

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна

Должность: проректор по учебной работе

Дата подписания: 28.08.2023 16:38:01

Уникальный программный ключ:

0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1c11eabb0754943d14a4851fda56d089

## МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Юго-Западный государственный университет»  
(ЮЗГУ)

Кафедра космического приборостроения и систем связи

УТВЕРЖДАЮ  
Проректор по учебной работе  
О.Г. Локтионова  
« 8 » 08 2023 г.



## ИЗУЧЕНИЕ ЯВЛЕНИЯ СКИН – ЭФФЕКТА

Методические указания  
по выполнению лабораторной работы  
для студентов, обучающихся по направлению подготовки  
11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи»  
по дисциплине «Электромагнитные поля и волны»

Курск 2023

УДК 621.391

Составители: Д.С. Коптев

Рецензент:

Доктор технических наук, старший научный сотрудник,  
заведующий кафедрой космического приборостроения и систем связи  
*В. Г. Андронов*

**Изучение явления скин – эффекта:** методические указания по выполнению лабораторной работы / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Д.С. Коптев. Курск, 2023. – 13 с.

Методические указания по выполнению лабораторной работы содержат краткие теоретические сведения, задания для выполнения работы, примеры их выполнения в математическом приложении MathCAD и перечень вопросов для самопроверки изучаемого материала.

Методические указания соответствуют учебному плану по направлению подготовки 11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи», а также рабочей программе дисциплины «Электромагнитные поля и волны».

Предназначены для студентов, обучающихся по направлению подготовки 11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи» очной и заочной форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 08.08.2023. Формат 60x84/16.  
Усл. печ. л. 0,76. Уч.-изд. л. 0,68. Тираж 100 экз. Заказ 751. Бесплатно.  
Юго-Западный государственный университет.  
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

## 1 Цель работы

- изучить явления скин – эффекта и аномального скин – эффекта.

## 2 Краткие теоретические сведения

### 2.1 Скин – эффект

Если в однородном проводнике с постоянным поперечным сечением имеется постоянный ток, то плотность тока одинакова в разных точках сечения проводника. Иное наблюдается при переменном токе. В этом случае плотность тока оказывается неодинаковой по сечению; она наибольшая на поверхности и наименьшая на оси проводника. Ее неравномерность тем больше, чем толще проводник и чем больше частота переменного тока, а при очень больших частотах ток практически существует только в тонком поверхностном слое. Это явление получило название скин-эффект.

Указанное любопытное явление объясняется возникновением вихревого электрического поля электромагнитной индукции. Рассмотрим проводник с переменным током, и пусть в данный момент времени ток  $I$  имеет направление, указанное на рисунке 1. Этот ток создает внутри проводника магнитное поле, линии индукции которого лежат в плоскости перпендикулярной к оси проводника. Предположим, что ток  $I$  усиливается. Тогда возрастающая индукция  $\vec{B}$  вызовет появление вихревого электрического поля  $\vec{E}$  (рисунок 1, а), которое у поверхности проводника направлено также, как и ток  $I$ , а на оси проводника – противоположно току  $I$ . Это поле, следовательно, будет усиливать ток на поверхности и ослаблять его на оси.

Допустим теперь, что ток  $I$  уменьшается. В этом случае ослабевающая индукция  $\vec{B}$  вызовет электрическое поле  $\vec{E}$ , которое будет направлено противоположно по сравнению с первым случаем (рисунок 1, б), то есть будет у поверхности противоположно току, а на оси – совпадать с током. В обоих случаях, и при усилении, и при ослаблении тока, вихревое электрическое поле на оси проводника препятствует, а на поверхности способствует изменениям тока, а

значит, на оси проводника переменный ток слабее, а на поверхности сильнее.

Закон распределения плотности тока по сечению проводника особенно прост, если проводник имеет форму плоского слоя, толщина  $2D$  которого значительно меньше ширины (пластина). Расчет показывает, что это распределение зависит от величины,

$$d = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2} \omega \mu \mu_0 \gamma}}, \quad (1)$$

которая получила название глубины проникновения тока или толщины скин – эффекта. Здесь  $\mu$  - магнитная проницаемость вещества проводника,  $\mu_0$  - магнитная постоянная,  $\gamma$  - удельная электропроводность,  $\omega = 2 \pi \nu$  – круговая частота переменного тока.

Если  $d \gg D$ , то плотность тока практически постоянна по сечению проводника. Если  $d \ll D$  (сильный скин-эффект), то закон распределения приблизительно имеет вид,

$$j(y) = j_{\text{пов}} e^{-y/d}, \quad (2)$$

где  $j(y)$  - плотность тока на расстоянии  $y$  от поверхности проводника,  $j_{\text{пов}}$  – плотность тока у поверхности. Из формулы видно, что глубина проникновения  $d$  есть такое расстояние, на котором плотность тока уменьшается в  $e = 2.71$  раз.

Вследствие скин-эффекта электрический ток при больших частотах течет преимущественно сквозь поверхностный слой проводника. Это приводит к уменьшению действующего сечения проводника и, как следствие, к увеличению сопротивления проводника. При больших частотах или толстых проводах это увеличение сопротивления может быть значительным. Благодаря неравномерному распределению тока в проводнике изменяется не только сопротивление, но и индуктивность. Действительно, при постоянном токе магнитное поле возникает как во внешнем пространстве, так и внутри проводника. При наличии сильного скин-эффекта ток существует практически только в поверхностном слое, магнитного поля внутри проводника нет. Магнитная энергия становится меньше на величину энергии поля внутри проводника, следовательно, индуктивность проводника уменьшается.

Существование скин-эффекта всегда учитывают в технике быстропеременных токов. Так как такие токи практически не идут в глубине проводника, то линии для них собирают из полых труб. В

современной радиотехнике сверхвысоких частот (СВЧ) многие детали (волноводы, коаксиальные линии) покрывают тонким, хорошо проводящим слоем серебра, так как их сопротивление практически обусловлено только поверхностным слоем [1].

Исходя из уравнений Максвелла, получим уравнение, описывающее скин-эффект.

$$\text{Rot}\vec{B} = \mu_0\mu\vec{j} \quad (3)$$

$$\text{Rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \quad (4)$$

Подставляя в уравнение (3) выражение для  $\vec{j}$  по закону Ома

$$\vec{j} = \gamma\vec{E}, \quad (5)$$

И, дифференцируя обе части полученного уравнения по времени, находим

$$\text{Rot}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \mu\gamma\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \quad (6)$$

Или с учетом (4)

$$-\text{RotRot}\vec{E} = \mu\gamma\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \quad (7)$$

Поскольку

$$\text{RotRot}(\vec{E}) = \text{graddiv}(\vec{E}) - \nabla^2\vec{E}, \quad (8)$$

и  $\text{div}(\vec{E}) = 0$ , окончательно имеем

$$\nabla^2\vec{E} = \mu\gamma\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \quad (9)$$

Для упрощения решения этого уравнения предположим, что ток течет по однородном бесконечному проводнику занимающему полупространство  $y > 0$  вдоль оси  $X$  (рисунок 2). Поверхностью проводника является плоскость  $Y=0$ .

Таким образом.

$$j_x = j_x(y,t), j_y = j_z = 0, \quad (10)$$

$$E_x = E_x(y,t), E_y = E_z = 0, \quad (11)$$

Тогда, исходя из (9)

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu\gamma\mu_0\frac{\partial E_x}{\partial t}, \quad (12)$$

Поскольку все величины в (10) гармонически зависят от  $t$ , можно положить

$$E_x(y,t) = E_0(y)e^{i\omega t}, \quad (13)$$

После подстановки (13) в (12) и сокращения обеих частей уравнения на  $e^{i\omega t}$ , получаем уравнение для  $E_0(y)$ :

$$\frac{\partial^2 E_0}{\partial y^2} = i\omega\gamma\mu E_0, \quad (14)$$

Общее решение уравнения (14) таково:

$$E_0 = C_1 e^{-ky} + C_2 e^{ky}, \quad (15)$$

Учитывая, что

$$k = \sqrt{i\omega\mu\gamma} = \alpha(1+i), \alpha = \sqrt{\omega\mu\gamma/2}, \quad (16)$$

находим

$$E_0(y) = C_1 e^{-\alpha y} e^{-i\alpha y} + C_2 e^{\alpha y} e^{i\alpha y}, \quad (17)$$

При удалении от поверхности проводника второе слагаемое в (15) неограниченно возрастает, что является физически недопустимой ситуацией. Следовательно, в (15)  $C_2=0$  и в качестве физически приемлемого решения остается только первое слагаемое. Тогда решение задачи с учетом уравнения (13) имеет вид

$$E_x(x,t) = C_1 e^{-\alpha y} e^{i(\omega t - \alpha y)}, \quad (18)$$

Взяв действительную часть этого выражения, и перейдя с помощью соотношения  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$  к плотности тока, получим

$$j_x(y,t) = \gamma C_1 e^{-\alpha y} \cos(\omega t - \alpha y), \quad (19)$$

Принимая во внимание, что  $j_x(0,0) = j_{нов}$  – амплитуда плотности тока на поверхности проводника, приходим к следующему распределению объемной плотности тока в проводнике:

$$j_x(y,t) = j_{нов} e^{-\alpha y} \cos(\omega t - \alpha y), \quad (20)$$

## 2.2 Аномальный скин – эффект

Изложенный механизм возникновения скин-эффекта предполагает, что при своем движении электрон непрерывно теряет энергию на преодоление омического сопротивления проводника, в результате чего происходит выделение Джоулевой теплоты. Ясно, что такая идеализация возможна лишь в том случае, когда движение электронов происходит в областях, линейные размеры которых много больше средней длины свободного пробега электрона между столкновениями с атомами вещества. Поэтому изложенная выше

теория справедлива лишь при условии, что толщина скин-слоя много больше средней длины свободного движения электронов.

Такое соотношение между ними соблюдается в весьма широких пределах. Например, даже при частоте 10 ГГц и температуре 300 К толщина скин-слоя в меди составляет около 0.01 мкм. Однако при очень низкой температуре ситуация резко меняется, а, следовательно, увеличивается длина свободного пробега и уменьшается толщина скин-слоя. Например, при температуре жидкого гелия (4,2 К) проводимость чистой меди увеличивается приблизительно в  $10^4$  раз. Это приводит к увеличению средней длины свободного пробега электронов в  $10^4$  раз и уменьшению толщины скин-слоя в  $(10^4)^{1/2} = 10^2$  раз. Таким образом, длина свободного пробега и толщина скин-слоя становятся, соответственно, равными 100 и 0.01 мкм. При этих условиях механизм, приводящий к образованию скин-эффекта, уже не действует. Эффективная толщина слоя, в которой сосредоточен ток, изменяется. Такое явление называется аномальным скин-эффектом.

В условиях аномального скин-эффекта в пределах нормального скин-слоя в течение всего свободного пробега могут двигаться только те электроны, скорости которых почти параллельны поверхности проводника. Все другие электроны в процессе свободного движения успевают покинуть “нормальный” скин-слой и значительно изменить направление движения. Из-за этого уменьшается проводимость материала и изменяется эффективная “аномальная” толщина  $d^1$  скин-слоя. Для того чтобы ее приближенно оценить, можно принять, что доля электронов проводимости имеет порядок  $d^1/l$  от того числа в рамках «нормального» скин-эффекта ( $l$  – средняя длина свободного пробега электронов). Уменьшение этой доли приводит к уменьшению проводимости, учитываемой приближенно заменой в формулах  $\gamma \rightarrow \beta\gamma(d^1/l)$ , где  $\beta$  – числовые замены в формуле (1).

$$d^1 = \sqrt{\frac{2l}{\beta\gamma\mu\omega}}, \quad (21)$$

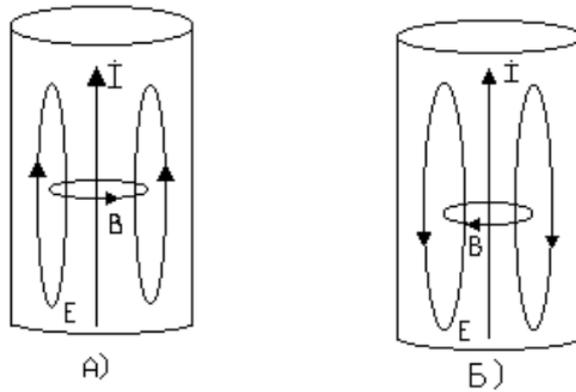


Рисунок 1 – Вытеснение переменного тока к поверхности проводника при скин – эффекте: а) ток  $I$  нарастает; б) ток  $I$  убывает

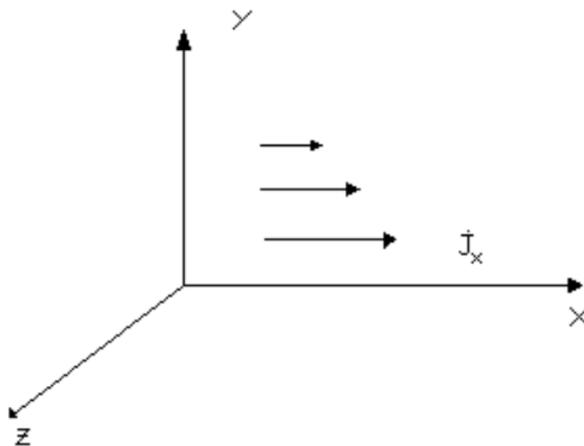


Рисунок 2 – Составляющие плотности тока и электрического поля

Изучим распределение переменного электрического тока в цилиндрическом проводе радиуса  $a$  (рисунок 1). Будем считать, что плотность тока и электрическое поле имеют лишь составляющие вдоль оси провода (ось  $Z$ ) и не зависят от координаты  $r$  (рисунок 2). Кроме того, будем в соответствии с симметрией задачи считать, что распределение тока и поля обладает симметрией вращения. Волновое уравнение, которому должна подчиняться соответствующая составляющая  $E_z$  внутри провода

$$\Delta E_z + K^2 E_z = 0, \quad (22)$$

из-за отсутствия зависимости от  $\varphi$  и  $Z$  сводится к уравнению

$$\frac{d^2 E_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dE_z}{dr} + K^2 E_z = 0, \quad (23)$$

Предполагая, что материал провода является хорошим проводником, не имеющим магнитных потерь, можем брать комплексное волновое число в проводнике в виде

$$K = (1 + i) / d, \quad (24)$$

где  $d$  – толщина скин-слоя.

В качестве решения уравнения (23) нужно взять функцию Бесселя  $J_0(Kr)$ , то есть положить

$$E_z = CJ_0(Kr). \quad (25)$$

Формула (25) уже дает картину распределения переменного тока в проводе. В самом деле, распределение тока (и поля) по поперечному сечению провода характеризуется функцией,

$$f(r) = E_z(r) / E_z(a) = j_z(r) / j_z(a), \quad (26)$$

обращающейся в единицу на поверхности провода, при  $r=a$ . Согласно формуле (25)

$$f(r) = J_0(Kr) / J_0(Ka) \quad (27)$$

и характер распределения тока по поперечному сечению провода определяется произведением  $Ka$ , то есть согласно формуле (24) отношением радиуса провода  $a$  к толщине скин-слоя  $d$ . Для данного проводника толщина скин-слоя  $d$  зависит от длины волны. Для постоянного тока, ( $\omega=0, \lambda=\infty$ ) имеем  $d=\infty$ , вследствие чего аргументы функций  $J_0(Kr)$  и  $J_0(Ka)$  равны нулю и  $f(r) \equiv 1$ . При увеличении частоты толщина скин-слоя  $d$  уменьшается и при небольших отношениях  $a/d$  абсолютная величина функции  $f(r)$  мало отличается от единицы, центральная часть проводника несет несколько меньшую плотность тока, чем его периферийная часть. При увеличении отношения  $a/d$  распределение тока становится все более неравномерным, и при больших значениях  $a/d$  абсолютная величина функции  $f(r)$  быстро спадает при удалении от поверхности провода. Если скин-эффект сильный, то функции Бесселя  $J_0(Ka)$  и  $J_0(Kr)$  (при  $r \approx a$ ) можно вычислить по формуле, пригодной и для комплексных  $x$ , при  $\text{Im}x \gg 1$

$$J_0(x) = e^{-1(x-\pi/4)} / \sqrt{2\pi x}, \quad (28)$$

так как

$$\cos(x - \pi/4) = \left[ e^{i(x-\pi/4)} + e^{-i(x-\pi/4)} \right] / 2 \approx e^{-i(x-\pi/4)} / 2. \quad (29)$$

Подставляя выражение (28) в формулу (27), получаем

$$f(r) = \sqrt{a/r} e^{iK(a-r)} \approx e^{iK(a-r)}, \quad (30)$$

поскольку функция  $f(r)$  отлична от нуля практически лишь при  $r \approx a$ . Отсюда

$$|f(r)| = e^{-(a-r)/d}, \quad (31)$$

при  $d \ll a$  ток сосредоточивается в тонком слое у поверхности провода.

Пользуясь формулой (25), нетрудно вычислить погонный импеданс провода  $Z_i$ . Для этого нужно вычислить полный ток  $J$ , соответствующий распределению поля в проводе по формуле (25). Так как плотность тока  $J_z$  связана с  $E_z$  соотношением

$$j_z = \sigma E_z, \quad (32)$$

то полный ток может быть найден в виде интеграла

$$J = \int j_z dS = 2\pi\sigma \int_0^a E_z r dr. \quad (33)$$

Пользуясь уравнением (23), можно написать

$$E_z = -\frac{1}{K^2} \left( \frac{d^2 E_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dE_z}{dr} \right), \quad (34)$$

$$rE_z = -\frac{1}{K^2} \left( r \frac{d^2 E_z}{dr^2} + \frac{dE_z}{dr} \right) = -\frac{1}{K^2} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dE_z}{dr} \right)$$

и, подставляя последнее выражение в формулу (33), получаем

$$J = -\frac{2\pi\sigma}{K^2} \int_0^a \frac{d}{dr} \left( r \frac{dE_z}{dr} \right) dr = -\frac{2\pi\sigma a}{K} C J_0'(Ka). \quad (35)$$

С помощью первого соотношения (34) можно также написать:

$$J = (2\pi\sigma a / K) C J_1(Ka). \quad (36)$$

Погонный импеданс  $Z_i$ , получается в виде

$$Z_i = \frac{E_z(a)}{J} = \frac{K}{2\pi\sigma a} \frac{J_0(Ka)}{J_1(Ka)}. \quad (37)$$

Вводя погонное сопротивление провода на постоянном токе

$$R_0 = 1 / \pi\sigma a^2, \quad (38)$$

можно придать формуле (37) следующий вид:

$$Z_i / R_0 = x J_0(x) / J_1(x), \quad x = Ka = (1-i)a / d. \quad (39)$$

Если скин-эффект выражен слабо, то есть, если  $a/d \ll 1$ , то вследствие малости аргумента  $x$  формула (39) принимает вид:

$$Z_i / R_0 = 1 - x^2 / 8 = 1 - k^2 a^2 \varepsilon / 8, \quad (40)$$

откуда, полагая,  $Z_i = R - i\omega L_i$ , получаем

$$R = R_0, \quad L_i = 1 / 2c^2, \quad (41)$$

при вещественном  $\mu \neq 1$  погонную внутреннюю индуктивность  $L_i$  нужно умножить на  $\mu$ .

Таким образом, при достаточно низких частотах, когда скин-эффект выражен слабо, активное сопротивление провода

практически равно его сопротивлению на постоянном токе. Его внутреннюю индуктивность, как легко показать, можно вычислить из элементарных соображений, принимая равномерное распределение постоянного тока внутри провода и вычисляя вызванное им внутри провода магнитное поле.

В случае сильного скин-эффекта, когда отношение  $a/d$  велико, для функции  $J_0(x)$  может быть применено приближенное выражение (28), а для функции  $J_1(x)$  – аналогичное выражение

$$J_1(x) = e^{-i(x-3\pi/4)} / \sqrt{2\pi x}, \quad (42)$$

откуда

$$\frac{Z_i}{R_0} = -i \frac{x}{2}, \quad Z_i = \frac{1-i}{2\pi a \sigma d} \quad (44)$$

При конечных значениях  $a/d$  погонный импеданс приходится вычислять с помощью формулы (39), пользуясь таблицами функций Бесселя от комплексного аргумента. Видно, что активное и реактивное сопротивления единицы длины провода при увеличении отношения  $a/d$ , т. е. при росте частоты, неограниченно возрастают, в то время как внутренняя индуктивность падает.

Действительно, из формулы (43) следует, что

$$\frac{R}{R_0} = \frac{\omega L_i}{R_0} = \frac{a}{2d}, \quad \frac{L_i}{L_0} = \frac{2d}{a} \quad \text{при} \quad \frac{a}{d} \rightarrow \infty$$

Уменьшение  $L_i$  с ростом частоты физически объясняется тем, что при уменьшении  $d$  ток и поле вытесняются из внутренней области провода, из-за чего находящаяся внутри провода магнитная энергия стремится к нулю. При этом нетрудно показать, что введенные  $R$  и  $L_i$  удовлетворяют соотношениям  $\frac{1}{2}R|J|^2 = \bar{P}_\varepsilon$ ,  $\frac{1}{4}L_i|J|^2 = \bar{W}_\mu$ , где  $\bar{P}_\varepsilon$  – средняя мощность электрических потерь,  $\bar{W}_\mu$ . Существенно, что как при переменном, так и при постоянном токе мощность поступает в данный участок цепи (отрезок проводника) не через поперечные сечения, где  $\sigma=0$ , а через его боковую поверхность, где  $\sigma<0$ , то есть из внешнего пространства. Во внешнее пространство мощность подается теми участками цепи, где приложены сторонние электродвижущие силы. Поэтому скин-эффект в цепи переменного тока и скин-эффект при падении волны на проводящее тело можно рассматривать с единой точки зрения.

Отметим, что выражение для  $Z_i$  было выведено в предположении, что переменный ток равномерно распределен по длине провода. Если же, например, вдоль провода бежит волна с волновым числом  $h$ , так что зависимость поля и тока от  $z$  определяется множителем  $e^{ihz}$ , то в каждом поперечном сечении  $z=const$  составляющая  $E_z$  будет удовлетворять не уравнению (23), а уравнению

$$\frac{d^2 E_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dE_z}{dr} + g^2 E_z = 0, \quad g = \sqrt{K^2 - h^2}, \quad (46)$$

В связи с этим в выражениях (27) и (37) нужно заменить  $K$  на  $g$ . Однако при выполнении условия  $|K| \gg |h|$  величины  $K$  и  $g$  практически совпадают. В большинстве случаев это неравенство удовлетворяется благодаря условию  $n = n' + n''$  при  $n'' \gg 1$ , где  $n'$  и  $n''$  - показатели преломления двух различных сред, так как  $|h| \sim k$ . Поэтому для волн, распространяющихся вдоль длинных линий, можно пользоваться погонным внутренним импедансом  $Z_i$ , вычисленным выше [1].

### 3 Задание на лабораторную работу

1) Бесконечный металлический цилиндр радиуса  $a$  с проводимостью  $\delta$  и магнитной проницаемостью  $\mu$  находится в постоянном и однородном, продольном относительно его оси, магнитном поле  $H_0$ . В некоторый момент времени внешнее поле выключается и поддерживается затем равным нулю.

Найти ход затухания со временем магнитного в цилиндре.

2) Внутри металлической трубы на расстоянии  $l$  от ее осевой линии течет прямолинейный ток  $J$ . Радиус трубы  $a$ , толщина стенки  $h \ll a$ , проводимость стенки  $\delta$  ( $\mu = 1$ ). Как ток  $J$ , так и расстояние  $l$  зависят от времени по произвольному закону, но так, что во все моменты времени  $l \ll a$ . Считая выполненными условия квазистационарности, определить силу  $f$  на единицу длины действующую на ток  $J$  со стороны вихревых токов, индуцируемых в цилиндрической оболочке при слабом скин-эффекте ( $h \ll \delta$ ).

3) Решить предыдущее задание для случая сильного скин-эффекта.

#### 4 Контрольные вопросы

1. Что такое скин – эффект?
2. Как количественно оценивается величина скин-эффекта?
3. Написать (вывести) формулу, выражающую глубину скин-слоя для пластины.
4. Изобразить графически распределение плотности переменного тока в сечении проводника.
5. Что такое добротность резонансного контура? Как ее можно определить экспериментально?