

УДК 681.5

Составитель Е. О. Брежнева

Рецензент

Доктор технических наук, профессор кафедры вычислительной техники *И.Е. Чернецкая*

Физические основы конструирования бортовых электронных средств: методические указания к лабораторным занятиям по дисциплине «Физические основы конструирования бортовых электронных средств»/ Юго-Зап. гос. ун-т; сост. Е.О. Брежнева. Курск, 2020. - 55 с.: Ил. 19. Табл. 14.

Излагаются краткие теоретические сведения о способах охлаждения, об основах расчета вибрационных характеристик печатных плат и тепловых режимов. Приведены контрольные вопросы и задания.

Методические указания соответствуют требованиям программы, утвержденной учебно-методическим объединением по специальностям автоматике и электроники (УМО АЭ).

Предназначены для бакалавров направления подготовки 11.03.03 «Конструирование и технология электронных средств».

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 19.10.20. Формат 60×84 1/16.

Усл. печ. л. 3,19. Уч.- изд. л. 2,89. Тираж 30 экз. Заказ 321. Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94

СОДЕРЖАНИЕ

1. Лабораторная работа №1. Моделирование и методы виброзащиты конструкций бортовых ЭС.....	4
2. Лабораторная работа №2. Исследование тепловых режимов.....	38
3. Лабораторная работа №3. Исследование методов охлаждения...	50

1. Лабораторная работа №1. Моделирование и методы виброзащиты конструкций бортовых ЭС

1. Цель работы

Изучить способы виброзащиты печатных узлов ЭС в условиях воздействия вибраций.

2. Теоретическая часть

2.1. Основные понятия и определения

В процессе эксплуатации ЭС подвергаются механическим воздействиям: линейные ускорения, вибрации, удары. Вибрации наиболее опасны, если они приводят к возникновению резонансных колебаний.

Широко распространены в конструкциях ЭС ячейки с печатным монтажом (часто называют печатными узлами), которые можно представить упрощенно в виде модели — пластины.

Виброперегрузки электрорадиоэлементов (ЭРЭ), установленных в ячейках, увеличиваются при резонансе в десятки раз, что вызывает значительное возрастание интенсивности отказов как за счет искажения параметров сигналов, так и за счет механических разрушений элементов конструкций.

Поэтому устранение резонансных колебаний плат и других элементов конструкций ЭС или снижение амплитуды резонансных колебаний до допустимого уровня составляют одну из важнейших задач разработчиков ЭС. Особенно, если ЭС применяется в условиях интенсивного воздействия вибраций.

Под *вибрацией* понимают механические колебания ее элементов или конструкции в целом.

Механические колебания - это механическое движение тела или системы тел, которое обладает повторяемостью во времени и происходит в окрестности положения равновесия. *Положением равновесия* называется такое состояние системы, в котором она может оставаться сколь угодно долго, не испытывая внешних воздействий.

Вибрацию характеризуют виброперемещением, виброскоростью и виброускорением. Вибрация может быть периодической или случайной. Периодическая вибрация подразделяется на гармоническую и полигармоническую, а случайная – на стационарную, нестационарную, узкополосную и широкополосную. Гармоническая вибрация (рис.2.1) в реальных условиях встречается редко (обычно в лабораторных

испытаниях конструкций), но широко применяется при теоретическом анализе вибраций.

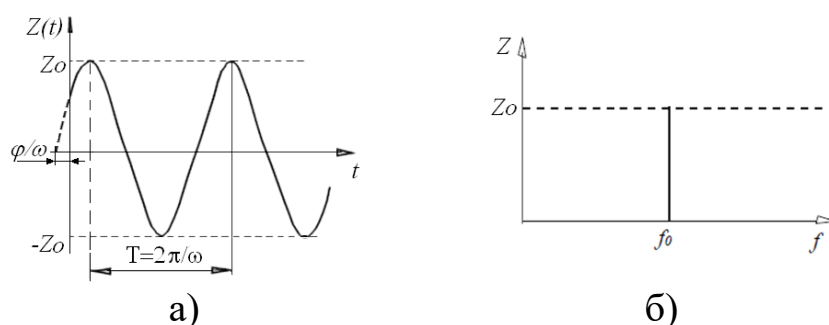


Рис.2.1. Гармоническая вибрация: а – форма; б – частотный спектр

Виброперемещение при гармонической вибрации определяется как

$$Z(t) = Z_0 \sin(\omega t + \varphi), \quad (2.1)$$

где Z_0 – амплитуда виброперемещения; ω – круговая частота вибраций; φ – начальная фаза колебаний.

Выражения для виброскорости и виброускорения находят путем дифференцирования выражения (2.1):

$$v(t) = dz/dt = \omega Z_0 \cos \omega t; \quad (2.2)$$

$$a(t) = d^2z/dt^2 = -\omega^2 Z_0 \sin \omega t. \quad (2.3)$$

Гармоническая вибрация часто характеризуется коэффициентом виброперегрузки:

$$n_b = \frac{Z_0 \omega^2}{g} = \frac{4\pi^2 f^2}{g}, \quad (2.4)$$

где f – частота, Гц.

Полигармоническими называют вибрации, которые могут быть представлены в виде суммы двух или более гармонических колебаний с частотами (периодами), находящимися между собой в рациональном соотношении (рис. 2.2).

Полигармоническую вибрацию могут создавать электродвигатели, вентиляторы и другие электромеханические устройства, имеющие несбалансированные быстровращающиеся массы.

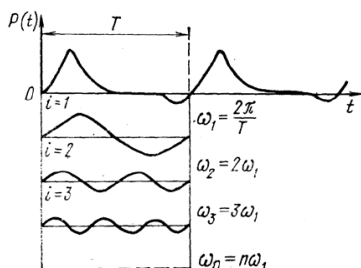


Рис.2.2. Разложение полигармонической вибрации $P(t)$ на гармонические составляющие

Аналитически разложение формы кривой $P(t)$ может быть представлено рядом Фурье

$$P(t) = a_0/2 + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t), \quad (2.5)$$

где $\omega_i = i\omega$, $\omega = 2\pi/T$ - основная частота, соответствующая периоду изменения возмущающей силы. Коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ называются *коэффициентами Фурье*. Коэффициент $a_0/2$ характеризует среднее значение колеблющейся величины; коэффициенты a_1 и b_1 - компоненту движения с основной частотой ω_1 . Эта компонента называется *первой* или *основной гармоникой* колебательного движения. Компоненты движения с частотой $i\omega_1$, где $i > 1$, называются *высшими гармониками*, число i - номером гармоники.

Коэффициенты разложения a_i и b_i определяются по известным формулам

$$a_i = \frac{2}{T} \int_0^T P(t) \cos i\omega t dt; \quad b_i = \frac{2}{T} \int_0^T P(t) \sin i\omega t dt \quad (2.6)$$

и представляют собой амплитуды косинусных и синусных составляющих каждой из этих гармоник. Определение спектра частот и коэффициентов Фурье по заданным периодическим функциям называется *спектральным анализом*.

Совокупность частот $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, расположенных в порядке их возрастания, называется *частотным спектром*, а совокупность амплитуд Z_1, Z_2, \dots, Z_n - амплитудным спектром данного периодического возмущения (рис. 2.3).

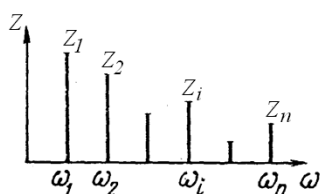


Рис.2.3. Амплитудный спектр периодического процесса

Совокупность начальных фаз, характеризующих гармонические колебания и расположенных в порядке возрастания частот, называется *фазовым спектром*.

Каждой частоте соответствуют амплитуда Z_i и начальная фаза φ_i :

$$Z_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi_i = \frac{b_i}{a_i}. \quad (2.7)$$

Для случайной вибрации ее параметры (амплитуда виброперемещения, частота и др.) изменяются во времени случайно. Она может быть стационарной и нестационарной. У стационарной вибрации математическое ожидание виброперемещения равно нулю, математическое ожидание виброскорости и виброускорения постоянны, корреляционная функция не зависит от начала отсчета. У нестационарной вибрации постоянства статических характеристик не наблюдается. К такому виду можно отнести вибрацию, возникающую при движении транспортных средств, при работе реактивных двигателей.

2.2. Моделирование элементов конструкции ЭС

Для получения количественных оценок процессов реакции на механические воздействия ЭС представляют в виде физико-математической модели, которая должна достаточно полно учитывать характер внешних воздействий и динамические свойства реального объекта. При этом учитывается распределение инерционных и упругих характеристик системы (масса, жесткость), число степеней свободы, зависимость восстанавливающих сил от деформаций, характер диссипативных сил (сил сопротивления).

На рис.2.4 показана простейшая модель в виде колебательной системы, применяемая в механике для описания реакции конструктивных элементов на механические воздействия.

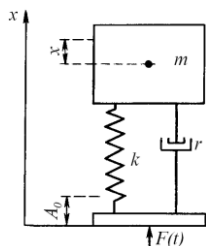


Рис.2.4. Механическая модель конструктива ЭС: m - масса конструктива; k - элемент жесткости; r - элемент механического сопротивления; $F(t)$ - силы, действующие на конструктив

В этой модели масса конструктива представлена инерционным элементом массой m , жесткость - пружиной, характеризуемой коэффициентом жесткости k , механическое сопротивление - демпфером с коэффициентом демпфирования r , причем эти элементы закреплены непосредственно на основании. Таким образом, тело массой m может перемещаться в направлении оси x так, что его положение полностью определяется только координатой x (одна степень свободы).

Данная модель является моделью системы с *сосредоточенными параметрами*. Для этой модели делаются допущения, что вся масса конструктива сосредоточена в элементе массы модели, жесткость всего конструктива описывается элементом жесткости, а характеристика трения – элементом механического сопротивления.

При необходимости построения моделей конструктивных элементов типа стержней или пластин можно использовать простейшую механическую модель, повторяя ее многократно (рис.2.5). Когда число таких дискретных моделей в пределах объема конструктивного элемента стремится к бесконечности, предельная механическая модель будет наилучшим способом описывать реальную конструкцию. Такая предельная механическая модель называется системой с *распределенными параметрами*, т.е. параметрами, распределенными по поверхности или объему конструктива. Свойства моделей с распределенными параметрами определяются суммарным действием всех дискретных элементов и уровнем их дискретизации.



Рис.2.5. Модели конструктивных элементов типа стержней (а) или пластин (б)

Важнейшей характеристикой механической системы при описании ее поведения при механических воздействиях является *число степеней свободы*, т.е. *минимальное число независимых координат, необходимых для полного определения положения всех точек системы в любой момент времени*. Для реальных механических систем это число всегда бесконечно велико, но в ряде случаев практически достаточен учет конечного числа существенных степеней свободы. Чаще всего оно равно числу возможных независимых перемещений.

Например, если объект имеет возможность поступательно перемещаться в трехмерном пространстве в любом направлении, то он имеет три степени свободы. Объект, который перемещается поступательно в плоскости, обладает двумя степенями свободы.

С математической точки зрения колебания систем с конечным числом степеней свободы описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями, а колебания распределенных систем – дифференциальными уравнениями в частных производных.

Со степенями свободы, реализуемыми в конструкции ЭС, связан вид возможной деформации конструктивного элемента, который необходимо учитывать при выборе механической модели, так как в зависимости от вида деформации определяются количественные значения соответствующих характеристик, описывающих элементы механической модели.

Важное значение в механических моделях имеют *граничные условия*, определяющие закрепление конструктивных элементов. В механике обычно используют две модели закрепления: абсолютно жесткую заделку и шарнирное опирание. Реальные закрепления, применяемые в конструкции ЭС, могут существенно отличаться от этих двух предельных случаев.

Выбор расчетной модели конструкции – сложная задача, причем сложность определяется не числом элементов, а тем, в какой мере она может быть интерпретирована как система с конечным или бесконечным числом степеней свободы. Основные рекомендации основаны на том, что модель должна представлять собой совокупность твердых тел, соединенных упругими и демпфирующими связями. Если собственная частота колебаний какого-либо узла существенно превышает частоту механических воздействий, то его можно считать жестким телом, а при несоблюдении этого условия – нежесткой механической связью.

Построение расчетной модели удобно связывать с естественным разделением ЭС на конструктивно законченные узлы, что облегчает общий анализ качества и надежности ЭС. При этом жесткая часть рассматриваемого узла образует основание вибрационной системы, а нежесткая – упругую и демпфирующую связи модели. Объектом будет уже следующий узел, если его можно считать твердым телом. Таким образом, при последовательном разделении ЭС получается цепочка колебательных систем, составляющих для данного геометрического направления расчетную модель. Предполагается, что между модулем второго (третьего) структурного уровня и тем объектом, на котором он устанавливается, существует нежесткая механическая связь в виде

виброизолирующего устройства (ВУ); аналогично – между корпусом и платой (пакетом плат); между опорным контуром платы и ЭРЭ, размещенными на ней (нежесткая механическая связь с распределенными параметрами). Если существуют указанные нежесткие механические связи, то моделируемое ЭС можно представить в виде совокупности систем: ВУ – жесткая часть конструкции ЭС; жесткая часть конструкции ЭС – плата; плата – ЭРЭ. Подобное разделение конструкции на элементарные колебательные системы ориентировочное: в зависимости от принятого конструктивного решения некоторые узлы могут не выделяться в качестве составной части и, наоборот, могут появиться новые.

2.3. Модель механической системы с одной степенью свободы при кинематическом возбуждении

При кинематическом возбуждении механической системы предполагается, что внешнее вибрационное воздействие $F = F_0 \sin \Omega t$ прикладывается к основанию (платформе), на котором закреплена данная система. Это основание перемещается по гармоническому закону $z_0(t) = Z_A \sin \Omega t$, где Z_A - амплитуда виброперемещения основания (рис.2.6).

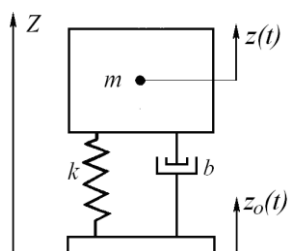


Рис.2.6. Модель кинематического возбуждения механической системы с демпфированием

Движение системы подчиняется уравнению

$$m\ddot{z} + b(\dot{z} - \dot{z}_0) + k(z - z_0) = 0, \quad (2.8)$$

где разность перемещения массы и основания $(z - z_0)$ характеризует упругую деформацию системы.

Для решения этого уравнения воспользуемся *методом комплексных амплитуд*, который дает некоторые преимущества при исследовании стационарных вынужденных колебаний линейных систем, в особенности сложных систем.

Перемещение основания при кинематическом воздействии представим в виде комплексного числа

$$z_0 = Z_A e^{i\Omega t}. \quad (2.9)$$

Для решения этого уравнения воспользуемся методом комплексных амплитуд, который дает некоторые преимущества при исследовании стационарных вынужденных колебаний линейных систем, в особенности сложных систем. Стационарную часть решения будем искать в виде

$$z(t) = z = Z_B e^{i(\Omega t + \alpha)}. \quad (2.10)$$

После подстановки (2.9) и (2.10) в (2.8), уравнение движения системы приводится к виду

$$(k - m\Omega^2 + i\Omega b)z = (k + i\Omega b)z_0, \quad (2.11)$$

откуда находят передаточную характеристику системы

$$\Phi(i\Omega) = \frac{k + i\Omega b}{k - m\Omega^2 + i\Omega b}, \quad (2.12)$$

и амплитуду колебаний системы

$$Z_B = Z_A \frac{\sqrt{1 + 4\gamma^2 \Omega^2 / \omega_0^2}}{\sqrt{(1 - \Omega^2 / \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \Omega^2 / \omega_0^2}}, \quad (2.13)$$

где $\gamma = \frac{b}{2m\omega_0}$ - коэффициент демпфирования.

Отношение амплитуд Z_B и Z_A системы с демпфированием и кинематическим возбуждением механических колебаний определяет коэффициент передачи вибраций основания в механическую систему – *коэффициент динамичности* μ :

$$\mu = \frac{\sqrt{1 + 4\gamma^2 \Omega^2 / \omega_0^2}}{\sqrt{(1 - \Omega^2 / \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \Omega^2 / \omega_0^2}}. \quad (2.14)$$

Из анализа (2.14) следует, что при $\Omega / \omega_0 = \sqrt{2}$ или $\Omega / \omega_0 = 0$ коэффициент динамичности $\mu = 1$, а при $\gamma = 0$ коэффициент динамичности $\mu = 1 / |1 - \Omega / \omega_0|$.

На рис.2.7 представлены зависимости коэффициента динамичности μ от отношения частоты вынужденных колебаний к частоте собственных колебаний Ω / ω_0 для различных значений коэффициента демпфирования γ .

2.4. Методы виброзащиты конструкций ЭС

Графики, представленные на рис.2.7, позволяют объяснить основные способы виброзащиты ЭС – виброизоляцию, частотную отстройку, вибродемпфирование. На рис. 2.7 можно условно выделить три области. Первая – когда $\omega/\omega_0 < 0,4$ (или $\omega_0 > 2,5\omega$) и $\mu \approx 1$, называется областью *дорезонансных колебаний*.

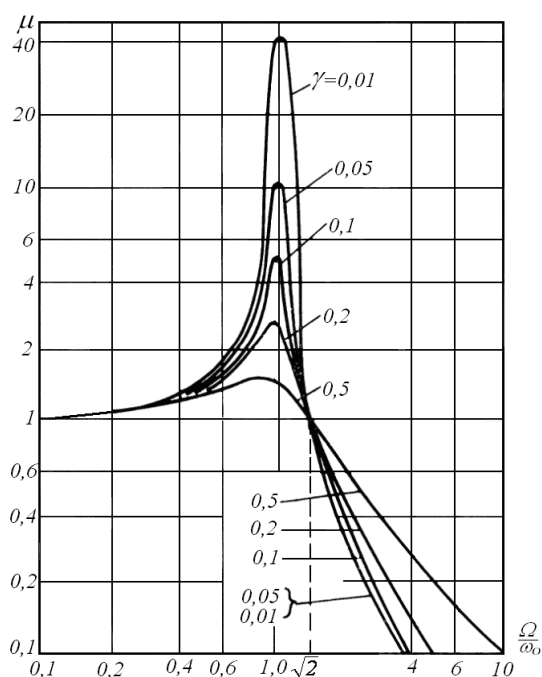


Рис.2.7. Зависимость коэффициента динамичности μ при кинематическом возбуждении от соотношения частот Ω/ω_0 при различных значениях коэффициента демпфирования γ

Для исключения возможности резонансных колебаний необходимо, чтобы собственная частота колебаний ω_0 в 2,5 раза превышала частоту возбуждения. На практике чаще используют соотношение $\omega_0 > 2\omega$, так как в государственных стандартах указывается: резонанс отсутствует, если $\mu \leq 2$. Это условие обычно выполняется при соотношении $\omega/\omega_0 < 0,5$. Этот способ устранения резонансных колебаний называется *частотной отстройкой*.

Обычно этим способом защищают печатные узлы ЭС. Несущим элементом печатного узла является пластина - печатная плата. Чтобы исключить резонанс необходимо вывести собственную частоту ячейки ω_0 за пределы диапазона частот возмущающих вибраций, например от ω_n до ω_e (рис. 2.8). Для этого обычно увеличивают жёсткость печатной платы: увеличение толщины конструкции, применение ребер жесткости и так далее, что может привести к значительному увеличению массы.

Частотная отстройка, как показывают расчеты и подтверждает практика, на частотах возбуждения 500 Гц затруднена, а при максимальной частоте 1000 - 2000 Гц практически невозможна. Полная заливка электронных модулей полимерными компаундами хотя и решает эту задачу, но приводит к резкому ухудшению теплового режима, ремонтпригодности, другим отрицательным явлениям и поэтому применяется редко.

Частотная отстройка ячеек с печатным монтажом для частот менее 500 Гц чаще всего достигается за счет изменения размеров платы, ее закрепления, материала и его сортамента, из которого плата должна быть изготовлена и т.д.

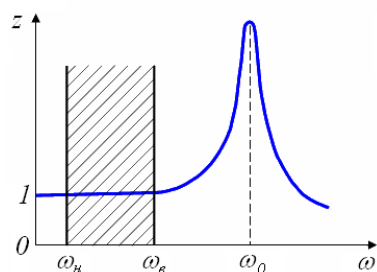


Рис.2.8. Амплитудно-частотная характеристика при увеличении жесткости конструктивных элементов

Вторая область – область резонансных колебаний $0,5 < \omega/\omega_0 < \sqrt{2}$. В этой области значения коэффициента динамичности $\mu > 1$, т.е. происходит усиление колебаний конструкции ЭС. В этой области применяется способ виброзащиты - *вибродемпфирование*, который предполагает использование демпфирующих покрытий и слоистых конструкций. Влияние демпфирующих покрытий на амплитудно-частотную характеристику представлено на рис. 2.9.

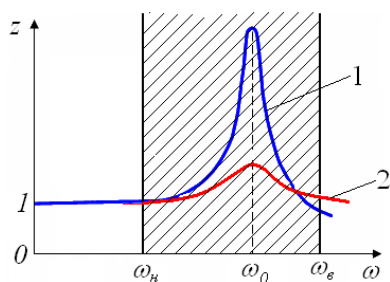


Рис.2.9. Амплитудно-частотные характеристики при увеличении степени демпфирования конструктивного элемента: 1 – слабое демпфирование; 2 – увеличенное демпфирование

Из приведенных характеристик следует, что этот способ виброзащиты эффективен в широком диапазоне частот воздействующих вибраций, который может захватывать и область частот собственных колебаний. В этом случае коэффициент динамичности $\mu > 1$, но при резонансном возбуждении вибраций конструктивных элементов эффективность виброзащиты демпфированием наибольшая, что следует из сравнения кривых 1 и 2.

Третья область – область зарезонансных колебаний $\omega/\omega_0 > \sqrt{2}$. В этой области значение коэффициента динамичности $\mu < 1$, т.е. происходит ослабление колебаний конструкции ЭС. В этой области применяется способ виброзащиты – *виброизоляция*, который предполагает использование амортизаторов (виброизоляторов). Влияние применения амортизаторов на амплитудно-частотную характеристику представлено на рис. 2.10. Данный способ виброзащиты является наиболее эффективным из всех рассмотренных, так как только он обеспечивает получение значения коэффициента динамического усиления $\mu < 1$.

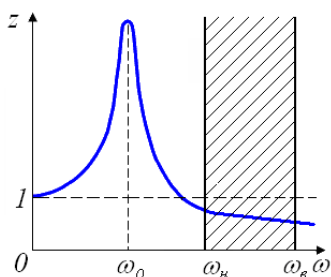


Рис.2.10. амплитудно-частотная характеристика виброизолированного объекта

В системах виброизоляции ЭС рекомендуется обеспечить коэффициент динамичности μ не менее 0,1-0,2, для этого необходимо выполнить условие $\omega_n > (4-5)\omega_0$.

Кроме рассмотренных выше наиболее употребительных способов виброзащиты в практике конструирования ЭС используют и другие: соответствующую ориентацию конструктивных элементов относительно направления вектора воздействующих вибраций; размещение наиболее чувствительных элементов ЭС в местах конструкции, характеризующихся малыми значениями коэффициента динамического усиления; применение виброустойчивых и вибропрочных ЭРЭ, транзисторов и ИС, элементов компенсации виброшумов, гибких печатных плат и др. Все эти способы виброзащиты относятся к пассивным.

В наиболее ответственных случаях применяются активные способы виброзащиты. Активная система виброзащиты строится, как правило, на основе динамического гасителя колебаний с регулированием величины его упругой связи (рис.2.11).

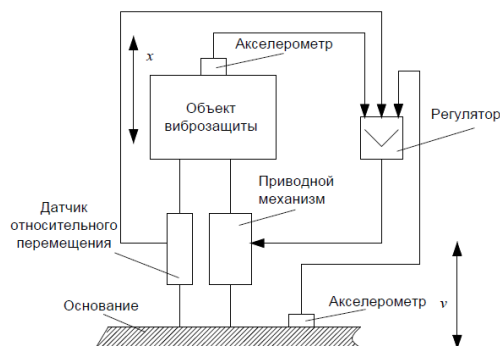


Рис.2.11. Структура активной системы виброзащиты

Динамический гаситель в качестве средства виброзащиты используется в случае необходимости защиты объектов от вибраций, характеризующихся постоянной частотой. Динамические гасители применяются также для улучшения динамических характеристик объектов и при ударных воздействиях.

Динамический виброгаситель в простейшем случае представляет собой массу m_2 , закрепленную с помощью упругого элемента (пружины) жесткостью k_2 к объекту защиты (рис. 2.12).

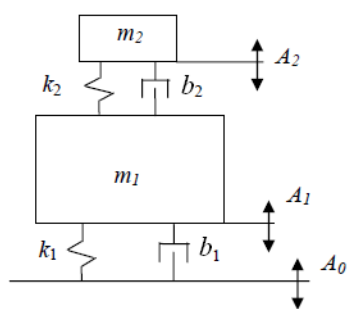


Рис.2.12. Динамический виброгаситель

Если собственная частота $\omega_{01} = \sqrt{k_2/m_2}$ присоединенного устройства (виброгасителя) будет равна частоте вибрационного воздействия ω , то основной защищаемый объект m_1 останется неподвижным, хотя именно к нему приложена переменная сила $F(\omega)$. Динамический виброгаситель

колеблется с достаточно большой амплитудой в режиме резонанса, забирая энергию внешнего воздействия на себя.

Ввиду своей сильной частотной избирательности этот способ виброзащиты не нашел широкого распространения при организации защиты ЭС, установленных на подвижных объектах, так как подобные условия эксплуатации не являются типичными для ЭС.

2.5. Методы расчета собственных частот колебаний печатных плат

Методы решения уравнений движения пластины могут быть аналитическими и численными. Аналитические методы, к которым относятся методы разделения переменных, позволяют получить решение в виде формулы или группы формул, анализ которых дает наглядное представление о влиянии конструктивных параметров на характеристики динамических процессов и оптимизировать конструкции. Основным недостатком аналитических методов в трудности математического описания собственной формы колебаний и граничных условий для сложных конструкций. Поэтому аналитические методы наиболее часто применяют для конструкций простой формы с «классическими» способами крепления типа жесткого защемления, свободного опирания или незакрепленного края пластины или конца балки.

Численные методы, среди которых наибольшее применение получили методы конечных элементов (МКЭ), конечных разностей (МКР), граничных элементов, не имеют принципиальных препятствий для решения сложных конструкций со сложными способами крепления. Характерным для них является замена исходных дифференциальных уравнений алгебраическими за счет дискретизации конструкции. К недостаткам этих методов относятся:

- необходимость решения большой системы алгебраических уравнений;
- решение получается в виде таблицы чисел и любое изменение конструкции приводит к необходимости решения на ЭВМ;
- дискретизация приводит к погрешности, оценка которой часто более сложная задача, чем нахождение основного решения.

2.5.1. Уравнение свободных незатухающих колебаний пластины

Печатный узел является основной колебательной системой ЭС, в котором могут возникнуть в результате механических воздействий

резонансные явления. В основе расчета собственных колебаний печатного узла лежит теория, разработанная для колебаний прямоугольных пластин. В данной теории при расчете собственных колебаний пластины (рис.2.13) принимают следующие допущения:

- 1) изгибные деформации пластин при колебаниях малы по сравнению с её толщиной, упругие деформации подчиняются закону Гука;
- 2) пластина имеет постоянную толщину;
- 3) в пластине имеется нейтральный слой, который при изгибных колебаниях пластины не подвержен деформациям растяжения – сжатия;

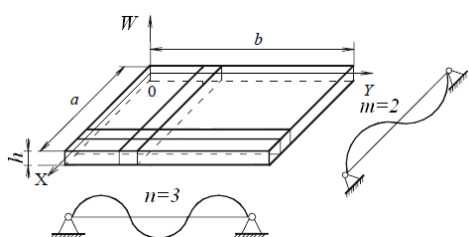


Рис.2.13. Пластина и возможные формы её колебаний

4) материал пластины идеально упругий, однородный и изотропный;

5) справедлива гипотеза прямых нормалей, согласно которой все прямые, нормальные к среднему слою пластины до деформирования остаются прямыми и нормальными к ней и после деформации.

Если пластина несет статическую распределенную нагрузку q , то для малых прогибов точек срединной поверхности w справедливо дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}, \quad (2.15)$$

где D - жесткость пластины на изгиб (цилиндрическая жесткость):

$$D = Eh^3 / 12(1 - \mu^2), \quad (2.16)$$

E , μ - соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона материала; h – толщина пластины

В задаче о свободных колебаниях нагрузкой являются силы инерции

$$q = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (2.17)$$

где ρ - плотность материала.

Подставив выражение (2.17) в (2.15), приходим к основному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (2.18)$$

Решение уравнения (2.18) будем искать в виде

$$w(x, y, t) = W(x, y)T(t). \quad (2.19)$$

Подставив (2.19) в (2.18) получим:

$$\frac{\ddot{T}}{T} = -\frac{1}{W} \frac{D}{\rho h} \left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right) = -\omega^2. \quad (2.20)$$

Для тождественного выполнения равенства (2.20) необходимо, чтобы каждая из частей равенства была постоянной. Обозначив эту постоянную через $-\omega^2$, получим два уравнения

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0. \quad (2.21)$$

$$\left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right) - \frac{\rho h \omega^2}{D} W = 0. \quad (2.22)$$

Уравнение (2.21) имеет решение $T = c \sin(\omega t + \alpha)$, указывающее на колебательный характер процесса с частотой ω .

Выражение (2.22) представляет собой дифференциальное уравнение для формы собственных колебаний пластины $W(x, y)$.

Для определения собственных частот и собственных форм необходимо задать граничные условия для сторон пластины для следующих вариантов:

- 1) свободная сторона пластины;
- 2) шарнирно-опертая сторона пластины;
- 3) защемленная сторона пластины.

2.5.2. Точный метод расчета собственных частот

Дифференциальное уравнение (2.22) для прямоугольной пластины с опертыми краями имеет частное решение

$$W(x, y) = A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (2.23)$$

где $m = 1, 2, \dots$; $n = 1, 2, \dots$; a и b - стороны пластины; A_{mn} -

Характер зависимости (2.23) представлен на рис.2.13. Любая прямая, параллельная оси x превращается в синусоиду, содержащую в интервале $(0, a)$ m полуволин (на рис.2.13 $m = 2$). Точно так же прямые, параллельные оси y , превращаются в синусоиды с n полуволнами (на рис.2.13 $n = 3$).

Выражение (2.23) удовлетворяет следующим граничным условиям на контурах пластины (равенство нулю прогибов и изгибающих моментов):

при $x = 0$ и $x = a$

$$W = 0; \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0;$$

при $y = 0$ и $y = b$

$$W = 0; \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0.$$

Подставляя выражение (2.23) в уравнение (2.22), получим

$$\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 = \frac{\rho h \omega_{mn}}{D};$$

затем находим собственную частоту

$$\omega_{mn} = \frac{\pi^2 h}{2} \sqrt{\frac{E}{3\rho(1-\mu^2)}} \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]. \quad (2.24)$$

Частота зависит от чисел m и n , определяющих число полуволн, на которые подразделяется пластина в каждом из направлений. Низшая частота соответствует случаю, когда пластина изгибается по одной полуволне в каждом направлении ($m = 1; n = 1$):

$$\omega_{11} = \frac{\pi^2 h}{2} \sqrt{\frac{E}{3\rho(1-\mu^2)}} \left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right]. \quad (2.25)$$

Если одна из сторон пластины значительно больше другой, одно слагаемое в скобках становится весьма малым по сравнению с другим и в пределе исчезает. Например, $a/b \rightarrow \infty$, тогда формула (2.25) принимает вид

$$\omega_{11} = \frac{\pi^2 h}{2b^2} \sqrt{\frac{E}{3\rho(1-\mu^2)}}. \quad (2.26)$$

2.5.3 Функция Рэлея для определения собственной частоты механической системы

Связи механической системы

Связями механической системы называются ограничения, стесняющие движение системы и осуществляемые какими-либо другими материальными телами. Обычно это различного рода закрепления системы: шарнирные опоры, жесткие или упругие заделки концов стержней и пластин, опорные поверхности, по которым должна перемещаться или на которых должна оставаться в покое система, и т. п. В дальнейшем предполагается, что, каковы бы ни были устройства, осуществляющие связи, их действия на систему выражаются силами, приложенными к системе и определенным образом направленными. Эти силы называются *реакциями связей*. Предполагается также, что связи могут быть аналитически представлены уравнениями, которым должны

удовлетворять координаты точек системы и производные от координат по времени. При этом связи, представленные уравнениями

$$f_k(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots; x_N, y_N, z_N; t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m; \quad m < 3N, \quad (2.27)$$

не содержащими производных координат по времени (N - число точек системы; x_i, y_i, z_i - их координаты), или уравнениями, содержащими производные, но интегрируемыми и приводящимися к виду (2.27), называются *голономными связями*. Такие связи ограничивают главным образом выбор возможных положений системы.

Связи, представленные уравнениями, содержащими производные координат и неинтегрируемыми, называются *неголономными*. Неголономные связи, не налагая, как правило, ограничений на выбор положений системы, большей частью вынуждают последнюю двигаться из данного положения в некотором определенном направлении, т. е. ограничивают выбор величины и направления скоростей точек системы.

В механических системах реакции связей являются обычно неизвестными. Задаются или описываются лишь способы осуществления связей. Полное определение реакций связей, т. е. определение их точек приложения, направления и величины, производится с помощью некоторых допущений из условий равновесия или уравнений движения системы, причем в последнем случае — после того, как будет найдено движение системы. Реакции, полученные из условий равновесия с учетом других приложенных к системе сил, называются *статическими реакциями*; реакции связей во время движения системы — реакции, определяемые из уравнений движения, — называются *динамическими реакциями*.

Когда в уравнения связей (2.27) время явно не входит, связи называются *стационарными* (неизменяемыми) или *склерономными*. В противном случае их называют *нестационарными* или *реономными*.

Виртуальные перемещения

Виртуальными перемещениями называются воображаемые бесконечно малые перемещения системы из одного ее положения в данный момент времени в другое положение, допускаемое связями в тот же момент времени, — перемещения без освобождения от связей.

Виртуальным перемещениям соответствуют изменения координат, происходящие в результате изменения формы зависимости их от времени, в частности от изменения параметров, определяющих эту зависимость, при фиксированном t . Такие изменения координат называются *изохронными вариациями* координат и обозначаются через

$\delta x, \delta y, \delta z$ в отличие от обозначения дифференциалов dx, dy, dz . Последние — тоже бесконечно малые изменения координат, но изменения, происходящие за бесконечно малый промежуток времени dt , под действием приложенных к системе сил. Операции дифференцирования и варьирования являются, таким образом, операциями, независимыми одна от другой. Поэтому имеет место равенство

$$\delta(df) = d(\delta f), \quad (2.28)$$

где f — какая-либо непрерывная функция координат, скоростей и времени.

Различие между дифференцированием и варьированием обнаруживается также при вычислении бесконечно малых изменений функции $f(x, y, z, t)$, с одной стороны, вследствие бесконечно малых приращений координат в действительном движении за промежуток времени dt , с другой — вследствие вариаций координат при виртуальных перемещениях системы, относящихся к одному и тому же моменту времени. В первом случае с точностью до бесконечно малых второго порядка

$$\begin{aligned} f(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt) - f(x, y, z, t) = \\ = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt = df(x, y, z, t), \end{aligned} \quad (2.29)$$

во втором

$$\begin{aligned} f(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z, t) - f(x, y, z, t) = \\ = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = \delta f(x, y, z, t). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Изменение функции f от вариаций координат, т. е. $\delta f(x, y, z, t)$, называется *вариацией функции* f . Из сопоставления формул (2.29) и (2.30) следует, что вариация функции $f(x, y, z, t)$ вычисляется по тому же правилу, что и ее дифференциал при фиксированном значении аргумента t .

Связи называются идеальными, если сумма элементарных работ их реакций \vec{R}_i на всех виртуальных перемещениях системы равна нулю, т. е. если

$$\sum_{i=1}^N \vec{R}_i \delta \vec{r}_i = 0, \quad (2.31)$$

где $\delta \vec{r}_i$ — вариации радиусов-векторов точек приложения \vec{R}_i , или в проекциях реакций R_{ix}, R_{iy}, R_{iz} и перемещений $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$, на оси прямоугольной системы координат:

$$\sum_{i=1}^N (R_{ix} \delta x_i + R_{iy} \delta y_i + R_{iz} \delta z_i) = 0. \quad (2.32)$$

Идеальными связями будут, например, абсолютно гладкие (без трения) опорные поверхности; нерастяжимые, несжимаемые и негибкие стержни; нерастяжимые абсолютно гибкие нити и т.п. Большой частью это все те тела и все те связи, упрощенные (идеализированные) представления о которых (как абсолютно гладких, абсолютно твердых и т. д.) входят в состав основных допущений механических систем ЭС на первом этапе их рассмотрения, представляющих первое приближение к действительности.

Независимые или обобщенные координаты

Предположим, что система из N частиц (точек), $3N$ координат которых определяют ее положение в момент t , подчинена m , $m < 3N$, голономным связям:

$$f_k(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (2.33)$$

В этом случае m координат могут быть выражены через остальные $(3N - m)$ независимые координаты, которым можно давать любые (достаточно малые) изменения без нарушения связей. Вариации этих независимых координат однозначно определяют вариации остальных зависимых координат. Число независимых координат системы, подчиненной только голономным связям (2.33), определяет *число степеней свободы системы*.

Вместо декартовых координат в качестве независимых координат выбирают обычно другие, связанные с ними величины, иногда другой физической природы и другой размерности. Эти независимые величины называются обобщенными координатами. Далее они обозначаются через q_1, q_2, \dots, q_n , где $n = 3N - m$. Число обобщенных координат должно быть равно числу независимых величин, однозначно определяющих положение системы, и через них должны выражаться все декартовы координаты системы в форме, например, уравнений

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_i(t, q_1, q_2, \dots, q_n), \\ y_i &= y_i(t, q_1, q_2, \dots, q_n), \\ z_i &= z_i(t, q_1, q_2, \dots, q_n), \end{aligned} \right\} i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.34)$$

Эти уравнения являются уравнениями тех же связей (2.33), представленными в параметрической форме.

Обобщенные силы

К понятию обобщенных сил приходим, преобразуя к обобщенным координатам выражение виртуальной работы заданных (активных) сил \vec{F}_i , т. е. сумму

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i), \quad (2.35)$$

где X_i, Y_i, Z_i - проекции \vec{F}_i на оси координат. Из уравнений (2.34) находим

$$\left. \begin{aligned} \delta x_i &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k, \\ \delta y_i &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \delta q_k, \\ \delta z_i &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \delta q_k, \end{aligned} \right\} \quad (2.36)$$

Подставив эти выражения в (2.35), получим

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^N (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = \\ &= \sum_{i=1}^N \left[X_i \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k + Y_i \sum_{k=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \delta q_k + Z_i \sum_{k=1}^n \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \delta q_k \right] = \\ &= \sum_{k=1}^n \delta q_k \left[\sum_{i=1}^N \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) \right]. \end{aligned}$$

Коэффициент при δq_k в последнем выражении, т. е. сумма

$$\sum_{i=1}^N \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) = Q_k, \quad (2.37)$$

и есть обобщенная сила, соответствующая координате q_k .

В изложенном определении обобщенной силы содержится указание и на другой способ ее вычисления. Чтобы получить обобщенную силу Q_k , соответствующую координате q_k , даем последней (мысленно) бесконечно малое изменение и на перемещении системы, соответствующем этому изменению δq_k , при фиксированных значениях других координат, вычисляем работу всех активных сил, приложенных к системе. Коэффициент при δq_k в выражении этой работы и будет обобщенной силой, соответствующей координате q_k .

Еще один способ вычисления обобщенных сил относится к силам стационарного потенциального силового поля. *Стационарным потенциальным силовым полем* называется часть пространства, в каждой точке которого на находящуюся в ней (или на проходящую через нее) материальную частицу системы действует сила, зависящая только

от положения этой точки, причем работа силы не зависит от пути, по которому перемещается точка приложения силы, а определяется начальным и конечным положениями точки. Потенциальное силовое поле можно еще определить как поле сил, элементарная работа которых представляет точный дифференциал некоторой функции Π от координат системы. Для одной силы это определение выражается равенством

$$Xdx + Ydy + Zdz = -d\Pi, \quad (2.38)$$

где знак минус означает, что работа силы поля \vec{F} связана с убыванием функции Π . В этом случае, действительно, работа силы \vec{F} на любом перемещении не зависит от пути, по какому движется система, а определяется значениями Π в начальном и конечном положениях системы. Обозначив через (А) и (В) начальное и конечное положения точки приложения силы \vec{F} , из равенства (2.38) находим

$$\int_{(A)}^{(B)} (Xdx + Ydy + Zdz) = \Pi_A - \Pi_B, \quad (2.39)$$

где Π_A и Π_B — значения функции Π соответственно в положениях (А) и (В).

Равенством (2.38) функция Π определена до произвольного постоянного слагаемого. Отсюда следует, что начало отсчета Π можно выбрать в любом месте поля, в частности, например, считать, что начало отсчета Π совпадает с началом отсчета координат и, таким образом, положить $\Pi(0, 0, \dots, 0) = 0$.

После того как выбрано начало отсчета, каждому положению системы в поле будет однозначно соответствовать определенное значение Π . Если в равенстве (2.39) положение (В) совпадает с началом отсчета Π , то

$$\int_{(A)}^{(B)} (Xdx + Ydy + Zdz) = \Pi_A. \quad (2.40)$$

Функция Π с указанными свойствами определяет так называемую потенциальную энергию системы в положении (А). При фиксированном начале отсчета потенциальная энергия системы определяется только ее положением в силовом поле.

Потенциальная энергия является, как иногда говорят, энергией положения системы в силовом поле.

Из равенства (2.38) следует

$$Xdx + Ydy + Zdz = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} dx - \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy - \frac{\partial \Pi}{\partial z} dz.$$

Поэтому

$$X = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}. \quad (2.41)$$

С помощью последних равенств мы получаем следующую формулу для вычисления обобщенных сил потенциального силового поля:

$$Q_k = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k}, \quad k=1,2,\dots,n, \quad (2.42)$$

где потенциальная энергия Π предполагается выраженной через обобщенные координаты.

Согласно принципу виртуальных перемещений необходимым и достаточным условием равновесного состояния или покоя системы, определяемого постоянными значениями координат и нулевыми значениями скоростей $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$, является равенство нулю суммы элементарных работ заданных сил на всех виртуальных перемещениях системы из этого состояния.

Преобразованное к обобщенным силам, это условие выражается равенством

$$\sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k = 0,$$

или, так как δq_k - независимые величины:

$$Q_k = 0, \quad k=1,2,\dots,n. \quad (2.43)$$

Для консервативной системы условия (2.43) имеют вид

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_k} = 0, \quad k=1,2,\dots,n. \quad (2.44)$$

Последние равенства свидетельствуют, что в состоянии равновесия потенциальная энергия имеет стационарное значение.

Уравнения Лагранжа

Теоретической основой большей части расчетов колебаний голономных систем с конечным числом степеней свободы служат уравнения Лагранжа в обобщенных координатах. Составленные в предположении, что связи, наложенные на систему, идеальные, эти уравнения не содержат реакций связей, и входящие в них величины, определяющие движение системы (обобщенные координаты и их производные по времени), непосредственно связаны с заданными (обобщенными) силами.

Обозначим обобщенные координаты рассматриваемой системы с n степенями свободы через q_1, q_2, \dots, q_n . Пусть связи системы представлены уравнениями (2.34). Обозначим через m_i массы частиц (точек) системы; приложенные к ним заданные силы — через \vec{F}_i ; их проекции на оси координат - через X_i, Y_i, Z_i ; проекции на те же оси реакций связей \vec{R}_i -

через R_{ix}, R_{iy}, R_{iz} . Из выражений производных по t от координат x_i, y_i, z_i , записанных в виде (2.34)

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_i &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t}, \\ \dot{y}_i &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial y_i}{\partial t}, \\ \dot{z}_i &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial z_i}{\partial t}, \end{aligned} \right\} i=1,2,\dots,N \quad (2.45)$$

следует, что

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial y_i}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial z_i}{\partial q_k}.$$

С помощью этих формул можно представить производную от кинетической энергии

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \quad (2.46)$$

по обобщенной скорости \dot{q}_k следующим образом:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^N m_i \left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \dot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \dot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right).$$

Взяв от обеих частей последнего равенства производную по t , получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) &= \sum_{i=1}^N m_i \left(\ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \ddot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \ddot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) + \\ &+ \sum_{i=1}^N m_i \left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k} + \dot{y}_i \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial q_k} + \dot{z}_i \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial q_k} \right). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Принимая во внимание уравнения движения

$$m_i \ddot{x}_i = X_i + R_{ix}, \quad m_i \ddot{y}_i = Y_i + R_{iy}, \quad m_i \ddot{z}_i = Z_i + R_{iz},$$

равенство (2.47) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} &= \sum_{i=1}^N \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) + \\ &+ \sum_{i=1}^N \left(R_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + R_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + R_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right). \end{aligned}$$

Первая сумма справа - обобщенная активная сила Q_k (2.37), соответствующая координате q_k , вторая — обобщенная реакция связей, равная нулю в силу того, что связи, наложенные на систему, по предположению, идеальные.

Таким образом, выражение

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k = 0, \quad k=1,2,\dots,n. \quad (2.48)$$

представляет собой уравнения Лагранжа в обобщенных координатах.

Для консервативной системы с потенциальной энергией Π уравнения (2.48) запишутся следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_k} = 0, \quad k=1,2,\dots,n, \quad (2.49)$$

или, если ввести функцию Лагранжа $L=T-\Pi$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k=1,2,\dots,n, \quad (2.50)$$

Перед подстановкой в уравнения Лагранжа функции T, Q, Π, L должны быть выражены в обобщенных координатах.

Если связи, наложенные на систему, стационарные, то в формулах (2.45) частные производные от координат x_i, y_i, z_i по времени отсутствуют и кинетическая энергия T будет однородной квадратичной формой обобщенных скоростей $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$. В этом случае полная механическая энергия системы сохраняет свою величину во все время движения:

$$\frac{d}{dt}(T+\Pi)=0$$

или

$$T+\Pi = const. \quad (2.51)$$

Равенство (2.51) представляет первый интеграл уравнений движения (2.49) - именно интеграл сохранения полной механической энергии.

Когда система совершает свободные колебания в отсутствие сопротивлений, полная механическая энергия ее остается неизменной. В свободных колебаниях система предоставлена самой себе и начальный запас ее энергии не может увеличиться. Но он и не уменьшается, так как сопротивления, на преодоление которых расходовалась бы энергия, по предположению, отсутствуют. Мы можем, поэтому для кинетической и потенциальной энергии системы, записать

$$T+\Pi = const. \quad (2.\dots)$$

Если система совершает одно из собственных колебаний, то все точки ее одновременно достигают положений наибольшего отклонения (в этот момент все обобщенные скорости равны нулю) и одновременно

проходят через положение равновесия (в этот момент равны нулю все обобщенные координаты). В положении наибольшего отклонения кинетическая энергия обращается в нуль, и, следовательно, потенциальная достигает своего максимального значения:

3. Основное дифференциальное уравнение для линейной системы колебаний с одной степенью свободы

Изучение свободных колебаний представляет определенный интерес в связи с практическими задачами о движении механической системы после какого-либо возмущения ее состояния равновесия. Дело в том, что характеристики свободных колебаний (собственные частоты и собственные формы) полностью определяют индивидуальные динамические свойства механической системы и имеют первостепенное значение также при анализе ее вынужденных колебаний.

Рассмотрим в общем виде консервативную механическую систему с одной степенью свободы. Механической системой с одной степенью свободы называется система, положение которой в пространстве однозначно определяется заданием одной обобщенной координаты q , а движение системы под действием приложенных к ней сил — изменением этой координаты с течением времени.

Уравнение Лагранжа для данной системы имеет известную из курса теоретической механики форму:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0, \quad (3.1)$$

где t - время, q - обобщенная координата, \dot{q} - обобщенная скорость, T - кинетическая энергия, Π - потенциальная энергия.

Условимся отсчитывать «координаты состояния» системы q и \dot{q} от равновесного ее состояния, предполагая, что в этом состоянии не только \dot{q} , но и q равны нулю. Тогда отличные от нуля значения координат q , \dot{q} будут определять отклонения системы от этого состояния или возмущения ее равновесного состояния. Получив некоторое начальное возмущение и предоставленная затем самой себе, система будет совершать *возмущенное движение*.

При исследовании малых колебаний около устойчивого равновесного состояния во многих случаях можно (не совершая большой погрешности) сохранять в выражениях, зависящих от координат и скоростей, только члены низшего (относительно этих величин) порядка, отбрасывая все другие как бесконечно малые высших порядков. Такая операция приводит обычно решение задачи о малых

колебаниях к интегрированию линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Она называется *линеаризацией уравнений движения системы*.

Колебания, описываемые линеаризованными дифференциальными уравнениями, называются *линейными колебаниями*.

В соответствии с изложенными замечаниями о линеаризации составим выражения кинетической и потенциальной энергии малых колебаний консервативной системы, подчиненной стационарным связям, около устойчивого состояния равновесия, предполагая, что оно определяется нулевыми значениями координат $q = \dot{q} = 0$. Для такой системы уравнения связей имеют вид

$$x_i = x_i(q), \quad y_i = y_i(q), \quad z_i = z_i(q).$$

Подставив в выражение кинетической энергии системы

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \quad (3.2)$$

производные

$$\dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial q} \dot{q}, \quad \dot{y}_i = \frac{\partial y_i}{\partial q} \dot{q}, \quad \dot{z}_i = \frac{\partial z_i}{\partial q} \dot{q},$$

получим

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left[\left(\frac{\partial x_i}{\partial q} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_i}{\partial q} \right)^2 + \left(\frac{\partial z_i}{\partial q} \right)^2 \right] \dot{q}^2 = \frac{1}{2} A(q) \dot{q}^2, \quad (3.3)$$

где

$$A(q) = \sum_{i=1}^n m_i \left[\left(\frac{\partial x_i}{\partial q} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_i}{\partial q} \right)^2 + \left(\frac{\partial z_i}{\partial q} \right)^2 \right].$$

Разлагая это выражение в ряд Маклорена в окрестности значения $q=0$, получим

$$A(q) = A(0) + A'(0)q + \frac{A''(0)}{2}q^2 + \dots$$

Здесь штрихи обозначают производные функции $A(q)$ по обобщенной координате q .

Ограничиваясь в разложении коэффициента $A(q)$ по степеням q первым членом, т. е. положив приближенно

$$A(q) \approx A(0) = a,$$

придем к следующему выражению кинетической энергии линеаризованной системы:

$$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2. \quad (3.4)$$

Здесь a - существенно положительная величина, так как кинетическая энергия отрицательных значений иметь не может. Эту

величину называют *коэффициентом инерции* или *инерционным коэффициентом* (иногда его называют также *обобщенной* или *приведенной массой*).

Что касается потенциальной энергии Π , то в случае стационарных связей она является функцией только координаты q :

$$\Pi = \Pi(q) \quad (3.5)$$

и может принимать как положительные так и отрицательные значения.

Разложим данную функцию в ряд Маклорена в окрестности точки $q=0$:

$$\Pi(q) = \Pi(0) + \Pi'(0)q + \frac{\Pi''(0)}{2}q^2 + \dots, \quad (3.6)$$

Где, как и ранее, штрихи обозначают дифференцирование по обобщенной координате q .

Если за начало отсчета потенциальной энергии выбрано равновесное состояние системы, в котором $q=0$, то

$$\Pi(0) = 0.$$

В этом состоянии равна нулю и первая производная Π' . Поэтому в разложение $\Pi(q)$ по степеням q в области $q=0$ члены не ниже второй степени относительно q , т. е. будет иметь вид

$$\Pi(q) = \frac{1}{2}cq^2 + \dots,$$

где постоянная

$$c = \left[\frac{d^2\Pi}{dq^2} \right]_{q=0}, \quad (3.7)$$

называется *обобщенным коэффициентом жесткости* или *квазиупругим коэффициентом*.

Для малых колебаний

$$\Pi(q) = \frac{1}{2}cq^2. \quad (3.8)$$

Знак постоянной c зависит от устойчивости положения равновесия, от которого ведется отсчет координаты q . Согласно теореме Лагранжа-Дирихле потенциальная энергия консервативной системы в положении устойчивого равновесия имеет минимум, т.е. $\Pi''(0) > 0$. Отсюда следует, что $c > 0$ вблизи устойчивого положения равновесия.

Подставив в уравнение Лагранжа (3.1) выражения (3.4) и (3.8) для кинетической и потенциальной энергии, получим основное дифференциальное уравнение для свободных колебаний:

$$a\ddot{q} + cq = 0. \quad (3.9)$$

Введем обозначение

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{a}}, \quad (3.10)$$

тогда вместо (3.9) получим

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0. \quad (3.11)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$q = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t, \quad (3.12)$$

причем постоянные C_1 и C_2 определяются через начальные условия $q(0) = q_0$ и $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$ в виде

$$C_1 = \frac{\dot{q}_0}{\omega}, \quad C_2 = q_0. \quad (3.13)$$

Окончательно имеем

$$q = \frac{\dot{q}_0}{\omega} \sin \omega t + q_0 \cos \omega t. \quad (3.14)$$

Иногда пользуются иной формой записи:

$$q = A \sin(\omega t + \alpha), \quad (3.15)$$

где

$$A = \sqrt{\left(\frac{\dot{q}_0}{\omega}\right)^2 + q_0^2}, \quad \alpha = \arctg \frac{\omega q_0}{\dot{q}_0}. \quad (3.16)$$

Из выражения (3.15) видно, что движение представляет собой незатухающие гармонические колебания с амплитудой A и угловой частотой ω (рис.3.1).

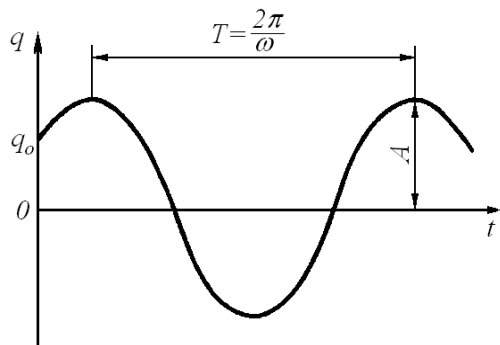


Рис.3.1. График гармонического колебания с амплитудой A и угловой частотой ω

Необходимо отметить, что амплитуда колебаний определяется начальными условиями (3.16), а угловая частота колебаний зависит только от параметров системы (3.10) и не зависит от начальных условий. По этому признаку величина $\omega = \omega_0$ называется собственной частотой системы. Собственная частота представляет собой число свободных колебаний за 2π единиц времени. *Период свободных колебаний*, т.е. длительность одного полного цикла колебаний, определяется формулой

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a}{c}}. \quad (3.17)$$

Приближенные методы расчета собственных колебаний пластин

Реальные конструкции печатных плат не соответствуют требованиям однородной пластины, что приводит к многообразию краевых условий пластины. В таких случаях применяются приближенные решения уравнения (2.4) по методам Рэлея, Ритца и др.

Метод Рэлея позволяет учесть нагружение печатной платы функционального узла с установленными на ней элементами и получить выражение для расчета частоты свободных колебаний платы, справедливое при любых краевых условиях. Частота свободных колебаний основного тона печатной платы определяется по формуле

$$\omega_{01} = \frac{\alpha_1}{a^2} \sqrt{\frac{D}{m_s + m_0}}, \quad (3.19)$$

где α_1 – коэффициент, характеризующий зависимость частоты свободных колебаний пластины от краевых условий; a – большая сторона пластины; m_s , m_0 – приведенные к площади пластины массы элементов и самой пластины. Коэффициент α_1 находится из формул, приведенных в табл. 2.1, в зависимости от схемы закрепления и соотношения сторон пластины $\beta = a/b$.

Выражение (2.9) обеспечивает достаточную точность лишь при расчете частоты основного тона. С ростом номера тона (обертон) точность результатов расчета существенно снижается.

Метод Ритца, являющийся развитием метода Рэлея, позволяет определять частоты свободных колебаний пластины на основном тоне и обертонах для различных краевых условий. Наибольшее применение находит формула

$$\omega_{0i} = K_s \frac{\alpha_{ij}}{a^2} \sqrt{\frac{D}{m}}, \quad (3.20)$$

Таблица 3.1

Формулы вычисления коэффициента α_1 в зависимости от варианта закрепления сторон пластины

№	Вариант крепления пластины (рис.2.1)	Формулы расчета α_1
1	a	$22,37(1+0,61\beta^2 + \beta^4)^{1/2}$
2	b	$15,42(1+0,95\beta^2 + 0,41\beta^4)^{1/2}$

3	v	$15,42(1 + 1,19\beta^2 + 2,1\beta^4)^{1/2}$
4	z	$22,37(1 + 0,48\beta^2 + 0,19\beta^4)^{1/2}$
5	δ	9,87
6	e	$9,87(1 + 2\beta^2 + \beta^4)^{1/2}$

где α_{ij} – коэффициент, зависящий от способа закрепления пластины, соотношения ее сторон и номера тона колебаний; $m = (m_n + m_s)/(ab)$ – масса пластины, приведенная к площади; $K_s = 1/\sqrt{1 + m_s/m_n}$ – коэффициент, учитывающий нагрузку пластины с размещенными на ней элементами; m_s – масса элементов, размещенных на пластине; m_n – масса пластины.

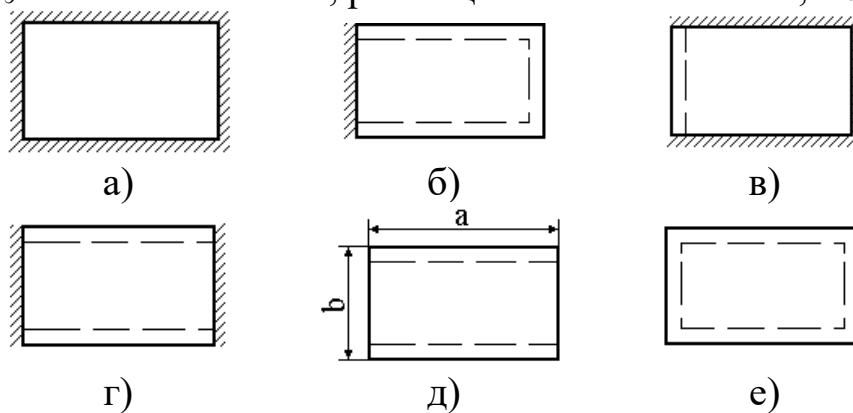


Рис. 3.2. Варианты крепления пластины: - сторона защемлена; - сторона лежит на опоре (в направляющей)

Для упрощения процедуры расчета частоты свободных колебаний пластины основного тона формула (2.10) преобразуется к виду:

$$f_{01} = 10^5 K_m K_s \frac{Ch}{a^2}, \quad (3.21)$$

где $C = \frac{\alpha_1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{m}}$ – частотная постоянная для пластины, изготовленной из стали; a – большая сторона пластины; $K_m = \sqrt{E\rho_c/(E_c\rho)}$ – поправочный коэффициент на материал пластины; E , E_c – модули упругости материала пластины и стали; ρ , ρ_c – плотности материала пластины и стали соответственно. В табл. 3.2 приведены значения частотной постоянной C для различных вариантов закрепления и соотношения сторон a/b стальной пластины.

Таблица 3.2

Частотная постоянная C стальной пластины

Схема закрепления пластины (рис.2.1)	Значение C при соотношении сторон a/b , равном					
	1	1,5	2,0	2,5	3,0	4,0
a	86	145	234	352	497	868
b	56	84	124	176	240	864
v	76	139	230	349	494	866
z	69	93	131	181	244	406
d	38	70	112	165	230	394
e	47	76	117	170	234	375

В случае точечного крепления печатных плат (рис.3.3) собственная частота колебаний определяется по формуле

$$f_0 = 1,57 \left(A + \frac{1}{b^2} \right) \sqrt{\frac{D}{m}}, \quad (3.22)$$

где $A = 1/a^2$ при числе точек крепления $n = 4$; $A = 4/(a^2 + b^2)$ при $n = 5$; $A = 0,25/a^2$ при $n = 6$.

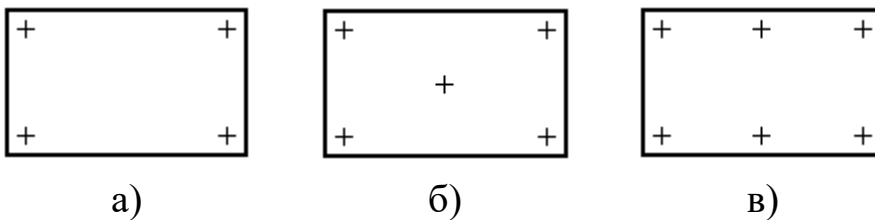


Рис.3.3. Точечное крепление плат

Для прямоугольной пластины, свободно опертой по контуру и имеющей параллельные сторонам ребра жесткости с одинаковыми прямоугольными поперечными сечениями, первая собственная частота колебаний определяется из выражения

$$f_{01} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{B + \frac{r+1}{k+1} \xi^4 B + aD(\xi^2 + 1)^2}{b^3 \left(m_y + \frac{r+1}{k+1} m_x + \frac{m_n}{k+1} \right)}}, \quad (3.23)$$

где a , b – длина и ширина пластины; r , k – число ребер, параллельных осям X и Y ; m_n , m_x , m_y – массы пластин и ребер, параллельных осям X и Y соответственно; $\xi = b/a$; D – цилиндрическая жесткость пластины; $B = E_1 \frac{b_1 h_1^3}{12}$ – жесткость ребра; E_1 – модуль упругости материала ребра; b_1 , h_1 – ширина и высота ребра.

4 Методы защиты от вибраций

Многие виды электронных средств, устанавливаемых на подвижных объектах, в период эксплуатации подвергаются дестабилизирующим механическим воздействиям – ударам, вибрациям, линейным перегрузкам, акустическим шумам.

Для аппаратуры ракетной и авиакосмической техники, а также некоторых видов наземных транспортных средств, характерно воздействие широкополосной вибрации. Максимальная частота воздействующей вибрации может достигать 2000 Гц, что приводит к возникновению резонансных колебаний ячеек ЭС – электромонтажных плат с установленными на них электрорадиоэлементами (ЭРЭ). Это приводит к увеличению амплитуд колебаний в десятки раз и значительному увеличению интенсивности отказов ЭС за счет механических разрушений и искажений параметров электрических сигналов. Поэтому устранение резонансных колебаний ячеек и других элементов конструкций ЭС или снижение их до допустимого уровня составляют одну из важнейших задач при проектировании многих видов ЭС.

Обычно задачи уменьшения амплитуд резонансных колебаний решаются частотной отстройкой или увеличением демпфирующих свойств ячеек. Однако полное устранение резонансных колебаний частотной отстройкой при воздействии вибрации в диапазоне частот до 2000 Гц практически невозможно.

Полная заливка ячеек ЭС полимерными компаундами, которая могла бы решить эту задачу, приводит к увеличению массы конструкции, ухудшению ремонтпригодности и тепловых режимов. Поэтому, все большее применение находит способ уменьшения амплитуд резонансных колебаний, основанный на применении полимерных демпферов из специальных, вибропоглощающих, материалов, которые могут выполняться в виде слоев, наносимых на конструкции, демпфирующих ребер, высокодемпфированных динамических гасителей колебаний и вставок. Перспективно применение демпфирующих вставок, т.к. установка их между параллельно расположенными ячейками ЭС в блоке позволяет уменьшить амплитуду резонансных колебаний в 5-20 раз и практически не увеличивает массу и габариты изделия.

5. ПРОГРАММА РАБОТЫ

1. Разработать в *MatLAB* математические модели, используя формулы (3.18), (3.19), (3.21), (2.12), (2.13). Сохранить в виде функции *MatLAB*.

2. По программе ниже провести исследования, используя данные модели.

3. Для заданных размеров ПП (табл. 5.3), изготовленной из стеклотекстолита, исследовать влияние соотношения сторон a/b на низшую частоту собственных колебаний пластины ω_{01} в следующих случаях: свободного опирания по формуле (3.18); метода Рэлея по формуле (3.19); метода Ритца по формуле (3.21). Способ закрепления задается преподавателем. Результаты представить в виде графика.

Таблица 5.3

Исходные данные для расчетов

Размер стороны ПП a , см	Диапазон изменения соотношения сторон ПП a/b	Толщина ПП h , см	Модуль упругости $E, 10^{10}$, Н/м ²	Коэффициент Пуассона ε	Плотность материала $\rho, 10^3$, кг/м ³
$a = 5 + N$, где N - номер варианта	$[0,5 \div 3]$ с шагом 0,5	0,2	3,2	0,279	2,47

4. Исследовать влияние способа закрепления ПП на низшую частоту собственных колебаний пластины ω_{01} для метода Рэлея. Соотношение сторон ПП задается преподавателем. Результаты представить в виде таблицы.

Частота собственных колебаний пластины ω_{01} в зависимости от способа закрепления ПП (рис.3.2)					
$a)$	$b)$	$в)$	$г)$	$д)$	$e)$

5. Для заданных размеров ПП (табл. 5.3), изготовленной из стеклотекстолита, исследовать влияние соотношения сторон a/b на низшую частоту собственных колебаний пластины ω_{01} в случае точечного закрепления ПП (рис.3.3) в соответствии с выражением (3.22). Способ закрепления задается преподавателем. Результаты представить в виде графика.

6. Исследовать влияние способа точечного закрепления ПП на низшую частоту собственных колебаний пластины ω_{01} . Соотношение

сторон ПП задается преподавателем. Результаты представить в виде таблицы.

Частота собственных колебаний пластины ω_{01} в зависимости от способа закрепления ПП (рис.3.3)		
<i>a)</i>	<i>б)</i>	<i>в)</i>

7. Для заданных размеров ПП (табл. 5.3), изготовленной из стеклотекстолита, исследовать влияние ребер жесткости на низшую частоту собственных колебаний пластины ω_{01} в соответствии с выражением (3.23). Исходные данные для ребер жесткости приведены в табл. 5.4. Количество ребер жесткости задается преподавателем.

Таблица 5.4

Ширина ребра жесткости b_1 , мм	Высота ребра жесткости h_1 , мм	Материал	Модуль упругости $E, 10^{10}$ Н/м ²	Коэффициент Пуассона ε	Плотность материала $\rho, 10^3$ кг/м ³
3	1	Алюминий	7,3	0,3	2,7
2	1	Сталь	22	0,3	7,8

8. Провести критический анализ полученных результатов.

4. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое гармоническая и полигармоническая вибрации?
2. Дайте характеристику случайной вибрации.
3. Дайте характеристику модели печатной платы.
4. Особенности амплитудно-частотной характеристики механической колебательной системы.
5. Расчет собственных частот ПП методами Рэлея и Ритца.
6. Методы борьбы с механическими воздействиями в конструкциях ЭС.
7. Характеристики изменений в элементах конструкции ЭС, вызванные механическими воздействиями.
8. Дайте определение вибропрочности и виброустойчивости конструкции ЭС.

2. Лабораторная работа №2. Исследование тепловых режимов

2.1 Основные понятия и определения

Проблема отвода тепла является одной из важнейших проблем конструирования и разработки ЭВС. С появлением интегральных схем (ИС) с очень высокой плотностью размещения активных элементов на кристалле и с появлением плат, содержащих сотни ИС, вопросы обеспечения нормального теплового режима встали перед разработчиками электронной аппаратуры так остро, как никогда прежде.

Разработчика ЭВС интересует не тепловой режим вообще, а нормальный (или заданный) тепловой режим. Тепловой режим отдельного элемента считается нормальным, если соблюдаются два условия: температура элемента (или окружающий элемент среды) находится в пределах, определенных паспортом или техническими условиями на него, независимо от изменения окружающей аппаратуры среды; температура элемента должна быть такова, чтобы обеспечивалась его работа с заданной надежностью. Первое условие является обязательным для каждого элемента. Второе – специально оговаривается в техническом задании на разработку аппаратуры.

Под тепловым режимом ЭВС понимают пространственно-временное распределение температуры в зависимости от мощности источников и стоков энергии, геометрических и физических параметров конструкции, внешней среды, куда отводится тепло.

Исходя из этого определения устройства ЭВС представляют собой преобразователи электрической энергии в тепловую. В зависимости от КПД значительная часть тепловой энергии рассеивается в окружающее пространство и идет на нагрев конструктивных деталей, узлов и функциональных элементов. Известно, что в процессе нагрева деталей и элементов их надежность падает за счет снижения изоляционных свойств материалов, изменения плотности и подвижности носителей тока в полупроводниковых элементах, снижения индуктивности насыщения в сердечниках, увеличения интенсивности старения материалов и других факторов, ведущих к отказу деталей и элементов.

Следовательно, обеспечение нормального режима ЭВС – одно из необходимых условий их надежной работы.

Тепловой режим ЭВС считается нормальным, если соблюдаются два условия:

- температуры всех деталей и узлов конструкции при заданных условиях эксплуатации не превышают предельно допустимых температур, указанных в технических условиях или паспортах на детали и узлы;

- температуры всех деталей и узлов конструкции таковы, что обеспечивается работа ЭВС с заданной точностью и надежностью.

Общий баланс энергии в устройстве можно выразить уравнением вида

$$E_n = E_1 + E_2 + E_3,$$

где E_n – электрическая энергия, подводимая от источника питания; E_1 – выходная электрическая энергия; E_2 – тепловая энергия, рассеиваемая в окружающее пространство; E_3 – тепловая энергия, расходуемая на нагревание деталей, узлов и элементов.

Основной характеристикой преобразователя энергии является КПД, который можно найти по следующей формуле:

$$\frac{E_1}{E_n} = \frac{E_n - (E_2 + E_3)}{E_n} = 1 - \frac{E_2 + E_3}{E_n}.$$

Повышение КПД возможно только за счет уменьшения значений E_2 и E_3 , являющихся функцией качества преобразования энергии устройством.

Как правило, ЭВС обладают невысоким КПД, количественно оцениваемым от долей процента до 50-60% в отдельных устройствах.

Уменьшение показателя E_3 возможно за счет снижения рассеиваемой мощности элементов, расширения воздушных каналов в местах их компоновки, улучшения теплоотвода и организации твердых теплостоков на холодные поверхности и т.д.

Улучшение показателя E_2 возможно за счет выбора системы охлаждения (перфорации, принудительной вентиляции), расширения площади теплообменных поверхностей, установки наружных ребер-радиаторов и т.д.

Характерной особенностью теплообменных процессов в ЭВС является их зависимость от временного фактора. Постоянный подогрев конструкций и элементов идет быстрее, чем теплоотдача в окружающее пространство. Установившийся режим обычно

наступает при равенстве подогрева и теплоотдачи, но уже после критических предельно допустимых температур для элементов.

Известно, что элементы ЭВС имеют неоднородные по плотности конструкции, что вызывает их различный по интенсивности и времени перегрев. Перегревом принято называть разность между температурой некоторой точки конструкции ЭВС и температурой окружающей среды. С течением времени температура их выравнивается благодаря наличию теплового потока от мест с более высокой температурой к местам с более низкой температурой. Этот процесс протекает во всех веществах: твердых, жидких и газообразных.

Отвод тепла от любого тела, а следовательно, и от элементов ЭВС может происходить за счет теплопроводности, конвекции и излучения.

Передача тепла теплопроводностью

Теплопроводностью (кондукцией) называют процесс передачи тепла (тепловой энергии) при непосредственном соприкосновении отдельных частиц тела или отдельных тел, имеющих различные температуры. Суть процесса состоит в том, что мельчайшие частицы тела (атомы, молекулы, электроны) с более высокой температурой имеют большую кинетическую энергию и при соприкосновении с частицами с меньшей температурой отдают свою энергию, а последние ее воспринимают. При этом никакого переноса массы вещества не происходит. В чистом виде теплопроводность может наблюдаться только в твердых телах.

Процесс распространения теплового потока J при теплопроводности описывается законом Фурье:

$$J = -\lambda_T \text{grad}T, \quad (2.1)$$

где λ_T – коэффициент теплопроводности материала; $\text{grad}T$ – температурный градиент вдоль потока.

В случае, когда температурное поле изменяется в одном направлении и теплофизические характеристики вещества постоянны во всех точках, уравнение (2.1) для тела (рис.2.1), имеющего постоянное поперечное сечение, можно записать в следующем виде:

$$P_T = \frac{\lambda_T S}{l} (T_1 - T_2), \quad (2.2)$$

где P_T – мощность, передаваемая телом, Вт; S – площадь поперечного сечения тела, м²; T_1 , T_2 – постоянные во времени температуры нагреваемого и охлаждаемого поперечных сечений тела, К; l – длина теплового пути, м.

Значение коэффициентов теплопроводности наиболее распространенных конструкционных материалов приведены в табл.4.1.

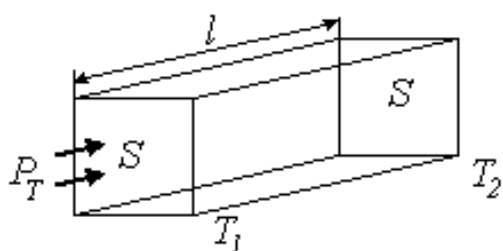


Рис.2.1. Передача тепловой энергии в изотропном твердом теле

Таблица 2.1

Коэффициенты теплопроводности наиболее часто применяемых материалов

Наименование материала	λ_T , Вт/(м·К)
Алюминиевые сплавы	160 – 180
Воздух	0,025
Гетинакс	0,15 – 1,18
Керамика 22ХС	18 – 20
Клеи и компаунды	0,15 – 0,3
Ковар Н29К18	21
Кремний	120 – 130
Латунь	100 – 200
Медь	380 – 390
Олово	64
Поликор	25 – 38
Ситалл	1,1 – 1,6

Продолжение табл. 2.1

Наименование материала	λ_T , Вт/(м·К)
Слюда	0,43 – 0,6
Сталь конструкционная	45 – 50
Стекло кварцевое	1,4 – 1,5
Стеклотекстолит	0,17 – 1,18

Отношение $l/(\lambda_T S)$ называют термическим или тепловым сопротивлением и обозначают

$$R_T = l/(\lambda_T S). \quad (2.3)$$

Теперь формула (4.2) может быть записана так:

$$P_T = \Delta T / R_T. \quad (2.4)$$

Эта формула по своей структуре аналогична формуле закона Ома для электрической цепи. Используя эту аналогию, можно для расчета теплового сопротивления пользоваться применяемыми в электротехнике формулами для параллельного и последовательного включения резисторов. Такой метод удобно использовать в тех случаях, когда теплопроводящее тело имеет неоднородную структуру.

Передача тепла конвекцией

Конвекцией называется перенос тепловой энергии движущимися массами жидкости или газа. Для передачи теплоты конвекцией требуется обтекание тела жидкостью или газом, имеющим другую температуру. Конвекция может быть естественной (в результате действия сил тяготения) и вынужденной (за счет действия устройств, создающих перемещение газа или жидкости).

Процесс теплопередачи при конвекции описывается законом Ньютона:

$$P_K = \alpha_K S_T (T_T - T_C), \quad (2.5)$$

где α_K – коэффициент теплопередачи конвекцией, Вт/(м²·К); S_T – площадь теплоотводящей поверхности, м²; T_T , T_C – температуры теплоотводящей поверхности и охлаждающей среды, К.

В общем случае α_K является функцией многих параметров охлаждающей среды:

$$\alpha_K = f(T_T, T_C, \beta, \lambda, C_p, \nu, \rho, a, \Phi),$$

где β – коэффициент объемного расширения среды (жидкости или газа), λ – коэффициент теплопроводности среды; C_p – удельная теплоемкость среды при определенном давлении; ρ – плотность среды; ν – коэффициент кинематической вязкости среды; $a = \lambda / C_p \rho$ – температуропроводность среды; Φ – совокупность параметров, характеризующих форму и поверхность тела.

Зависимость физических констант среды от температур T_T и T_C и бесконечное разнообразие форм поверхности нагретых тел исключают возможность получения табличных значений конвективных коэффициентов теплопередачи как теоретическими, так и экспериментальными методами. Поэтому для определения α_K используются условия подобия физических явлений при эксперименте и в естественных условиях (теория подобия).

Согласно этой теории сложные процессы характеризуются не отдельными частными параметрами, а обобщенными, представляющими собой безразмерные комплексы размерных физических величин. Если значения обобщенных параметров находятся в определенном диапазоне величин, то процессы (явления) считаются подобными.

Математическую связь между этим множеством физических и геометрических параметров реализуют в виде безразмерных комплексов (критериев): Нуссельта (Nu); Грасгофа (Gr); Рейнольдса (Re); Прандтля (Pr); Био (Bi); Фурье (Fo); Пекле (Pe), составленных из величин, существенных для данного процесса.

В теории теплообмена конвекцией используются три обобщенных параметра (критерия), каждый из которых выражается через определенное количество физических параметров среды и имеет следующий физический смысл:

$$\text{Нуссельта } Nu = \frac{\alpha_K L}{\lambda} \quad (2.6)$$

характеризует соотношение интенсивностей конвективного теплообмена и теплопроводности в пристеночном слое жидкой или газообразной среды;

$$\text{Грасгофа } Gr = \beta g \frac{L^3}{\nu^2} (T_T - T_C) \quad (2.7)$$

характеризует соотношение подъемной и вязкой сил;

$$\text{Прандтля } Pr = \frac{\nu}{a} \quad (2.8)$$

характеризует физические свойства среды, где L – определяющий размер элемента конструкции (длина обтекания, длина пластины или цилиндра), м; λ , β , ν , a – соответственно коэффициенты теплопроводности, объемного расширения (жидкости или газа), кинематической вязкости, температуропроводности; g – ускорение свободного падения.

Расчет естественного конвекционного охлаждения производят на основе критериального уравнения:

$$Nu = m(GrPr)^n, \quad (2.9)$$

где m и n – эмпирические коэффициенты, зависящие от режима перемещения охлаждающей среды (табл. 2.2).

С увеличением n поток становится менее направленным и более интенсивным и передача тепла увеличивается. Интенсивность теплопередачи в значительной степени зависит от температуры поверхности тела, физических свойств среды и в меньшей степени – от объема и формы тела.

Таблица 2.2

Режимы перемещения охлаждающей среды

$GrPr$	m	n	Режим движения газа (жидкости)
$\leq 10^{-3}$	0,5	0	Пленочный режим
$10^{-3} - 5 \cdot 10^2$	1,18	1/8	Ламинарный режим
$5 \cdot 10^2 - 2 \cdot 10^7$	0,54	1/4	Переходный режим
$2 \cdot 10^7 - 10^{13}$	0,135	1/3	Вихревой (турбулентный) режим

Пленочный режим характеризуется наличием у поверхности тела почти неподвижной пленки нагретого газа. Интенсивность теплообмена очень мала, процесс теплообмена обусловлен в основном теплопроводностью. Этот режим движения может иметь место у тел с плавными очертаниями.

Ламинарный режим характеризуется спокойным движением частиц охлаждающей среды параллельно друг другу. Интенсивность теплообмена невелика. Режим типичен для среды, омывающей тонкие длинные проводники или другие элементы, имеющие поперечные размеры много меньше длины. Для цилиндров неограниченной длины коэффициент теплопередачи конвекцией

$$\alpha_K = A_1 \frac{(T_T - T_C)^{1/8}}{L_{on}^5}, \quad (2.10)$$

где A_1 – коэффициент, учитывающий физические параметры охлаждающей среды (табл. 2.3); L_{on} – определяющий геометрический параметр (для проводников круглого сечения и цилиндров правильной формы $L_{on} = D$, для элементов с некруглым поперечным сечением $L_{on} = 4S_n / L_n$; D – диаметр цилиндра, м; S_n – площадь поперечного сечения; L_n – периметр сечения, м).

Переходный режим от ламинарного к турбулентному имеет место при охлаждении плоских и цилиндрических поверхностей.

Переходный режим сохраняется при выполнении неравенства

$$T_T - T_C \leq (0,84 / L_{on})^3. \quad (2.11)$$

Интенсивность теплообмена возрастает по сравнению с ламинарным режимом:

$$\alpha_K = K_{op} A_2 \left(\frac{T_T - T_C}{L_{on}} \right)^{1/4}, \quad (2.12)$$

где K_{op} – коэффициент ориентации, зависящий от положения тела в пространстве; A_2 – коэффициент из табл.2.3.

Таблица 2.3

Коэфф ициент	Вид охл. среды	Значения теплофизических коэффициентов при следующих температурах T_{on} , К									
		273	283	293	303	313	333	353	373	393	423
A_1	Воздух	0,291	-	0,295	-	0,300	0,306	0,310	0,315	0,320	-
	Вода	9,35	11,2	13,1	14,7	15,7	17,6	19,0	20,0	-	-
A_2	Воздух	1,44	1,40	1,38	1,36	1,34	1,31	1,29	1,27	1,26	1,245
	Вода	68	90	105	127	149	178	205	227	-	-
A_3	Воздух	1,69	1,65	1,61	1,57	1,53	1,45	1,39	1,33	-	-
	Вода	102	145	198	242	290	363	425	480	-	610

Примечание. Для коэффициента A_1 $T_{on} = T_C$, для A_2 $T_{on} = 0,5(T_T + T_C)$.

Для горизонтального цилиндра диаметром D имеем $L_{on} = D$, м; $K_{op} = 1$. Для вертикальной плоскости высотой h $L_{on} = h$, м; $K_{op} = 1$.

Для горизонтальной плоскости, обращенной нагретой стороной вверх, $L_{on} = b$, м; $K_{op} = 1,3$ и $K_{op} = 0,7$, для плоскости, обращенной нагретой стороной вниз, где b – размер меньшей стороны плоскости, м.

Турбулентный режим характеризуется большими скоростями протекания потока с завихрениями, что приводит к интенсивному перемешиванию между слоями жидкости или газа.

Коэффициент теплопередачи конвекцией

$$\alpha_K = K_{op} A_3 (T_T - T_C)^{1/3}, \quad (2.13)$$

где A_3 – коэффициент из табл. 4.3; $K_{op} = 1$ для цилиндрических и вертикальных поверхностей; $K_{op} = 1,3$ для горизонтальных поверхностей, расположенных нагретой стороной вверх; $K_{op} = 0,7$ для горизонтальных поверхностей, расположенных нагретой стороной вниз.

Передача тепла излучением

Процесс теплообмена излучением основан на способности твердых, жидких и газообразных тел излучать и поглощать тепловую энергию в виде электромагнитных волн.

Мощность, отдаваемая нагретой поверхностью за счет лучистой энергии, может быть определена по формуле, полученной на основании закона Стефана – Больцмана:

$$P_u = \varepsilon_n C_0 S \left[\left(\frac{T_T}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_C}{100} \right)^4 \right], \quad (2.14)$$

где P_u – излучаемая мощность, Вт; ε_n – приведенная степень черноты излучаемой поверхности; S – площадь изучаемой поверхности, м²; T_T , T_C – температуры излучаемой поверхности и окружающей среды, К; C_0 – коэффициент излучения абсолютно черного тела, $C_0 = 5,67$ Вт/(м²·К⁴).

Значения степени черноты некоторых материалов приведены в табл. 2.4.

Таблица 2.4
Степень черноты различных поверхностей

Материал и состояние поверхности	Температура, °С	Степень черноты
1. Алюминиевая фольга	100	0,09
2. Алюминий (полированная пластина)	200 – 600	0,04 – 0,06
3. Алюминий (сильно окислен)	35 – 500	0,2 – 0,31
4. Дюралюминий Д16	50 - 350	0,37 – 0,41
5. Краска алюминиевая	100	0,28
6. Краска бронзовая	100	0,51
7. Краска эмалевая	20 – 100	0,92
8. Лак черный матовый	40 – 100	0,96 – 0,98
9. Латунь прокатанная	22	0,06
10. Латунь тусклая	50 – 350	0,22
11. Медь (пластина после нагрева до 600°С)	200	0,57
12. Медь шабренная до блеска	22	0,072
13. Олово	100	0,07 – 0,08
14. Сталь окисленная	25	0,8 – 0,82
15. Сталь полированная	100	0,066
16. Цинк	25	0,23 – 0,27

2.2 Программа работы

1. Используя теоретический материал и программу *MatLAB*, разработать основные математические модели процесса теплообмена.

2. Провести исследования по программе ниже.

3. Найти плотность мощности $W_T = P_T/S$, отводимую от тела за счет теплопроводности при следующих условиях: температура входного сечения $T_1 = 333K$, температура выходного сечения $T_2 = 293K$; материал задается преподавателем в соответствии с табл. 2.1. Результаты расчета представить в виде таблицы.

Наименование материала	$\lambda_T, \text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$	T_1, K	T_2, K	$W_T = P_T/S, \text{Вт}/\text{м}^2$

4. Найти плотность мощности W_K , отводимую от тела за счет конвекции для переходного и турбулентного режимов движения воздуха. Температуры T_T и T_C задаются преподавателем. Результаты расчета представить в виде таблицы.

T_T, K	T_C, K	Плотность мощности при конвекции $W_K = P_K/S, Bm/m^2$					
		Переходный режим			Турбулентный режим		
		α_B	$\alpha_{Г1}$	$\alpha_{Г2}$	α_B	$\alpha_{Г1}$	$\alpha_{Г2}$

5. Найти плотность мощности $W_{И}$, отводимую от тела за счет излучения при следующих условиях: температура тела $T_T = 333K$, температура окружающей среды $T_C = 293K$; материал и состояние поверхности задаются преподавателем в соответствии с табл. 2.4. Результаты расчета представить в виде таблицы.

T_T, K	T_C, K	Материал и состояние поверхности	ε_n	$W_{И} = P_{И}/S, Bm/m^2$

6. Используя математическую модель, построить график зависимости количества отводимого тепла от характеристик охлажденного тела и охлаждающей среды.

7. Сделать выводы по эффективности отвода тепла в зависимости от характеристик охлаждаемого тела и охлаждающей среды.

Примечание. При расчетах считать, что тело имеет кубическую форму с размерами сторон $a = (10 + N) \cdot 10^{-3}$ м, где N – номер варианта.

Контрольные вопросы

1. Что понимают под тепловым режимом ЭВС?
2. Какой тепловой режим ЭВС считается нормальным?
3. Как можно увеличить КПД преобразования энергии устройства?

4. Законы передачи тепла теплопроводностью.
5. Что называют конвекцией?
6. От каких параметров зависит коэффициент теплопередачи конвекцией?
7. Обобщенные параметры теплообмена конвекцией.
8. Дайте характеристики режимов движения газа (жидкости) при конвекции.
9. Особенности передачи тепла излучением.

3. Лабораторная работа №3. Исследование методов охлаждения

3.1 Тепловая модель

Конструкция ЭВС в теплофизическом отношении представляет собой очень сложную систему с большим количеством источников тепла, с границами неправильной формы. Полную систему уравнений теплообмена для реальной аппаратуры часто невозможно решить аналитически.

Анализ теплового режима узлов и блоков ЭВС базируется на учете наиболее существенных черт конструкции данного узла или блока и протекающих в них физических процессов, т.е. основана на идеализации объекта. Такой идеализированный объект представляет собой тепловую модель, а математическое описание процесса переноса тепловой энергии – математическую модель. Тепловая модель узла или блока должна быть адекватна изучаемому явлению и реализуема математически.

При построении тепловой модели блока платы или пакет плат с радиоэлементами принимают за одно тело с изотермической поверхностью (нагретую зону), для которого и производится расчет теплового режима. Предполагается установление равновесия количества подводимой и отводимой тепловой энергии и независимость распределения температуры от времени.

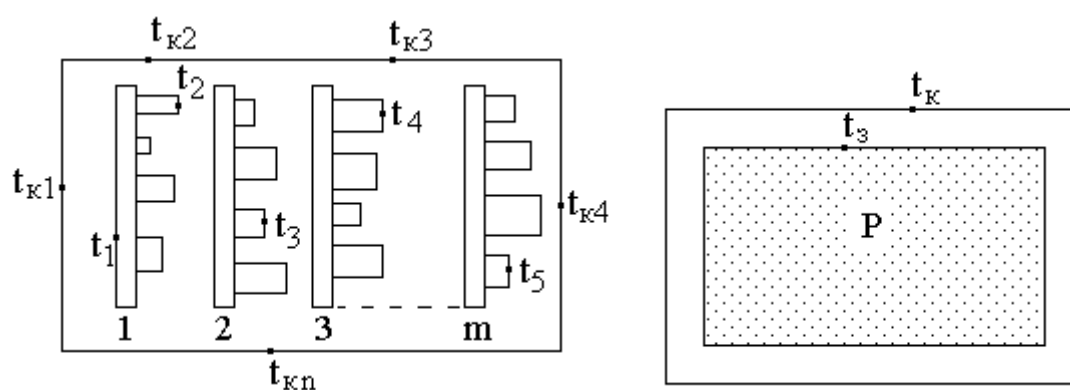
В зависимости от конкретной задачи исследования к изотермическим поверхностям конструкций относят поверхность корпуса со среднеповерхностной температурой t_k , поверхность нагретой зоны с температурой t_z , поверхность отдельной функциональной ячейки с температурой $t_{яi}$, поверхность отдельного радиоэлемента с температурой $t_{эi}$ и т.д.

Пример построения тепловой модели конструкции блока разъемного типа приведен на рис. 3.1.

Как следует из рисунка, среднеповерхностные температуры представляют собой среднеарифметические значения реальных температур в различных точках поверхности, т.е.

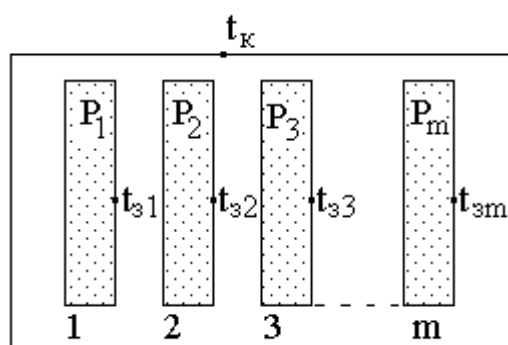
$$t_k = \sum_{i=1}^n t_{ki} / n; t_3 = \sum_{i=1}^s t_{3i} / S, \text{ и т.д.}$$

Детализация тепловой модели дает возможность довести решение до определения температуры отдельного радиоэлемента, однако при этом резко возрастает сложность задачи.



a)

б)



в)

Рис.3.1. Пример построения тепловой модели: *а* - схематическое изображение конструкции; *б* - модель для определения среднеповерхностной температуры нагретой зоны, где P - мощность, выделяемая в нагретой зоне; *в* - модель для определения среднеповерхностных температур функциональных ячеек,

где P_1, P_2, \dots, P_m – мощности, выделяемые в функциональных ячейках

Характеристика систем охлаждения

Под системой охлаждения понимают совокупность устройств и конструктивных элементов, используемых для уменьшения локальных и общих перегревов.

Системы охлаждения принято классифицировать по следующим признакам: по типу применяемого холодоносителя (воздух, жидкость, хладагент); по виду физического явления, используемого для обеспечения процесса охлаждения (конвекция, теплопроводность, испарение, излучение); по месту получения холода и подготовки холодоносителя (централизованное, автономное, местное, локальное); по способу регулирования (количеством подаваемого холодоносителя, изменением температуры подаваемого холодоносителя, количеством и температурой холодоносителя одновременно).

По типу применяемого холодоносителя наиболее широкое применение получило воздушное охлаждение вследствие доступности и экономической выгоды такого холодоносителя, как воздух в условиях естественной и принудительной конвекции.

В жидкостных системах охлаждения холодоносителем являются различные капельные жидкости, не доведенные до кипения, а передача теплоты от тепловыделяющих элементов происходит в основном конвекцией.

В жидкостно-испарительных системах используются легкокипящие жидкости и жидкости, доведенные до кипения.

В кондуктивных системах передача теплоты к ее стоку осуществляется в основном теплопроводностью по кондуктивным теплоотводам, являющимися конструктивными элементами конструкции ЭВС и системы охлаждения.

В комбинированных системах используются сочетания различных способов передачи теплоты.

Выбор способа охлаждения

Выбор способа обеспечения нормального теплового режима, а также системы охлаждения ЭВС, как правило, производится на ранних стадиях разработки. Выбранный способ охлаждения должен обеспечить нормальный тепловой режим конструкции ЭВС. Под нормальным тепловым режимом понимается выполнение следующих условий: температура всех деталей и узлов конструкции при заданных условиях эксплуатации не должна превышать предельно допустимых температур, указанных в ТУ на детали и узлы; температуры всех деталей и узлов конструкции должны быть таковы, что обеспечивается работа устройства с заданной точностью и надежностью.

Выбор системы охлаждения производится по графикам (рис.5.2), которые ограничивают области целесообразного применения того или иного способа охлаждения. Эти области построены по результатам обработки статистических данных о показателях тепловых режимов реальных конструкций, расчетов показателей тепловых режимов по тепловым моделям и экспериментальных данных, полученных на макетах.

Основным показателем, определяющим области целесообразного применения способа охлаждения (рис.3.2), является плотность теплового потока

$$q_s = P/S, \quad (3.2)$$

где P – мощность, выделяемая внутри объема, ограниченного поверхностью теплообмена, Вт; S – площадь поверхности теплообмена.

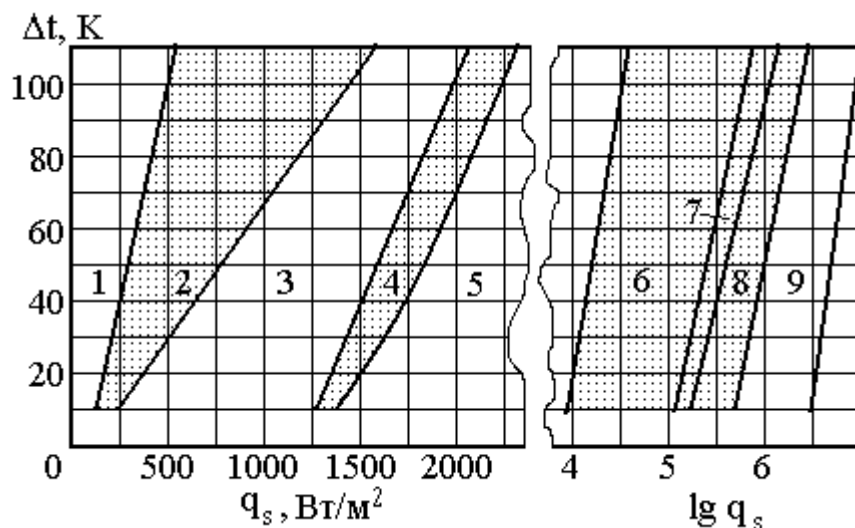


Рис.3.2. Диаграмма выбора способа охлаждения: 1 – естественное воздушное; 2 – естественное и принудительное воздушное; 3 – принудительное воздушное; 4 – принудительное воздушное и жидкостное; 5 – принудительное жидкостное; 6 – принудительное жидкостное и естественное испарительное; 7 – принудительное жидкостное, принудительное и естественное испарительное; 8 – естественное и принудительное испарительное; 9 – принудительное испарительное

Вторым показателем является допустимый перегрев в конструкции

$$\Delta t_{\text{дон}} = t_{\text{эmin}} - t_c, \quad (3.3)$$

где $t_{\text{эmin}}$ – допустимая рабочая температура наименее теплостойкого радиоэлемента; t_c – температура окружающей среды. Для естественного воздушного охлаждения $t_c = t_{c\text{max}}$, т.е. соответствует максимальной температуре окружающей среды, заданной в ТЗ. Для принудительного охлаждения $t_c = t_{\text{вх}}$, т.е. соответствует температуре воздуха (жидкости) на входе системы охлаждения.

Значения q_s и Δt являются координатами точки, попадающей в одну из областей (рис.3.2), каждой из которых соответствует один (незаштрихованная область) или несколько способов охлаждения (заштрихованная область). Для заштрихованных областей диаграммы, где возможно использование двух или трех различных

способов охлаждения, способ охлаждения уточняется на более поздних этапах конструирования.

3.2 Программа работы

1. Определить область целесообразного применения способа охлаждения (рис. 3.2) при следующих условиях:

– размеры нагретой зоны

$$L_1=150+10N; L_2=180+10N; L_3=220+10N, \text{ мм};$$

– допустимый перегрев

$$\Delta t_{\text{дон}}=40^\circ\text{C};$$

– мощность, выделяемая внутри нагретой зоны:

$$P = (228,557N - 228,357) \cdot 10^3, \text{ Вт};$$

где N – номер варианта, задаваемый преподавателем.

Результаты расчетов показателей, определяющих область целесообразного применения способа охлаждения, привести в виде таблицы.

Размеры нагретой зоны, м			$P, \text{ Вт}$	$\Delta t, ^\circ\text{C}$	$q_s, \text{ Вт/м}^2$
L_1	L_2	L_3			

2. Дать характеристику способа охлаждения.

Контрольные вопросы

1. Порядок построения тепловой модели блока.
2. Что понимают под системой охлаждения?
3. Классификация систем охлаждения.
4. Показатели, определяющие области целесообразного применения способа охлаждения.
5. Особенности определения способа охлаждения по диаграмме.