

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна

Должность: проректор по учебной работе

Дата подписания: 02.09.2023

Уникальный программный ключ:

0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1c11eabb0754943d14a4851fda56d089

МИНОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра космического приборостроения и систем связи

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
О.Г. Локтионова
« 8 » 08 2023 г.

ИЗУЧЕНИЕ ОСНОВНЫХ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ И ПОЛОЖЕНИЙ О ДВИЖЕНИИ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Методические указания
по выполнению лабораторной работы
для студентов, обучающихся по направлению подготовки
11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи»
по дисциплине «Электромагнитные поля и волны»

Курск 2023

УДК 621.391

Составители: Д.С. Коптев

Рецензент:

Доктор технических наук, старший научный сотрудник,
заведующий кафедрой космического приборостроения и систем связи
В. Г. Андронов

Изучение основных теоретических закономерностей и положений о движении заряженных частиц в электромагнитном поле: методические указания по выполнению лабораторной работы / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Д.С. Коптев. Курск, 2023. – 15 с.

Методические указания по выполнению лабораторной работы содержат краткие теоретические сведения, задания для выполнения работы, примеры их выполнения в математическом приложении MathCAD и перечень вопросов для самопроверки изучаемого материала.

Методические указания соответствуют учебному плану по направлению подготовки 11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи», а также рабочей программе дисциплины «Электромагнитные поля и волны».

Предназначены для студентов, обучающихся по направлению подготовки 11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи» очной и заочной форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 08.08.2023. Формат 60x841/16.
Усл. печ. л. 0,87. Уч.-изд. л. 0,79. Тираж 100 экз. Заказ 747. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

1 Цель работы

- изучить основные теоретические закономерности и положения о движении заряженных частиц в электромагнитном поле.

2 Краткие теоретические сведения

В электрическом поле на частицу с зарядом q действует сила $F = qE$. Если движение не релятивистское, а поле однородно, то частица движется с постоянным ускорением $a = qE/m$. Такое движение вполне аналогично движению частицы в однородном постоянном гравитационном поле. Для релятивистских движений масса частицы m возрастает со скоростью v , а ускорение – убывает.

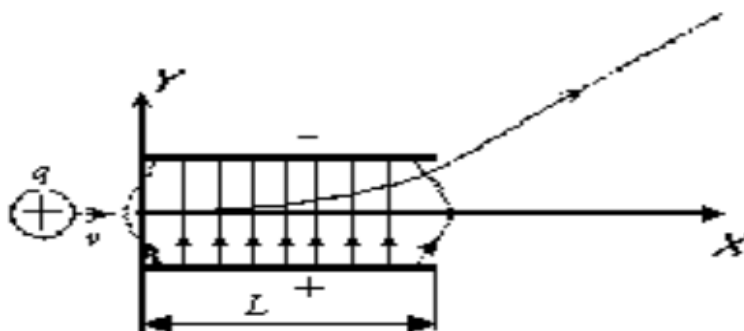


Рисунок 1 – Движение заряженной частицы через электрическое поле плоского конденсатора

Предположим, что заряженные частицы, двигавшиеся первоначально вдоль оси X (рисунок 1) со скоростью v_0 попадают в электрическое поле плоского конденсатора. Если зазор между пластинами мал по сравнению с их длиной L , то краевыми эффектами можно пренебречь и считать электрическое поле между пластинами однородным. Направляя ось Y параллельно полю, мы имеем: $E_x = E_z = 0, E_y = E$.

Движение частиц в этом случае происходит под действием постоянной силы и подобно движению горизонтально брошенного тела в поле тяжести.

Запишем уравнение движения

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \text{ где } \vec{p} = m_0 \cdot \vec{v}, \text{ в проекциях на оси:}$$

$$\begin{cases} \frac{d(m_0 \cdot x)}{dt} = 0 \\ \frac{d(m_0 \cdot y)}{dt} = qE \\ \frac{d(m_0 \cdot z)}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = \frac{qE}{m_0} \\ \ddot{z} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Для решения системы дифференциальных уравнений (1) необходимо задать начальные условия. Пусть в начальный момент времени координаты частицы были равными нулю, тогда $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. Так как в начальный момент времени скорость частицы была направлена вдоль оси X, то $y_0 = z_0 = 0$ и $x_0 = v$.

Реализуем поставленную задачу в математическом приложении MathCAD (пример № 1).

Если рассматривать движение заряженной частицы с релятивистской скоростью в однородном электрическом поле, то масса этой частицы m будет релятивистской

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

значит и импульс частицы будет так же релятивистским

$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Аналогично рассмотренному выше случаю для нерелятивистской частицы, запишем систему дифференциальных уравнений второго порядка, решение которой будет описывать траекторию движения релятивистской заряженной частицы в однородном электрическом поле:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = \frac{qE}{m_0} \left(1 - \frac{\dot{y}^2}{c^2}\right)^{3/2} \\ \ddot{z} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Пример № 1. Рассмотрим движение заряженной частицы в однородном электрическом поле с нерелятивистской скоростью.

Дано:

напряженность электрического поля $\rightarrow E := 10$

заряд частицы $\rightarrow q := 1.6 \cdot 10^{-19}$

масса частицы $\rightarrow m_0 := 1.7 \cdot 10^{-27}$

начальная скорость частицы $\rightarrow v_0 := 100$

Решение: Для решения системы дифференциальных уравнений воспользуемся функцией `rkfixed`, которая использует для поиска решения метод Рунге-Кутты четвертого порядка.

Сформируем вектор начальных условий:

$$u := \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $x(0)$ -координата частицы в начальный момент времени вдоль оси X;

$x'(0)$ -скорость частицы в начальный момент времени вдоль оси X;

$y(0)$ -координата частицы в начальный момент времени вдоль оси Y;

$y'(0)$ -скорость частицы в начальный момент времени вдоль оси Y;

$z(0)$ -координата частицы в начальный момент времени вдоль оси Z;

$z'(0)$ -скорость частицы в начальный момент времени вдоль оси Z.

Сформируем вектор первых и вторых производных:

$$D(t,u) := \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \\ u_3 \\ \frac{q \cdot E}{m_0} \\ u_5 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $x'(t)$ - первая производная x по t ;
 $x''(t)$ - вторая производная x по t ;
 $y'(t)$ первая производная y по t ;
 $y''(t)$ вторая производная y по t ;
 $z'(t)$ первая производная z по t ;
 $z''(t)$ вторая производная z по t .

При использовании функции `rkfixed` необходимо задать граничные точки интервала, на котором будем искать решение дифференциальных уравнений: $t_1 := 0, t_2 := 100$.

Также необходимо задать число точек, в которых ищется приближенное решение: $N := 100$.

Функция `rkfixed` возвращает матрицу, в которой первый столбец содержит точки, в которых должны быть найдены решения; остальные столбцы содержат значения решений и их производных.

$$Z := \text{refixed}(u, t_1, t_2, N, D)$$

	t	x(t)	x'(t)	y(t)	y'(t)	z(t)
	0	1	2	3	4	5
0	0	0	100	0	0	0
1	1	100	100	$4.706 \cdot 10^8$	$9.412 \cdot 10^8$	0
2	2	200	100	$1.882 \cdot 10^9$	$1.882 \cdot 10^9$	0
3	3	300	100	$4.235 \cdot 10^9$	$2.824 \cdot 10^9$	0
4	4	400	100	$7.529 \cdot 10^9$	$3.765 \cdot 10^9$	0
5	5	500	100	$1.176 \cdot 10^{10}$	$4.706 \cdot 10^9$	0
6	6	600	100	$1.694 \cdot 10^{10}$	$5.647 \cdot 10^9$	0
7	7	700	100	$2.306 \cdot 10^{10}$	$6.588 \cdot 10^9$	0
8	8	800	100	$3.012 \cdot 10^{10}$	$7.529 \cdot 10^9$	0
9	9	900	100	$3.812 \cdot 10^{10}$	$8.471 \cdot 10^9$	0
10	10	$1 \cdot 10^3$	100	$4.706 \cdot 10^{10}$	$9.412 \cdot 10^9$	0
11	11	$1.1 \cdot 10^3$	100	$5.694 \cdot 10^{10}$	$1.035 \cdot 10^{10}$	0
12	12	$1.2 \cdot 10^3$	100	$6.776 \cdot 10^{10}$	$1.129 \cdot 10^{10}$	0
13	13	$1.3 \cdot 10^3$	100	$7.953 \cdot 10^{10}$	$1.224 \cdot 10^{10}$	0
14	14	$1.4 \cdot 10^3$	100	$9.224 \cdot 10^{10}$	$1.318 \cdot 10^{10}$	0
15	15	$1.5 \cdot 10^3$	100	$1.059 \cdot 10^{11}$	$1.412 \cdot 10^{10}$	0

Рисунок 2 – Матрица решений

Построим график зависимости $y(x)$, так как движение происходит в плоскости $ХОУ$ [1].

$$x := Z^{(1)} \quad y := Z^{(3)}$$

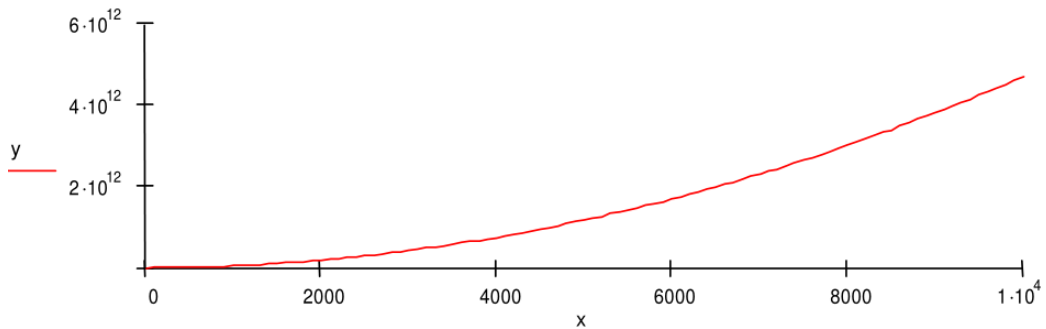


Рисунок 3 – Пример построения графика зависимости $y(x)$ в MathCAD

2.2 Движение заряженных частиц в магнитном поле

В постоянном магнитном поле на заряженную частицу действует сила $\vec{F}_m = q[\vec{v}\vec{B}]$. Эта сила перпендикулярна к скорости \vec{v} , а потому работы не производит. Она только искривляет траекторию, но не изменяет величину скорости частицы. Не меняется, следовательно, и масса частицы m .

Рассмотрим случай однородного магнитного поля. Если скорость частицы направлена вдоль поля B , то сила F_m обратится в нуль и частица будет двигаться прямолинейно с постоянной скоростью.

Если же частица движется перпендикулярно к магнитному полю, то ее скорость, оставаясь постоянной по величине, меняется по направлению. Сила $\vec{F}_m = q[\vec{v}\vec{B}]$ также постоянна по величине и нормальна к траектории частицы.

Отсюда следует, что траекторией частицы будет окружность, плоскость которой перпендикулярна к магнитному полю. Направление вращения частицы по окружности показано на рисунке (магнитное поле направлено к читателю).

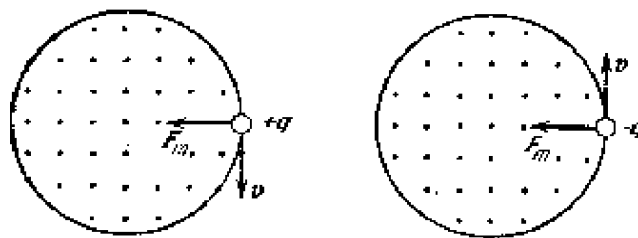


Рисунок 4 – Движение заряженной частицы в магнитном поле

Если заряд q положителен, то направления вектора B и угловой скорости вращения $\vec{\omega}$ противоположны. Если же заряд q отрицателен, то эти направления совпадают. Ускорение частицы направлено к центру окружности, по которой она вращается, и равно $\omega^2 \rho$, где ρ – радиус этой окружности.

Величина угловой скорости ω найдется из уравнения движения $m\omega^2 \rho = |q|Bv$. Так как $v = \omega\rho$ то отсюда получаем $\omega = |q|B/m$. Величина ω называется циклотронной частотой, а ρ – циклотронным радиусом.

Предположим, что заряженная частица двигается первоначально вдоль оси X со скоростью v_0 , а вектор B направлен вдоль оси Y (т.е. $B_x = B_z = 0, B_y = B$). Получим систему дифференциальных уравнений, решения которой будут описывать траекторию движения частицы.

$$\vec{F}_m = q[\vec{v}, \vec{B}] = q \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ 0 & B & 0 \end{vmatrix} = -\dot{z} B \vec{i} + \dot{x} B \vec{k} q$$

Импульс нерелятивистской частицы равен $\vec{p} = m_0 \cdot \vec{v}$, а так как $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$

$$\begin{cases} \frac{d(m_0 \cdot \dot{x})}{dt} = -B\dot{z}q \\ \frac{d(m_0 \cdot \dot{y})}{dt} = 0 \\ \frac{d(m_0 \cdot \dot{z})}{dt} = B\dot{x}q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -\frac{qB}{m_0} \dot{z} \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = \frac{qB}{m_0} \dot{x} \end{cases} \quad (3)$$

Таким образом, мы получили систему дифференциальных уравнений второго порядка (3).

Пусть в начальный момент времени координаты частицы были равными нулю, тогда $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. Так как в начальный момент времени скорость частицы была направлена вдоль оси X , то $\dot{y}_0 = \dot{z}_0 = 0$ и $\dot{x}_0 = v_0$.

Реализуем поставленную задачу в математическом приложении MathCAD (пример № 2).

Пример № 2. Рассмотрим движение заряженной частицы в однородном магнитном поле с нерелятивистской скоростью.

Дано:

вектор магнитной индукции	$\rightarrow B := 1$
заряд частицы	$\rightarrow q := 1.6$
масса частицы	$\rightarrow m_0 := 1$
начальная скорость частицы	$\rightarrow v_0 := 1$

Решение:

Для решения системы дифференциальных уравнений (смотри пример № 1) воспользуемся функцией `rkfixed`. Сформируем вектор начальных условий и вектор первых и вторых производных:

$$u := \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad D(t,u) := \begin{pmatrix} u_1 \\ -\frac{B \cdot q}{m_0} \cdot u_5 \\ u_3 \\ 0 \\ u_5 \\ \frac{B \cdot q}{m_0} \cdot u_1 \end{pmatrix}$$

Зададим граничные точки интервала, на котором ищется решение дифференциальных уравнений, и число точек, в которых ищется приближенное решение:

$$t_1 := 0, \quad t_2 := 10, \quad N := 100.$$

Получим матрицу решений и их производных, а также построим график зависимости $z(x)$, так как движение происходит в плоскости XOZ.

$$Z := rkfixed(u, t_1, t_2, N, D)$$

$$x := Z^{(1)} \quad y := Z^{(3)} \quad z := Z^{(5)}$$

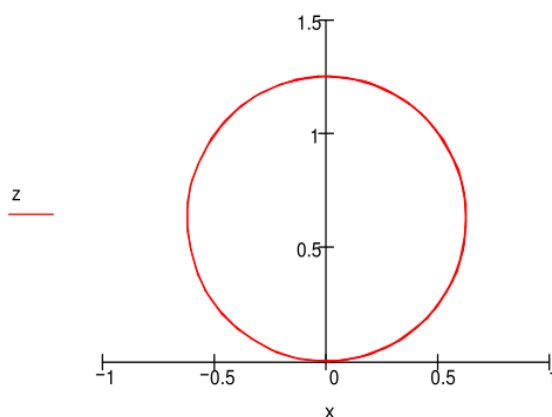


Рисунок 5 – Пример построения графика зависимости $z(x)$ в MathCAD

При рассмотрении общего случая, когда скорость \vec{v} направлена под углом к магнитному полю, ограничимся нерелятивистскими скоростями. Представим скорость \vec{v} в виде $\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$, где \vec{v}_{\parallel} – скорость вдоль поля, а v_{\perp} – перпендикулярная к нему. Движения с этими скоростями независимы. Первое есть равномерное прямолинейное движение вдоль поля со скоростью \vec{v}_{\parallel} , второе – равномерное вращение по окружности вокруг поля с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Радиус этой окружности равен $\rho = v_{\perp} / \omega$. В результате сложения обоих движений возникает движение по спирали, ось которой параллельна магнитному полю (рисунок 6).

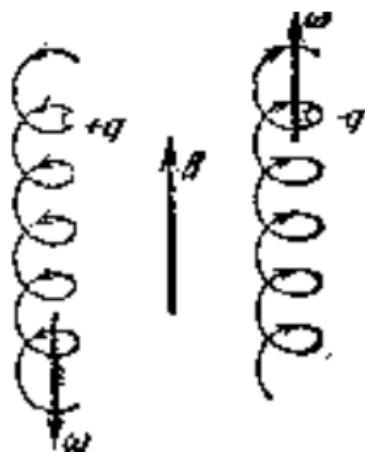


Рисунок 6 – Движение с угловой скоростью $\vec{\omega}$, по спирали, ось которой параллельна магнитному полю.

Этот случай также рассмотрим в MathCADe (пример № 3), где поле \vec{B} зададим как $B_x = B_z = 0, B_y = B$, а вектор скорости, например, как $v_x = v_y = v_0, v_z = 0$.

Пример № 3. Рассмотрим движение заряженной частицы в однородном магнитном поле с нерелятивистской скоростью, направленной под углом к вектору магнитной индукции.

Дано:

вектор магнитной индукции

$$\rightarrow B := 1$$

заряд частицы

$$\rightarrow q := 1.6$$

масса частицы

$$\rightarrow m_0 := 1$$

начальная скорость частицы

$$v_{0x} = 1, v_{0y} := 1, v_{0z} := 0.$$

Решение:

Сформируем вектор начальных условий и вектор первых и вторых производных:

$$u := \begin{pmatrix} 0 \\ v_{0x} \\ 0 \\ v_{0y} \\ 0 \\ v_{0z} \end{pmatrix} \quad D(t, u) := \begin{pmatrix} u_1 \\ -\frac{B \cdot q}{m_0} \cdot u_5 \\ u_3 \\ 0 \\ u_5 \\ \frac{B \cdot q}{m_0} \cdot u_1 \end{pmatrix}$$

Зададим граничные точки интервала, на котором ищется решение дифференциальных уравнений, и число точек, в которых ищется приближенное решение:

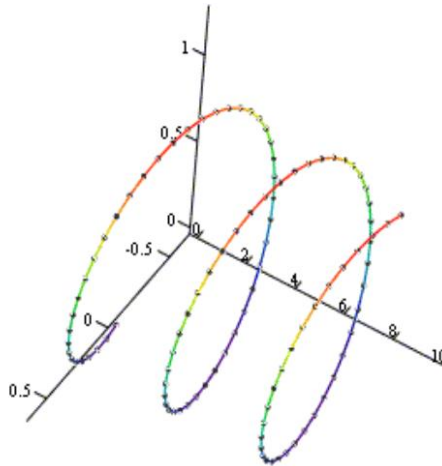
$$t_1 := 0, \quad t_2 := 10, \quad N := 100.$$

Получим матрицу решений и их производных.

$$Z := rkfixed(u, t_1, t_2, N, D)$$

Построим 3D точечный график, координаты которого заданы параметрически:

$$x := Z^{(1)}, \quad y := Z^{(3)}, \quad z := Z^{(5)}$$



(x, y, z)

Рисунок 7 – Пример построения 3D точечного графика в MathCAD

Представляет интерес так называемый циклотронный (диаманитный) резонанс.

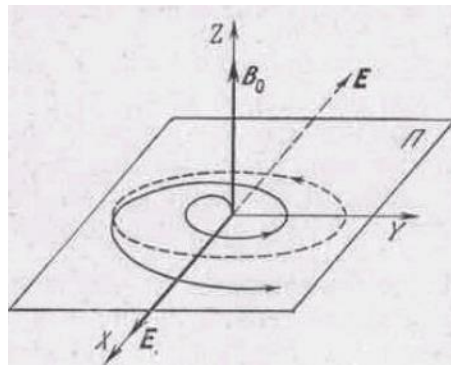


Рисунок 8 – Вращение электрона в магнитном поле, по плоскости Π , с циклической частотой ω_c .

Если поместить заряженную частицу в постоянное магнитное поле и одновременно подвергнуть ее воздействию переменного электрического поля, перпендикулярного к магнитному полю, то при этом происходит явление, аналогичное процессу ускорения ионов в циклотроне. Рассмотрим качественно поведение, например, свободного электрона в этих условиях. В постоянном магнитном поле (индукцию которого обозначим через \vec{B}_0) электрон движется по окружности, лежащей в плоскости Π (рисунок 8), перпендикулярной к магнитному полю, с циклотронной частотой обращения

$$\omega_c = (e/m)B_0.$$

Его круговое движение можно разложить на два взаимно перпендикулярных гармонических колебания в плоскости Π и рассматривать электрон в постоянном магнитном поле как два гармонических осциллятора, колеблющиеся вдоль осей X и Y с одинаковой частотой ω_c с и с постоянной разностью фаз, равной $\pi/2$.

Положим теперь, что на электрон вдоль оси OX действует еще электрическое поле \vec{E}_0 электромагнитной волны, лежащее в плоскости Π и изменяющееся с частотой ω . Тогда на каждый из указанных осцилляторов будет действовать периодическая внешняя сила с частотой ω , и поэтому они будут совершать вынужденные колебания с той же частотой ω . Но из механики известно, что при условии $\omega = \omega_c$ возникает явление резонанса, при котором амплитуда колебаний осциллятора и его энергия достигают наибольшего значения, а в случае отсутствия затухания (сил трения) неограниченно увеличиваются с течением времени. Поэтому свободный электрон при резонансе будет набирать энергию за счет энергии электромагнитной волны и двигаться по раскручивающейся траектории (рисунок 8). Описанное явление получило название циклотронного резонанса или, иначе, диамагнитного резонанса. Система дифференциальных уравнений для данного явления выводится аналогично выше рассмотренным случаям.

Реализация в MathCAD – пример № 4.

Пример № 4. Рассмотрим циклотронный (диамагнитный) резонанс.

Дано:

вектор магнитной индукции $\rightarrow B := 1$

заряд частицы $\rightarrow q := 1.6$

масса частицы $\rightarrow m_0 := 1$

начальная скорость частицы $\rightarrow v_0 := 1$

циклическая частота колебаний электрического поля
 $\rightarrow \omega := \frac{q \cdot B}{m_0}$

электрическое поле $\rightarrow E_0 := 1, E(t) := E_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$

Решение:

Сформируем вектор начальных условий и вектор первых и вторых производных. Зададим граничные точки интервала, на

котором ищется решение дифференциальных уравнений, и число точек, в которых ищется приближенное решение.

$$u := \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad D(t,u) := \begin{pmatrix} u_1 \\ \frac{B \cdot q}{m_0} \cdot u_3 + \frac{q}{m_0} \cdot e(t) \\ u_3 \\ -\frac{B \cdot q}{m_0} \cdot u_1 \\ u_5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$t_1 := 0, \quad t_2 := 20, \quad N := 100.$$

Получим матрицу решений и их производных, построим график зависимости $y(x)$ [1].

$$Z := rkfixed(u, t_1, t_2, N, D) \quad x := z^{(1)} \quad y := Z^{(3)}$$

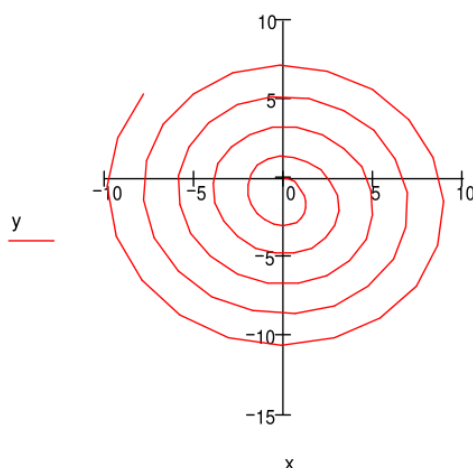


Рисунок 9 – Пример построения матрицы решений в MathCAD

3 Задание на лабораторную работу

3.1 В однородное постоянное электростатическое поле, направленное вдоль оси Y , влетает нерелятивистская заряженная частица под углом α к вектору напряженности электрического поля. Определить траекторию движения частицы.

3.2 В однородное постоянное электростатическое поле, направленное вдоль оси Z , влетает релятивистская заряженная частица вдоль оси Y . Определить траекторию движения частицы. Определить зависимость скорости частицы от времени.

3.3 В однородное постоянное магнитное поле влетают две нерелятивистские заряженные частицы с одинаковыми скоростями, направленными перпендикулярно к магнитному полю;

- а) массы частиц одинаковы, заряды различны,
- б) заряды частиц одинаковы, массы различны.

Определить траектории движения частиц в случаях а) и б).

3.4 Нерелятивистская заряженная частица с зарядом q и с массой m_0 пролетает через двумерное электростатическое поле с потенциалом (линза сильной фокусировки). В момент времени $t=0$ частица находится в точке с координатами $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, начальная скорость v_0 параллельна оси Z . Определить траекторию движения частицы.

3.5 Заряженная частица с зарядом q и с массой m_0 пролетает через магнитостатическое поле с векторным потенциалом $\vec{A} = k(y^2 - z^2)\vec{i} + k(x^2 - z^2)\vec{j} + k(x^2 - y^2)\vec{z}$, $k = const > 0$. В момент времени $t=0$ частица находится в точке с координатами $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, начальная скорость v_0 параллельна оси Y . Определить траекторию движения частицы.

3.6 Рассмотреть случай циклотронного резонанса для релятивистской частицы [1].

4 Контрольные вопросы

- 1) Дайте определение конденсатора и электрического заряда.
- 2) Перечислите все свойства заряда.
- 3) Сформулируйте свойство дискретности аддитивности заряда, свойство инвариантности заряда.
- 4) Напишите закон Кулона для силы взаимодействия двух неподвижных зарядов.
- 5) Дайте определение электростатического (электрического) поля, напряженности электрического поля, потенциала электрического поля.
- 6) Сформулируйте принцип суперпозиции для электрического поля.