МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра космического приборостроения и систем связи

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
________ О.Г. Локтионова
« 8 » 08 ________ 2023 г.

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ОТ РАЗЛИЧНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАРЯДОВ

Методические указания
по выполнению лабораторной работы
для студентов, обучающихся по направлению подготовки
11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи»
по дисциплине «Электромагнитные поля и волны»

Курск 2023

УДК 621.391

Составители: Д.С. Коптев

Рецензент:

Доктор технических наук, старший научный сотрудник,
заведующий кафедрой космического приборостроения и систем связи
В. Г. Андронов

Электростатическое поле от различного распределения зарядов: методические указания по выполнению лабораторной работы / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Д.С. Коптев. Курск, 2023. – 9 с.

Методические указания по выполнению лабораторной работы содержат краткие теоретические сведения, задания для выполнения работы, примеры их выполнения в математическом приложении MathCAD и перечень вопросов для самопроверки изучаемого материала.

Методические указания соответствуют учебному плану по направлению подготовки 11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи», а также рабочей программе дисциплины «Электромагнитные поля и волны».

Предназначены для студентов, обучающихся по направлению подготовки 11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи» очной и заочной форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 08.08.2023. Формат 60x841/16.
Усл. печ. л. 0,52. Уч.-изд. л. 0,47. Тираж 100 экз. Заказ 746. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

1 Цель работы

- изучить электрическое поле, распространяемое от различных зарядов.

2 Краткие теоретические сведения
2.1 Поле точечного заряда

Точечным зарядом называется заряженное тело, размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстояниями от этого тела до других тел, несущих электрический заряд. С помощью крутильных весов Кулон измерил силу взаимодействия двух заряженных шариков в зависимости от величины зарядов на них и расстояния между ними и пришел к выводу, что сила взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов пропорциональна величине каждого из зарядов и обратно пропорциональна расстоянию между ними. Полученный закон называют законом Кулона:

$$\vec{F}_{21} = k\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}\vec{e}_{12} \tag{1}$$

Здесь $\vec{F}_{21}$ – сила, действующая на заряд q_2 со стороны заряда q_1, k – коэффициент пропорциональности, q_1 и q_2 – величины взаимодействующих зарядов, r – расстояние между ними, $\vec{e}_{12}$ – единичный вектор, имеющий направление от заряда q_1 к заряду q_2. Всякий заряд изменяет свойства окружающего его пространства - создает в нем электрическое поле. Из закона Кулона следует, что отношение силы, действующей на пробный заряд $q_{пр}$, к величине этого заряда, постоянно в данной точке. Эту векторную величину называют напряженностью электрического поля и для поля точечного заряда q она равна:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{e}_{12}$$

Направлен вектор $\vec{E}$ вдоль радиальной прямой, проходящей через заряд q и данную точку поля, от заряда, если он положителен и к заряду, если он отрицателен.

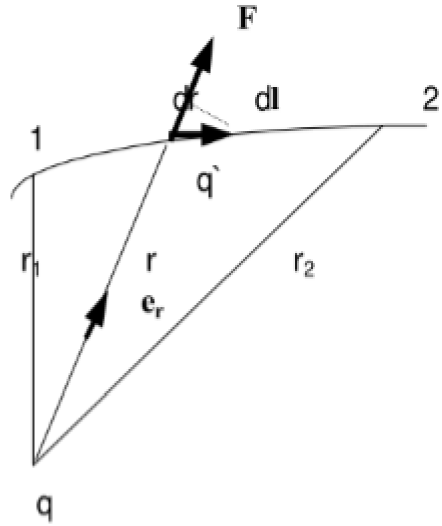

Рисунок 1 – Поле создаваемое точечным зарядом q

Рассмотрим поле, создаваемое неподвижным точечным зарядом q. В любой точке этого поля на точечный заряд *q* действует сила $\vec{F} = k\frac{qq'}{r^2}\vec{e}_r = F(r)\vec{e}_r$ где *F(r)* - модуль силы $\vec{F}, \vec{e}_r -$орт радиус вектора $\vec{r}$, определяющий положение заряда q' относительно q.

Данная сила является центральной, а центральное поле сил консервативно. Следовательно, работа, которая совершается силами поля над зарядом q` при перемещении его из одной точки пространства в другую, не зависит от траектории. Эта работа равна:

$$A_{12} = \int_1^2 F(r)\vec{e}_r d\vec{l} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{l}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{qq'}{r_1} - \frac{qq'}{r_2}\right)$$

Работа сил консервативного поля может быть представлена как убыль потенциальной энергии: $A_{12} = W_{p1} - W_{p2}$, и сопоставление этих формул приводит к следующему выражению для потенциальной энергии двух точечных зарядов:

$$W_p = \frac{l}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r} + \mathrm{co}nst$$

Значение константы в выражении обычно выбирается таким образом, чтобы при удалении на бесконечность потенциальная энергия обращалась в нуль [1]. Потенциалом назовем постоянное в данной точке поля отношение: $\frac{W}{q_{np}}$ или

$$\varphi = \frac{l}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \qquad (3)$$

2.2 Поле диполя

Электрическим диполем называется система двух одинаковых по величине разноименных точечных зарядов, расстояние между которыми l значительно меньше расстояния до тех точек, в которых определяется поле системы. Прямая, проходящая через оба заряда называется осью диполя (рисунок 2).

$$l = 2a$$

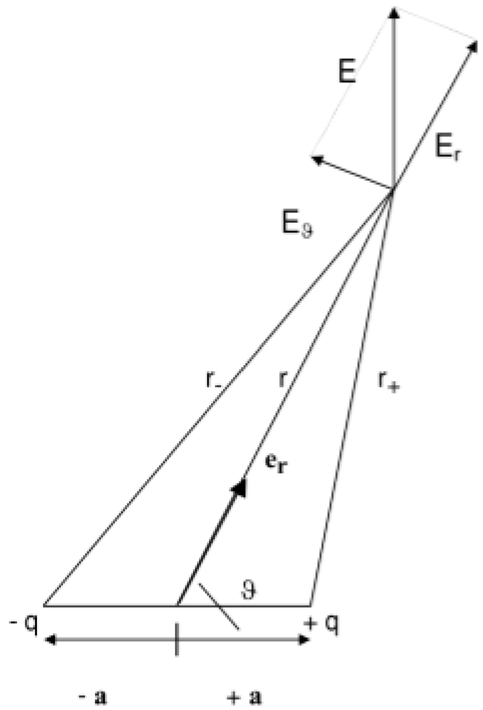

Рисунок 2 – Векторы напряженности поля электрического диполя

Ввиду малости a по сравнению с r можно приближенно положить, что:

$$r_+ = r - a\cos\vartheta$$

$$r_- = r + a\cos\vartheta$$

Потенциал в точке, определяемой радиус-вектором $\vec{r}$, равен:

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(r_- - r_+)}{r_- r_+}$$

Произведение $r_- r_+$ можно заменить на r^2 . Разность r_--r_+ согласно вышеописанным формулам равна $\vec{l}\vec{e}_r$ следовательно,

$\varphi(r) = \dfrac{q\vec{l}\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \dfrac{\vec{p}\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, где – это электрический момент диполя.

Вектор $\vec{p}$ направлен по оси диполя от отрицательного заряда к положительному. Видно, что поле диполя определяется его электрическим моментом. Чтобы найти напряженность поля диполя, вычислим проекции вектора $\vec{E}$ на два взаимно перпендикулярных направления:

$$E_r = -\frac{\delta\varphi}{\delta r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p\cos\vartheta}{r^3}$$

Вторую проекцию получим, взяв отношение приращения потенциала φ, получающегося при возрастании угла ϑ на $d\vartheta$, к расстоянию $rd\vartheta$, на которое перемещается при этом конец отрезка r. Таким образом: $E_\vartheta = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{p\sin\vartheta}{r^3}$.

Следовательно:

$$E^2 = E_r^2 + E_\vartheta^2 = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left(\frac{p}{r^3}\right)^2\left(4\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta\right) = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left(\frac{p}{r^3}\right)^2\left(1 + 3\cos^2\vartheta\right)$$

2.3 Поле бесконечной заряженной плоскости

Пусть поверхностная плотность заряда во всех точках плоскости одинакова и равна ρ. Напряженность поля в любой точке имеет направление, перпендикулярное к плоскости. Для нахождения поля заряженной плоскости используем теорему Гаусса: поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных в этой поверхности зарядов, деленной на ε_0.

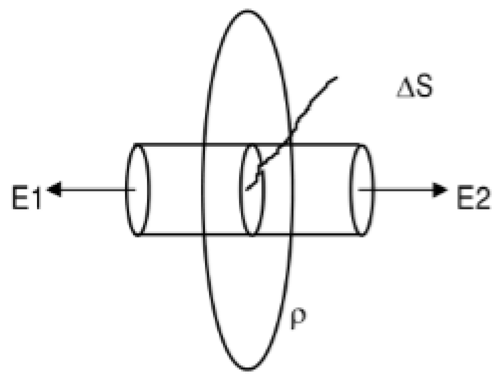

Рисунок 3 – Поток, проходящий через боковую цилиндрическую поверхность.

Представим себе мысленно цилиндрическую поверхность с образующими, перпендикулярными к плоскости, и основаниями величины ΔS, расположенными относительно плоскости симметрично (рисунок 3). В силу симметрии $E_1 = E_2 = E$.

Поток через боковую часть равен нулю. Следовательно, суммарный поток равен *2EΔS*. Внутри поверхности заключен заряд *ρΔS*. Согласно теореме Гаусса должно выполняться условие:
$2E\Delta S = \rho\Delta S / \varepsilon_0$, следовательно: $E = \rho / 2\varepsilon_0$

Полученный результат не зависит от длины цилиндра, значит на любых расстояниях от плоскости напряженность поля одинакова по величине. Если взять плоскость конечных размеров, то полученный результат будет справедлив только для тех точек, расстояние до которых от края пластинки значительно превышает расстояние до самой пластинки [1].

Пример №1. Решим задачу определения поля точечного заряда с помощью программы MathCAD:

Дано:

$N := 7 n := 0..N,\ m := 0..N,\ x_n := -3 + 0.3n,\ y_m := -3 + 0.4m,$

$$k := 9 \cdot 10^9,\ q := 105 \cdot 10^{-6},\ \phi(x, y) := \frac{k \cdot q}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ W_{n,m} := \phi(x_n, y_m)$$

Решение:

Построим эквипотенциальные поверхности (рисунок 4):

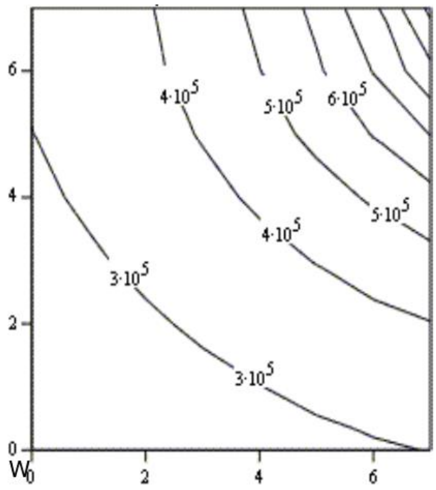

Рисунок 4 – Эквипотенциальная поверхность поля точечного заряда.

Построим векторное поле напряженности, используя, например, функции комплексных переменных:

$$Z_{n,m} := x_n + i \cdot y_m, \qquad E(Z) := \frac{k \cdot q \cdot Z}{\left(|Z|\right)^3}$$

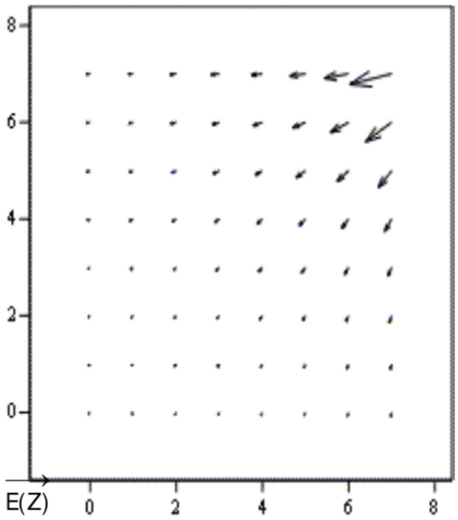

Рисунок 5 – Поле напряжённости точечного заряда

$$\phi := relax(a,b,c,d,e,f,U,0.9)$$

Для заданного распределения заряда в пространстве задачу вычисления потенциала в пространстве и построения эквипотенциальных поверхностей удобнее решать с помощью уравнения Пуассона: $\Delta\varphi = -\rho / \varepsilon\varepsilon_0$, где Δ – оператор Лапласа.

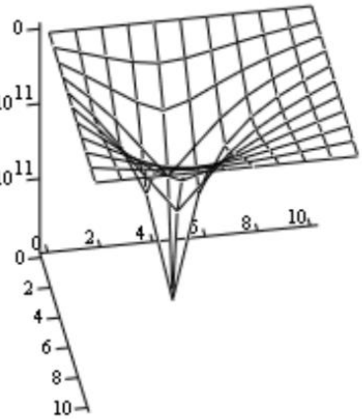

Рисунок 6 – Эквипотенциальная поверхность поля точечного заряда

Пример №2. Определим поле точечного заряда с помощью уравнения Пуассона.

Решение:

Для решения воспользуемся функцией relax.

$i := \sqrt{-1}$ $k := 9 \cdot 10^{9}$ $x := 0..10$ $y := 0..10$ $\rho_{x,y} := 0$ $\rho_{4,4} := 10$

$q := 1 \cdot 10^{-9}$ $\varepsilon_0 := 8.85 \cdot 10^{-12}$ $a_{x,y} := 1$ $b := a$ $c := a$

$d := a$ $E(s) := k \cdot \dfrac{q \cdot s}{(|s|)^3}$ $g_x := -4 + x$ $e := -4 \cdot a$

$U_{x.y} := 0$ $f := \rho / 2 \cdot \varepsilon_0$

Здесь a, b, c, d, e – коэффициенты в решаемом уравнении, f – функция распределения заряда (показывает в каких точках находятся заряды), U – функция распределения заряда (показывает, что в остальных точках заряда нет) $r_y := -4 + y;$ $s_{x,y} := g_x + i \cdot r_y$. Здесь g_x и r_y - координаты заряда, i - мнимая единица, $E(s)$ – выражение для напряженности поля точечного заряда [1].

3 Задание на лабораторную работу

1) Рассмотреть поле диполя, получить эквипотенциальные поверхности и линии напряженности.
2) Рассмотреть поле заряженной плоскости, получить эквипотенциальные поверхности и линии напряженности.
3) Рассмотреть поле заряженного кольца, получить эквипотенциальные поверхности и линии напряженности.
4) Рассмотреть поле трех точечных зарядов, получить эквипотенциальные поверхности и линии напряженности.
5) Рассмотреть поле заряженной нити, получить эквипотенциальные поверхности и линии напряженности.

4 Контрольные вопросы

1. Дайте определение вектора напряженности электрического поля.
2. Изобразите векторное поле напряженности, используя функции комплексных переменных.
3. Сформулируйте принцип суперпозиции электрических полей.
4. Перечислите свойства электростатического поля вблизи поверхности и внутри проводников.
5. Сформулируйте определение поля бесконечно заряженной плоскости.