5.7. Порядок защиты работы

Работа может быть зачтена, если студент представил отчет согласно пункту 5.5, исследуемые в работе сигналы соответствуют индивидуальному варианту, электронная форма соответствует представленному тексту, и студент дал исчерпывающие ответы на 10 произвольных вопросов из пункта 5.6.

5.8. Список литературы

1. Марпл., -мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения [Текст] / Пер. с англ. - М. : Мир, 1990. - 584 с.

2. Ильин, А.А. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов [Электронный ресурс] : учебное пособие / А. А. Ильин, В. С. Титов, В. В. Евсюков ; Тульский государственный университет. - Тула : ТулГУ, 2004. - 125 с.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №6

ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Цель: получение и закрепление навыков работы в среде Matlab с пакетом расширения Wavelet Toolbox. Исследование вейвлет-спектра типовых сигналов (стационарных и нестационарных).

6.1 Теоретические сведения

В основе Фурье-анализа лежит утверждение, что любую 2π -периодическую функцию можно разложить на составляющие, т.е. может быть получена суперпозицией целочисленных растяжений базисной функции e^{ix} .

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

где c_n – коэффициенты Фурье

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

Процесс разложения функции проиллюстрирован на рисунке 6.1.

Преобразование Фурье дает спектральную информацию о сигнале и описывает его поведение в частотной области.

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt$$

При переходе в частотную область полностью теряется информация о времени, что делает непригодным метод спектрального анализа при обработке нестационарных сигналов, в которых определяющее значение имеет момент времени, в который произошло то или иное событие.

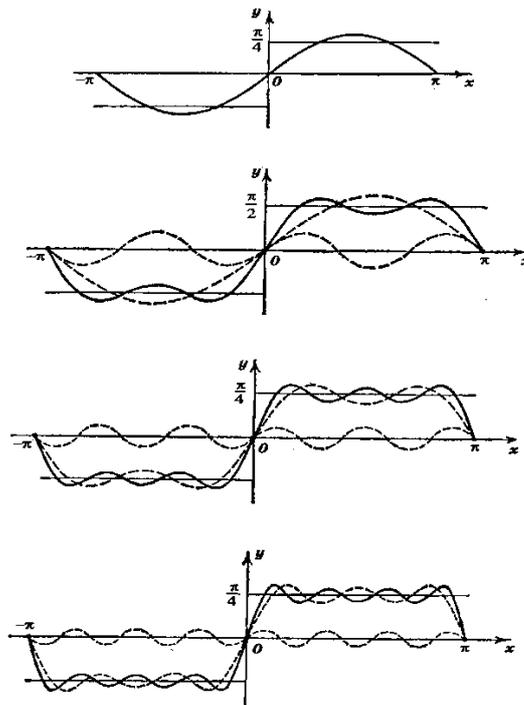


Рисунок 6.1 – Процесс разложения функции

В отличие от кратковременного преобразования Фурье, которое обеспечивает равномерную сетку в частотно-временной области, вейвлет-преобразование имеет неравномерное разрешение, что позволяет исследовать сигнал как локально, так и полностью.

Т.к. частота обратно пропорциональна периоду, то требуется более узкое окно для локализации высокочастотной составляющей сигнала и более широкое для низкочастотной составляющей. Кратковременное преобразование Фурье допустимо применять для сигнала со сравнительно узкой полосой частот. Для широкополосного сигнала хотелось бы иметь окно, способное изменять свою ширину при изменении частоты.

Введем функцию $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$, удовлетворяющую условию и назовем ее «базисным вейвлетом».

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\varphi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty.$$

Относительно каждого базисного вейвлета интегральное вейвлет-преобразование определяется как

$$(W_\varphi f)(b, a) = |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\varphi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt,$$

где $a, b \in \mathbb{R}; a \neq 0$

Обозначим

$$\varphi_{b;a}(t) = |a|^{-\frac{1}{2}} \varphi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

Интегральное преобразование примет вид:

$$(W_\varphi f)(b, a) = \langle f, \varphi_{b;a} \rangle.$$

Если центр и радиус функции-окна φ , соответственно, равны t^* и Δ_φ , то $\varphi_{b;a}(t)$ есть функция-окно с центром $b+at^*$ и радиусом $a\Delta_\varphi$. Следовательно, интегральное вейвлет-преобразование локализует аналоговый сигнал во временном окне:

$$\left[b + at^* - a\Delta_\varphi, b + at^* + a\Delta_\varphi \right].$$

Рассмотрим

$$\frac{1}{2\pi} \hat{\varphi}_{b;a}(\omega) = \frac{|a|^{-\frac{1}{2}}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \varphi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = \frac{a|a|^{-\frac{1}{2}}}{2\pi} e^{-i\omega t} \hat{\varphi}(a\omega).$$

Пусть центр и радиус функции-окна $\hat{\varphi}$ равны, соответственно, ω^* и $\Delta_{\hat{\varphi}}$.

Тогда, сместим центр окна на ω^* в 0 и обозначим:

$$\eta(\omega) = \hat{\varphi}(\omega + \omega^*).$$

Применяя равенство Парсеваля:

$$(W_\varphi f)(b, a) = \frac{a|a|^{-\frac{1}{2}}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{ib\omega} \overline{\eta\left(a\left(\omega - \frac{\omega^*}{a}\right)\right)} d\omega.$$

Очевидно, что окно:

$$\eta\left(a\left(\omega - \frac{\omega^*}{a}\right)\right) = \eta(a\omega - \omega^*) = \hat{\phi}(a\omega),$$

имеет радиус $\frac{1}{a}\Delta_{\hat{\phi}}$.

Интегральное вейвлет-преобразование также локализует сигнал по частоте с окном:

$$\left[\frac{\omega^*}{a} - \frac{1}{a}\Delta_{\hat{\phi}}, \frac{\omega^*}{a} + \frac{1}{a}\Delta_{\hat{\phi}}\right].$$

Аналогично преобразованию Габора введем частотно-временное окно для интегрального вейвлет-преобразования:

$$\left[b + at^* - a\Delta_{\varphi}, b + at^* + a\Delta_{\varphi}\right] \times \left[\frac{\omega^*}{a} - \frac{1}{a}\Delta_{\hat{\phi}}, \frac{\omega^*}{a} + \frac{1}{a}\Delta_{\hat{\phi}}\right].$$

Видно, что окно автоматически сужается при высокочастотных явлениях (малых масштабах) и расширяется при низкочастотных (больших масштабах).

6.2 Порядок выполнения работы:

1. Сгенерировать стационарные, нестационарные сигналы и сигналы с шумом;

Пример

$t=0:0.1:6*\pi;$

Стационарные сигналы

$y=\sin(t);$

$z=\sin(t)+\sin(2*t);$

Сигнал с шумом

$N=\text{rand}(1,189);$

$w=\sin(t);$

$w=w+N;$

Нестационарный сигнал

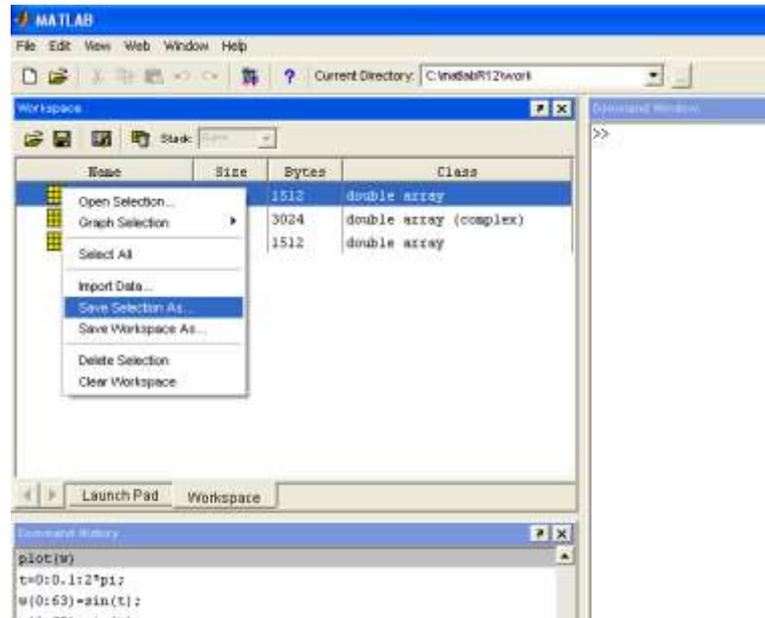
$t=0:0.1:2*\pi;$

$w(1:63)=\sin(t);$

$w(64:126)=\cos(t);$

$w(127:190)=\cos(2*t);$

Далее их нужно сохранить (каждый сигнал в отдельном файле), для этого в окне рабочей области выделяется нужная переменная и в контекстном меню выбирается пункт *Save Selection As....*



2. Проанализировать сигналы с использованием преобразования Фурье, объяснить результаты;

Для построения Фурье-спектра используется функция

$\text{Fft}(\text{имя сигнала}, \text{число точек ДПФ})$

Пример

$Y=\text{fft}(\text{Sig}, 512)$

$A=\text{abs}(Y);$

$\text{plot}(A(1:\text{length}(A)/2));$

3. Рассмотреть кратковременное преобразование Фурье для анализируемого сигнала, объяснить результаты;

Для построения спектрограммы используется функция

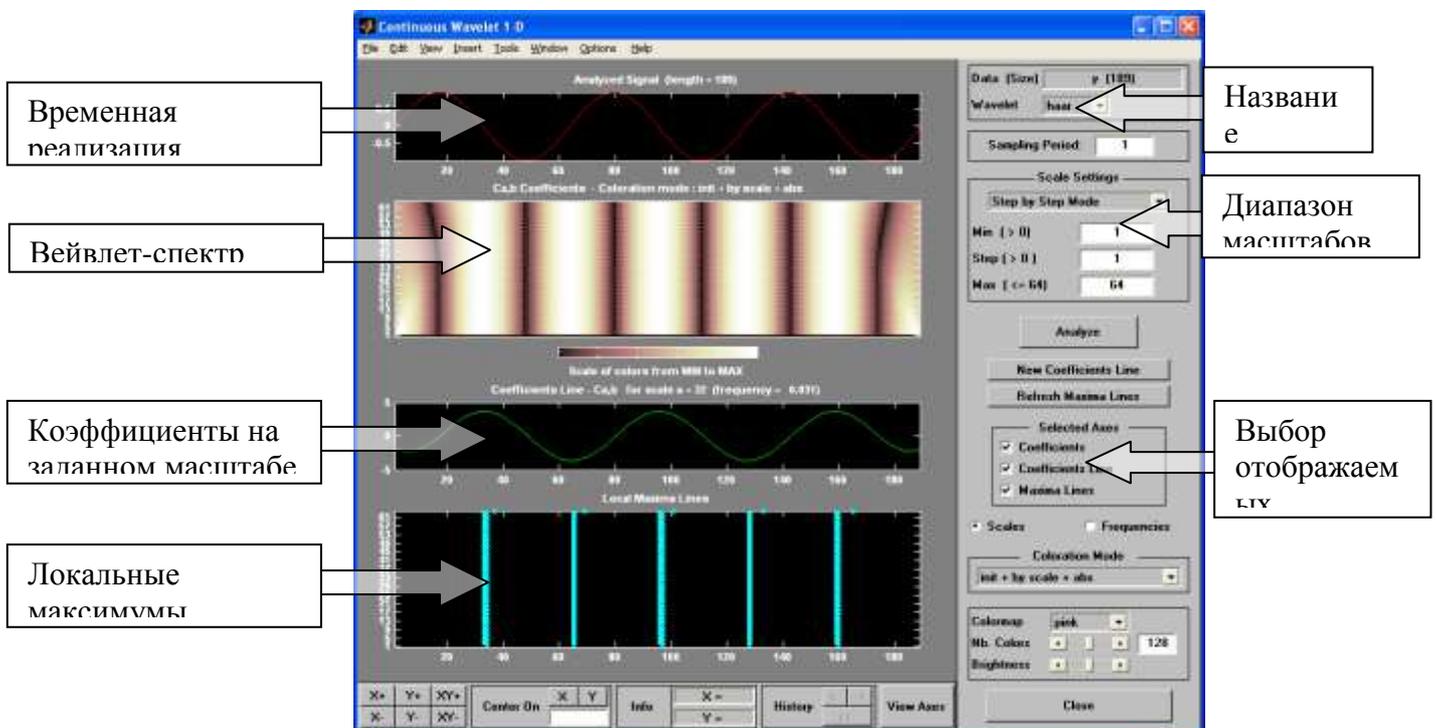
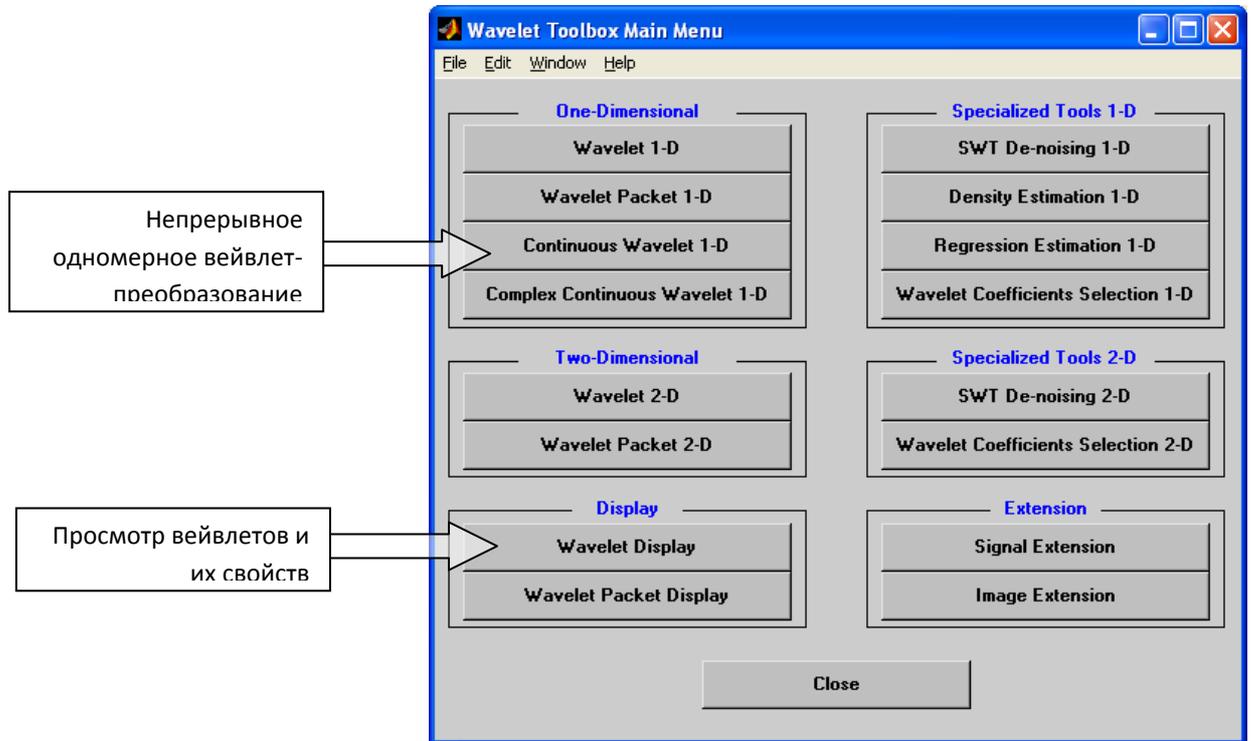
$\text{Specgram}(\text{имя сигнала})$

Пример

$\text{Specgram}(\text{Sig})$

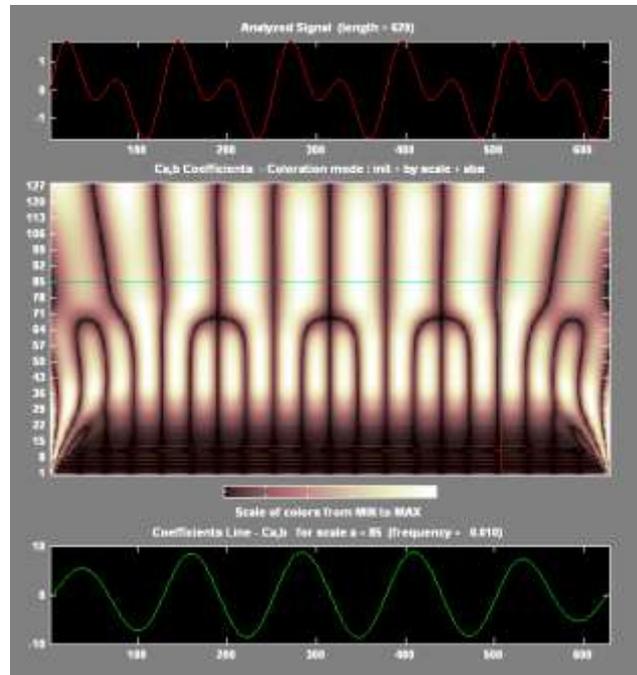
4. Проанализировать полученные сигналы с использованием различных вейвлетов (не менее 3), объяснить результаты, определить «оптимальный» (дающий наибольшую информацию) вейвлет для сигнала;

Для построения вейвлет-спектра можно использовать графический интерфейс, вызов которого осуществляется командой wavemenu.

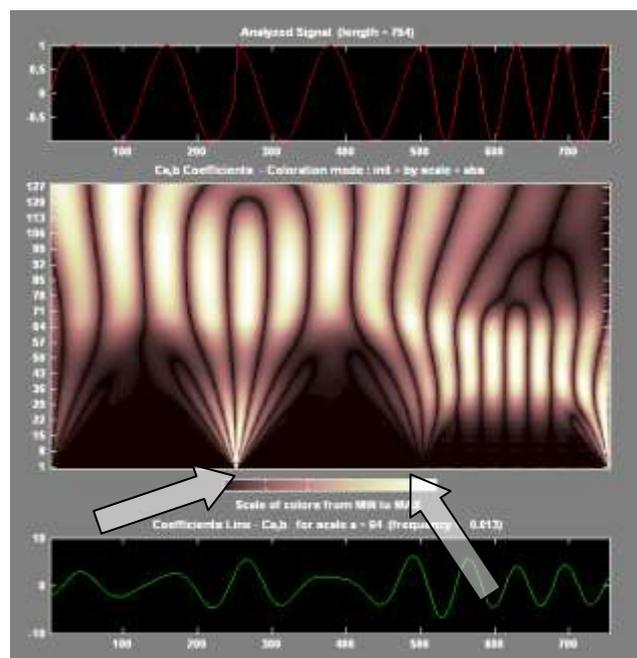


Для загрузки сигнала используется пункт меню File/Load Signal

Ниже приведен пример анализа сигнала $z = \sin(t) + \sin(2*t)$. Видно, что сигнал содержит две частоты, разделенных на масштабе ~ 70 . Вейвлет-коэффициенты меняются периодически, что доказывает периодичность сигнала.



При анализе нестационарного сигнала вейвлет-спектр показывает изменение частоты в момент времени 500, а также изменение, произошедшее в момент времени ~ 250 , причем можно сделать вывод, что частота сигнала в данном случае осталась неизменной.

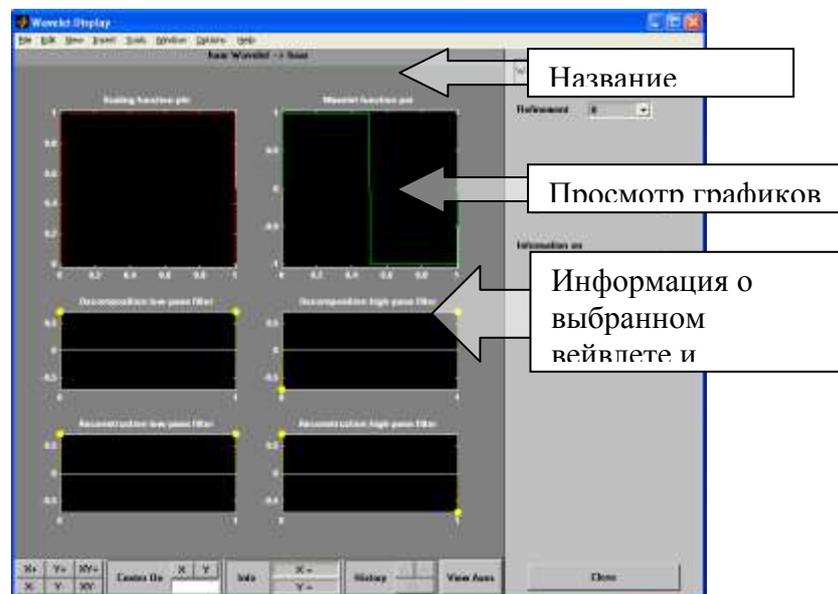


5. Сравнить и объяснить результаты Фурье- и вейвлет-анализов.

6.3 Требования к отчету

Отчет должен содержать:

1. Временную реализацию исследуемых сигналов;
Для построения графиков используется функция `plot(имя переменной)`
2. Фурье-спектры сигналов;
3. Спектрограммы сигналов;
4. Формы используемых вейвлетов;
5. Вейвлет-спектры сигналов;
6. Результаты анализа и сравнения.



6.5 Варианты заданий

Для всех вариантов

- t_1, t_2, t_3, t_4 выбираются таким образом, чтобы получаемые сигналы содержали не менее 2-х периодов,
- для генерации сигнала с шумом использовать стационарный сигнал и шум с равномерной плотностью распределения.

Вариант №1

$$Y=3\sin(t)$$

$$w(t_1..t_2)=\sin(t); w(t_2..t_3)=\sin(5t); w(t_3..t_4)=\sin(10t);$$

Вариант №2

$$Y=\sin(5t)$$

$w(t_1..t_2)=\sin(t)$; $w(t_2..t_3)=\sin(10t)$; $w(t_3..t_4)=\sin(5t)$;

Вариант №3

$Y=\sin(10t)$

$w(t_1..t_2)=\sin(t)$; $w(t_2..t_3)=\text{tg}(5t)$; $w(t_3..t_4)=\sin(10t)$;

Вариант №4

$Y=\sin(t)+\sin(5t)$

$w(t_1..t_2)=50\sin(t)$; $w(t_2..t_3)=\text{tg}(5t)$; $w(t_3..t_4)=50\sin(5t)$;

Вариант №5

$Y=\sin(t)+\sin(10t)$

$w(t_1..t_2)=\text{square}(t)$; $w(t_2..t_3)=\text{square}(10t)$; $w(t_3..t_4)=\text{square}(5t)$;

Вариант №6

$Y=\sin(10t)+\sin(2t)$

$w(t_1..t_2)=\text{sawtooth}(t)$; $w(t_2..t_3)=\text{sawtooth}(10t)$; $w(t_3..t_4)=\text{sawtooth}(5t)$;

Вариант №7

$Y=\sin(t)+\sin(10t)+\sin(15t)$

$w(t_1..t_2)=\text{sawtooth}(t,0.5)$; $w(t_2..t_3)=\text{sawtooth}(10t,0.5)$; $w(t_3..t_4)=\text{sawtooth}(5t,0.5)$;

Вариант №8

$Y=\sin(t)+\sin(15t)$

$w(t_1..t_2)=\text{sinc}(t)$; $w(t_2..t_3)=\text{sinc}(10t)$; $w(t_3..t_4)=\text{sinc}(5t)$;

Вариант №9

$Y=\sin(t)+\cos(10t)$

$w(t_1..t_2)=\sin(t)+\cos(5t)$;

$w(t_2..t_3)=\sin(t)+\cos(10t)$; $w(t_3..t_4)=\sin(t)+\cos(15t)$;

Вариант №10

$Y=\sin(t)+\cos(20t)$

$w(t_1..t_2)=\sin(15t)+\cos(5t)$;

$w(t_2..t_3)=\sin(10t)+\cos(10t)$; $w(t_3..t_4)=\sin(5t)+\cos(15t)$;

6.6 Список литературы

1. Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // Успехи физических наук, 1996, Том 166. №11. с.1145-1170
2. Дремин И.М., Иванов О.В., Нечитайло В.А. Вейвлеты и их использование // Успехи физических наук, 2001, №5. Том 171.
3. Чуи Ч. Введение в вейвлеты: Пер. с англ. – М.: Мир, 2001

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №7 ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ КОНТУРНОГО АНАЛИЗА ИЗОБРАЖЕНИЙ

Цель работы: изучить аналитические модели представления контуров плоских изображений.

7.1 Основные теоретические сведения.

Важную роль в контурном анализе играют бинарные по яркости многоточечные (распределенные) изображения.

0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	1	1	1	0	0	0

Рисунок 7.1 – Пример представления бинарного изображения на квадратной сетчатке

Обозначим через $s(x, y)$ исходное, а через $\omega(m_1, m_2)$ – оцифрованное бинарное изображение (рисунок 7.1), причем яркости $I(x, y)$ точки (x, y) и $I(m_1, m_2)$ клетки (m_1, m_2) будут равны

$$I(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{при } (x, y) \in s, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$
$$I(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{при } (x, y) \in w, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Размер клетки (пиксела) сетчатки обычно выбирается из условия возможности восстановления по оцифрованному $\omega(m_1, m_2)$ исходного изображения $s(x, y)$. Ошибки дискретизации вызваны наличием граничных пикселей, в пределах которых содержатся участки как фона, так и изображения объекта. После оцифровки каждый пиксел однозначно относится либо к фону, либо к изображению. Поэтому формы изображений $s(x, y)$ и $\omega(m_1, m_2)$ не совпадают. Величина ошибки дискретизации зависит не только от размеров $\delta x \delta y$ пиксела, но и от вида критерия принятия решения о

принадлежности каждого из пикселей фону или изображению. Критерий должен определять, какую часть клетки должно занимать изображение объекта, чтобы в ячейку ОЗУ сцен, соответствующую этому пикселу, была бы занесена единица. Для определенности примем следующее правило: если площадь изображения не менее половины площади $\delta x \delta y$ пикселя, то в соответствующую ячейку ОЗУ заносится единица.

Граничные клетки отличаются от внутренних клеток изображения наличием в качестве соседней одной или нескольких фоновых клеток. При этом в качестве соседних к рассмотрению берутся только горизонтальные и вертикальные соседние клетки, либо только диагональные. Границу бинарного изображения будем задавать точками в центрах граничных клеток (рисунок 7.2).

Если сместить сетчатку на величину половины длины стороны квадрата вправо и вверх, то граничные точки изображения окажутся в узлах сетчатки. В результате восприятие контура упрощается. В дальнейшем будем использовать оба таких представления контура оцифрованного бинарного изображения.

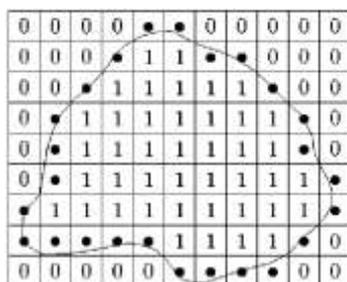


Рисунок 7.2 – Задание точками граничных клеток бинарного изображения при учете соседства только по вертикали и горизонтали

7.3 Кодирование контуров бинарных изображений

Кодирование контура – это этап получения дискретного сигнала, описывающего границы оцифрованного бинарного изображения. Всякая область D плоскости комплексного переменного содержит внутренние точки и точки контура (граничные точки). Первые из них обладают тем свойством, что не только они сами, но и их некоторая окрестность целиком принадлежит области D . Точки контура не являются внутренними, но в сколь угодно малой окрестности таких точек находятся

внутренние точки области D и точки, не принадлежащие области D , – внешние (фоновые) точки. Область D обладает свойством связности, состоящим в том, что любые ее точки соединяются линией, целиком находящейся внутри D .

Линия контура Γ называется **выпуклой**, если прямолинейный отрезок, соединяющий две ее любые точки, целиком состоит из внутренних точек области D . Участок контура будет вогнутым, если такой отрезок будет включать внешние (фоновые) точки (рисунок 7.3).

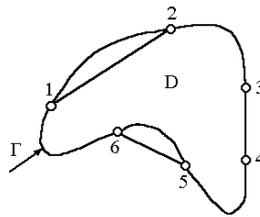


Рисунок 7.3 – Фрагменты контура Γ : 1, 2 –выпуклый; 3, 4 – неопределенный; 5, 6 - вогнут

Область D называется **ограниченной**, если все ее точки находятся на конечном расстоянии от начала отсчета. Число связных частей, на которые разбивается контур ограниченной области D , называется **порядком связности** этой области. В пределах основного контура Γ могут находиться другие изображения $s_j(x, y)$, $j=1,2,\dots$, со своими замкнутыми контурами $\Gamma_{(1)}$, $\Gamma_{(2)},\dots$. Такое изображение $s(x, y)$ является многосвязным. Если $s(x, y)$ – бинарное изображение, то находящиеся внутри него изображения образуют полости, в том числе и точечные.

Характерными фрагментами бинарного оцифрованного изображения являются лучи и разрезы толщиной в один пиксел (рисунок 7.4).

Для каждого контура задается начальная точка a_0 , отправляясь от которой обходится весь контур. Условимся такой обход производить по часовой стрелке. Точки лучей и разрезов при этом будут обходиться дважды. Фундаментальными свойствами контуров реальных изображений являются замкнутость и непрерывность их линий.

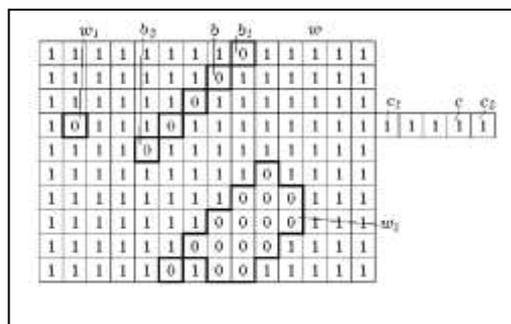


Рисунок 7.4 – Трехсвязное оцифрованное изображение ω с точечной полостью ω_1 , многоточечной полостью ω_2 , разрезом b и лучем c_1 . Точки b_1 и c_1 – основания, b_2 и c_2 – вершины

Внутренний элемент (пиксел) бинарного оцифрованного изображения $w(m_1, m_2)$ обладает свойством четырехсвязности, т.е. смежные с ним элементы – верхний, нижний, левый и правый, тоже принадлежат $w(m_1, m_2)$ (рисунок 7.5,а). Для граничных элементов изображения $w(m_1, m_2)$, образующих контур Γ , правило четырехсвязности не выполняется (рисунок 7.5,б).

	ИЗ	
ИЗ	А	ИЗ
	ИЗ	

а)

	Ф	
Ф	А	ИЗ
	ИЗ	

б)

Рисунок 7.5 – Условие четырехсвязности для элемента A оцифрованного изображения: а) A – внутренний элемент; б) A – элемент контура; Φ – элемент фона; ИЗ – элемент изображения

Для обработки контура аналитическим путем или на ЭВМ надо произвести его кодирование, т.е. поставить в соответствие каждому контурному элементу определенное число. Последовательность таких чисел называется кодом контура. Используем следующую терминологию при задании и кодировании контуров на квадратной сетчатке.

Элементарный вектор (ЭВ) $\gamma(n)$ – вектор, соединяющий центры или узлы соседних контурных ячеек сетчатки, проведенный в направлении обхода; n – номер этого ЭВ, отсчитываемый от точки

a_0 обнаружения контура, $n=0,1,\dots,k-1$, k – количество ЭВ в контуре данного изображения (рисунок 7.6). Такие ЭВ будем называть стандартными в отличие от ЭВ, длина и аргумент которых задаются произвольными числами. Стандартные ЭВ формируются естественным образом по введенному в ОЗУИ изображению. Получившийся в результате этого код в виде последовательности ЭВ, соединяющих соседние контурные клетки, называется цепным. Произвольный контур Γ , состоящий из ЭВ $\gamma(n)$, $n=0,1,\dots,k-1$, запишем в виде

$$\Gamma = \{\gamma(n)\}_{0,k-1} = \{\gamma(0), \gamma(1), \dots, \gamma(k-1)\}.$$

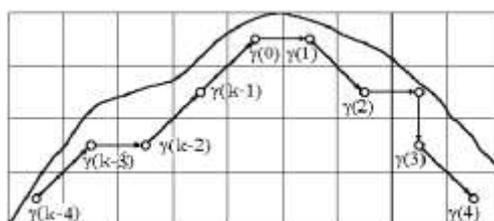


Рисунок 7.6 – Задание контура элементарными векторами

Контурные будем обозначать прописными буквами греческого алфавита $\Gamma, \Delta, \rho, \dots$, а их ЭВ - соответствующими строчными буквами $\nu(n)$, $\gamma(n)$, $\rho(n), \dots$. ЭВ являются первыми разностями функций, задающих линию контура. В том случае, когда это не приводит к неоднозначному пониманию, код контура, заданный с помощью ЭВ, перед обозначением контура будем ставить букву Δ , например, $\Delta\Gamma$.

На квадратной сетчатке возможны восемь различных стандартных ЭВ, соединяющих соседние пиксели (рисунок 7.7,а). Рассмотрим некоторые способы кодирования контуров.

1. Кодирование по трем признакам: длине текущего ЭВ, направлении поворота при переходе к следующему ЭВ и углу между соседними ЭВ.

2. Кодирование текущего ЭВ трехразрядным двоичным кодом (числа от 0 до 7) (рисунок 7.7,б). Данный код был предложен Фрименом и получил широкое распространение в задачах обработки изображений.

3. Кодирование текущего ЭВ двумя его проекциями на оси координат с началом отсчета, совмещенным с началом ЭВ – двумерный код (рисунок 7.8).

4. Полигональное представление контура получается при его аппроксимации линейными сегментами (рисунок 7.9). Кодирование состоит в фиксации координат концов этих сегментов. Данный способ благодаря компактности получаемых описаний получил широкое распространение. При этом возникает проблема сегментации, сходная с проблемой дискретизации сигналов. В реальных случаях она обычно связана с потерей информации о форме изображений.

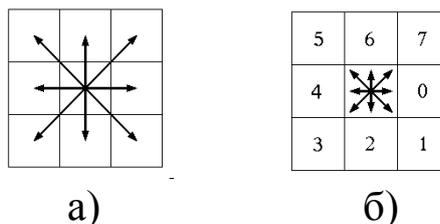


Рисунок 7.7 - К определению элементарных векторов контуров:
 а) виды возможных элементарных контуров на квадратной сетчатке,
 б) нумерация элементарных векторов по Фримену

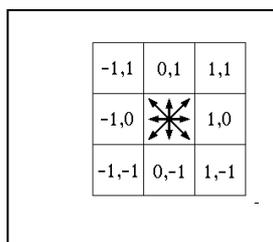


Рисунок 7.8 – Координаты элементарного вектора при двумерном кодировании

5. Задание ЭВ контура восемью комплексными числами $\{1, 1-i, -i, -1-i, -1, -1+i, i, 1+i\}$.

Комплекснозначный код контура $\Delta\partial = \{\gamma(n)\}_{0,k-1}$ введем как обобщение цепного кода Фримена $\Delta\Phi$ на плоскость дискретного комплексного переменного с квадратной сеткой. Вместо номеров, кодирующих текущие ЭВ $\gamma(n)$ контура, каждому ЭВ ставится в соответствие координата его конечной точки в системе отсчета, совмещенной с началом вектора (рис.1.10). Эти ЭВ являются стандартными. Модули их вещественной и мнимой частей равны либо единице, либо нулю.

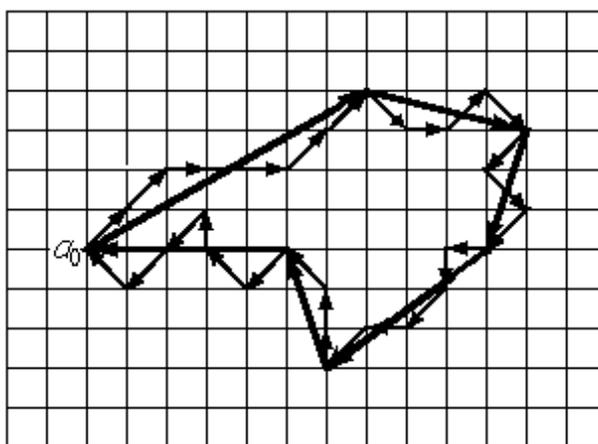


Рисунок 7.9 – Полигональное представление контура как аппроксимация контура линейными сегментами

$-1+i$	i	$1+i$
-1		1
$-1-i$	$-i$	$1-i$

Рисунок 7.10 – Координаты элементарного вектора при комплекснозначном кодировании

Формирование стандартных ЭВ характерно для начального этапа обработки. На этом этапе каждая ячейка ОЗУИ ассоциируется с пикселом квадратной сетчатки и чтобы не пропустить ни одного относящегося к контуру пиксела, элементы кода $\Delta\Gamma$ должны быть стандартными. Дальнейшая обработка может быть оторвана от сетчатки ОЗУИ, на которой возможны лишь восемь различных значений ЭВ. Более общий характер имеет полигональное представление контура в виде ориентированного k -угольника. Выражение для элемента кода $\Delta\Gamma$ в полигональном представлении имеет вид

$$\gamma(n) = \gamma_1(n) + i\gamma_2(n) = |\gamma(n)| \exp\{i\varphi(n)\},$$

где $\gamma_1(n) = \text{Re}\gamma(n)$; $\gamma_2(n) = \text{Im}\gamma(n)$; $|\gamma(n)|$ и $\varphi(n)$ – модуль и аргумент ЭВ.

б. P -представление контура основано на проведении в области изображения ряда равноотстоящих сечений параллельно координатной оси и определении координат точек пересечения с контуром. Контур задается вектором, компонентами которого

являются координаты граничных точек изображения в каждом сечении. Данное представление полезно при выводе изображения на индикатор, при определении факта пересечения изображений, вычисления некоторых геометрических характеристик.

7. Представление линии контура полярным кодом. На изображении $\omega(m_1, m_2)$ выбирается полюс – начало отсчета (т. О) естественной (собственной) системы координат, т.е. системы отсчета, связанной с этим изображением. Центры всех граничных точек изображения соединяются с т. О. В результате получается последовательность радиус-векторов $\beta(n)$, однозначно задающих контур изображения (рисунок 7.11). Часто полюс совмещается с центром тяжести изображения.

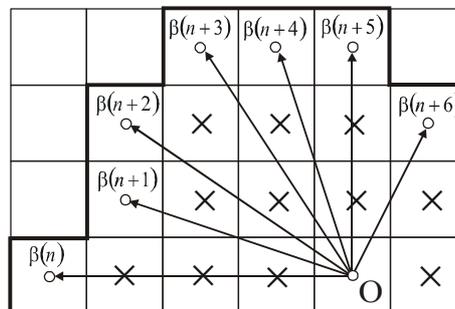


Рисунок 7.11 – Пример задания фрагмента контура полярным кодом: $V = \{ \dots; -4; -3 + i; -3 + 2i; -2 + 4i; -1 + 4i; 4i; 1 + 2i; \dots \}$

8. Представление линии контура в виде функции комплексного переменного. Контур как непрерывная замкнутая кривая в комплексной плоскости задается ее координатой $z(l)$, зависящей от текущей длины l .

Приведенные способы кодирования контуров изображений являются только незначительной частью известных и применяемых различными специалистами при обработке изображений. В связи с этим ниже с позиции теории сигналов, рассматриваемых как элементы линейных пространств, производится выбор способа кодирования контура в качестве базового для решения задач контурного анализа.

Перечислим наиболее важные свойства комплекснозначных кодов.

1. Коды Δg и v инвариантны к переносу изображений;
2. При смещении на d элементов начальной точки a_0 происходит сдвиг номера ЭВ на величину d , т.е.

$$\gamma'(n+d) = \gamma(n),$$

где $\gamma^{(d)}(n)$ - ЭВ кода, полученного в результате сдвига начальной точки.

При изменении начала отсчета элементы нового суммарного кода $\beta'(n)$ выражаются через элементы исходного $\beta(n)$ следующим образом:

$$\beta'(n) = \beta(n) + \beta_0,$$

где β_0 - комплексное число, определяющее положение начальной точки контура относительно начала новой системы координат. Так как при этом разностный код не изменился, то элементы нового суммарного кода задаются рекуррентным соотношением $\beta'(n) = \beta'(n-1) + \gamma(n)$. Суммарный код является частным случаем полярного кода при совмещении полюса с начальной точкой a_0 .

4. При многократном обходе контура элементы его кода задают периодическую последовательность с периодом k , т.е.

$$\gamma(n) = \gamma(n \pm \alpha k); \quad \beta(n) = \beta(n \pm \alpha k); \quad \alpha = 0, 1, 2, \dots$$

5. Сумма элементов кода $\Delta\Gamma$ замкнутого контура равна нулю т.е.

$$\sum_{n=0}^{k-1} \gamma(n) = 0.$$

Важнейшим достоинством принятого подхода к описанию контуров последовательностью комплексных чисел, задающих их ЭВ, является возможность преобразования этих контуров аналитическим путем. Код Фримена таким свойством не обладает, так как его элементы задают лишь аргументы стандартных ЭВ. Рассмотрим связь между цепными кодами преобразованного и исходного контуров.

При умножении контура Γ на комплексный множитель $\mu = |\mu| \exp\{i\Delta\varphi\}$ происходит растяжение этого контура в $|\mu|$ раз и поворот на угол $\Delta\varphi$:

$$\Gamma_{\mu} = \mu\Gamma = \{\mu|\exp\{i\Delta\varphi\}\gamma(n)\}_{0,k-1}.$$

Используя выражение, можно установить связь между кодами контуров со сдвинутыми на d ЭВ начальными точками, т.е. между кодами $\{\gamma^{(d)}(n)\}$ и $\{\gamma(n)\}$:

$$\Gamma^{(d)} = \{\gamma^{(d)}(n)\}_{0,k-1} = \{\gamma(n+d)\}_{0,k-1}.$$

Из последних двух выражений следует, что между кодами исходного Γ и преобразованного путем поворота, растяжения и сдвига начальной точки $\Gamma_{\mu}^{(d)}$ контуров существует связь вида

$$\Gamma_{\mu}^{(d)} = \{\mu|\exp\{i\Delta\varphi\}\gamma(n+d)\}_{0,k-1}.$$

7.4 Задание

- 1) Аналитически задать исходный контур в комплекснозначном разностном коде.
- 2) Создать бинарное изображение исходного контура.
- 3) Написать программу преобразования одного вида контура в другой (разностный комплекснозначный, суммарный комплекснозначный, полярный комплекснозначный код и код Фримена).
- 4) Написать программу, выполняющую линейные преобразования контуров изображений.
- 5) Написать программу синтеза элементарных контуров размерности k .

7.5 Контрольные вопросы

1. Что такое контур изображения? Модели кодирования контуров изображений.
2. Что из себя представляет комплекснозначный код?
3. Проверьте замкнутость контура $\Gamma = \{3+2i; 1-i; 1+i; 3-2i; -4\}$.
4. Контур задан кодом Фримена $\Gamma = \{0; 0; 1; 1; 2; 2; 3; 3; 4; 4; 5; 5; 6; 6; 7; 7\}$. Построить изображение этого контура и определить его комплекснозначный код.

5. В чем заключается процедура масштабирования контура? Найти комплекснозначный код полигонального контура $\Gamma = \{8, 3+3i; -3-3i; -8; -6-2i; -6+2i\}$ после растяжения его элементарных векторов в 2 раза.