МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра программной инженерии

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе
____________О.Г. Локтионова
«11» 03 __________2019 г.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Методические указания к лабораторным работам
по дисциплине «Дискретная математика»
направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.04 «Программная инженерия»

Курск 2019

УДК 519.6

Составитель Е.П. Кочура

Рецензент
Кандидат физико-математических наук, доцент А.Е. Кузько

Элементы теории множеств. Основы математической логики: методические указания к лабораторным работам по дисциплине «Дискретная математика» для студентов направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.04 «Программная инженерия» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост. Е.П. Кочура. Курск, 2019. 25 с.

Содержит краткие теоретические сведения по теме лабораторных работ, индивидуальные задания, пример выполнения лабораторной работы, вопросы для самопроверки, а также список рекомендуемой литературы.

Предназначено для студентов направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.04 «Программная инженерия».

Текст печатается в авторской редакции.

Подписано в печать 11.03.19. Формат 60х84 1/16.
Усл. печ. л. 1,5. Уч.-изд. л. 1,3. Тираж 100 экз. Заказ 201. Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет
305040, Курск, ул.50 лет Октября, 94.

Содержание

Краткие теоретические сведения

Элементы теории множеств

Понятие *множества* – одно из первичных в математике, поэтому для него нет строгого определения.

Множество – совокупность, набор каких-либо объектов. Предметы, составляющие множество, называются его *элементами*.

Множества обозначают большими буквами: A, B, …, а их элементы соответствующими маленькими буквами: a, b, … . В математике приняты следующие обозначения:

Z – множество целых чисел,

Q – множество рациональных чисел,

R – множество действительных чисел,

N – множество натуральных чисел.

То, что элемент a входит в множество A, записывается так: $a \in A$ (читается: a есть элемент множества A, или: a принадлежит A). Запись $a \notin A$ означает, что элемент a не принадлежит множеству A.

Множество считается *заданным*, если относительно любого объекта можно установить, является ли он элементом данного множества или нет. Если множество состоит из конечного числа элементов (*конечное множество)*, то оно может быть задано:

1. *перечислением* всех своих элементов, при этом порядок расположения элементов несущественен. Например, множество всех цифр: $A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
2. *указанием отличительных свойств*, которые выделяют элементы множества из элементов уже известного более широкого *основного* множества. Например, $A=\{x \mid x^2 - 6x + 8 = 0\}$ означает множество корней квадратного уравнения $x^2 - 6x + 8 = 0$.

Для задания *бесконечных множеств* используется только второй способ. Например, $\{x \in R \mid 0 < x < 2\}$ есть бесконечное множество действительных чисел, лежащих между 0 и 2.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается $\varnothing$.

Множество A есть *подмножество* множества B, если каждый элемент A является элементом B. В этом случае также говорят, что множество А *включено* во множество В или множество В *включает* множество А, обозначается $A \subseteq B$.

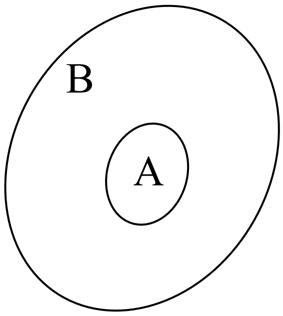

Рис. 1. Диаграмма Эйлера-Венна множества А, являющегося подмножеством множества В

Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то множества А и В называют *равными* и обозначают: А = В.

Множества и отношения множеств наглядно иллюстрируются с помощью диаграмм Эйлера-Венна (рис. 1).

Диаграмма Эйлера-Венна – это замкнутая линия, внутри которой расположены элементы данного множества, а снаружи – элементы, не принадлежащие этому множеству.

Если все рассматриваемые в ходе данного рассуждения множества являются подмножествами некоторого множества U, то это множество U называется *универсальным* для данного рассуждения. Универсальное множество изображают в виде прямоугольника, а его подмножества - в виде кругов, расположенных внутри прямоугольника (рис. 2).

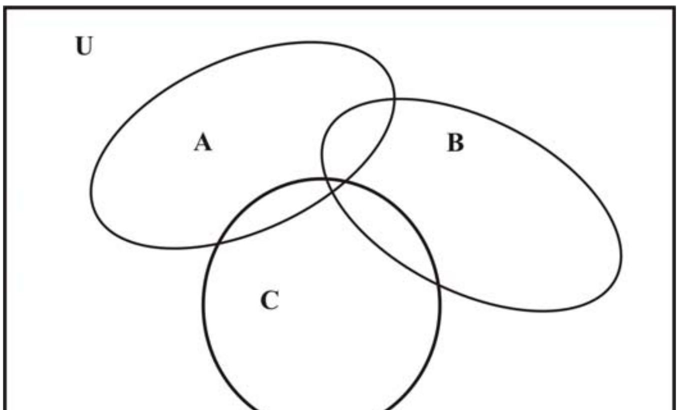

Рис. 2. Диаграмма Эйлера-Венна универсального множества U и его подмножеств А, В, С

Пусть множество А есть некоторое подмножество универсального множества U. Тогда множество $\overline{A}$, состоящее из всех элементов множества U, не принадлежащих множеству А, называется *дополнением* множества А.

При решении задач часто приходится иметь дело с множествами, элементами которых являются числа. Такие множества называют *числовыми*, они являются подмножествами множества действительных чисел R. Пусть a и b – действительные числа, a<b. Приведем названия, определения и обозначения числовых множеств, называемых *числовыми промежутками*, и изобразим их на координатной прямой (табл. 1).

Табл. 1. Числовые промежутки

Название	Неравенство, определяющее множество	Обозначение	Изображение
Отрезок от a до b (замкнутый промежуток)	$a \le x \le b$	$[a, b]$	
Интервал от a до b (открытый промежуток)	$a < x < b$	(a, b)	
Открытый слева промежуток от a до b	$a < x \le b$	$(a, b]$	
Открытый справа промежуток от a до b	$a \le x < b$	$[a, b)$	
Числовой луч от a до +∞	$x \ge a$	$[a, +\infty)$	
Открытый числовой луч от a до +∞	$x > a$	$(a, +\infty)$	
Числовой луч от -∞ до	$x \le a$	$(-\infty, a]$	

a			
Открытый числовой луч от $-\infty$ до а	$x < a$	$(-\infty, a)$	

Операции над множествами

Объединением С двух множеств А и В называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих множеству А или множеству В (рис. 3). Объединение множеств обозначается: $C = A \cup B$. Другими словами, $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$. В определении объединения множеств подразумевается неисключающее значение союза «или». Объединение часто называют *суммой* множеств. Объединение трех и более множеств определяется аналогично.

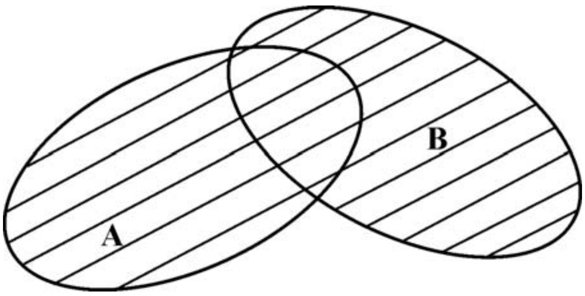

Рис. 3. Объединение двух множеств А и В

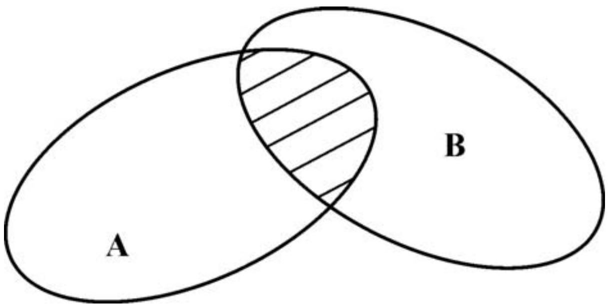

Рис. 4. Пересечение двух множеств А и В

Пересечением С двух множеств А и В называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих множеству А и множеству В одновременно: $C = A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$ (рис. 4). Иными словами, пересечение образовано всеми общими элементами данных множеств.

Разностью С двух множеств А и В называется множество, состоящее из всех элементов А, не входящих в В (рис. 5). $C = A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$. Таким образом, из множества А достаточно удалить общие элементы множеств A и B, то есть все элементы множества $A \cap B$, чтобы получить разность $A \backslash B$.

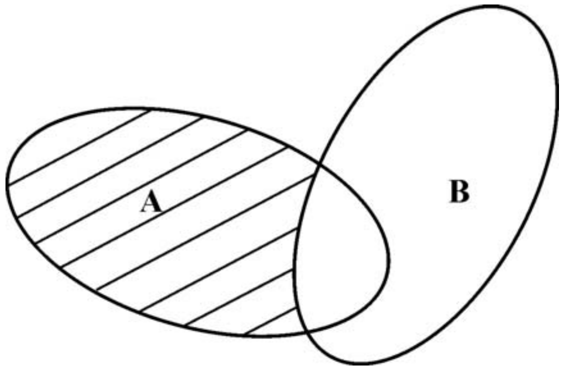

Рис. 5. Разность множеств $A \backslash B$

Свойства операций над множествами

В следующей теореме формулируются *основные свойства объединения и пересечения*:

Теорема 1. *Для любых подмножеств A, B и C универсального множества U справедливы следующие тождества:*

Ассоциативный закон

1. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$. 1'. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

Коммутативный закон

2. $A \cup B = B \cup A$. 2'. $A \cap B = B \cap A$.

Дистрибутивный закон

3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. 3'. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
4. $A \cup \varnothing = A$. 4'. $A \cap \varnothing = \varnothing$.
5. $A \cup \overline{A} = U$. 5'. $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

Справедливость каждого из этих тождеств можно проверить, показав, что множество, стоящее по одну сторону тождества, включено во множество, стоящее по другую сторону.

В следующей теореме формулируются дополнительные свойства операций над множествами.

Теорема 2. *Для любых подмножеств A и B универсального множества U справедливы следующие утверждения:*

6. Если для всех A имеет место $A \cup B = A$, то $B = \varnothing$. 6'. Если для всех A имеет место $A \cap B = A$, то $B = U$.

7, 7’. Если $A \cup B = U$ и $A \cap B = \varnothing$, то $B = \overline{A}$.

8, 8’. $\overline{\overline{A}} = A$.

9. $\overline{\varnothing} = U$. 9’. $\overline{U} = \varnothing$.

10. $A \cup A = A$. 10’. $A \cap A = A$.

11. $A \cup U = U$. 11’. $A \cap U = A$.

Закон поглощения

12. $A \cup (A \cap B) = A$. 12’. $A \cap (A \cup B) = A$.

Закон де Моргана

13. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. 13’. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Основы математической логики

Высказыванием называется любое повествовательное предложение, относительно которого известно, что оно либо истинно, либо ложно. Пример ложного высказывания: А: «сумма чисел 2 и 6 больше числа 8».

Высказывание, которое можно разложить на части, называется *сложным*, а неразложимое далее высказывание – *простым*. Например, высказывание С: «Функция $y = ax^2 + bx + c$ непрерывна и дифференцируема при всех значениях x» состоит из двух простых высказываний: А: «Функция $y = ax^2 + bx + c$ непрерывна при всех значениях x» и В: «Функция $y = ax^2 + bx + c$ дифференцируема при всех значениях x».

Подобно тому, как из заданных чисел можно получить другие числа с помощью операций сложения, вычитания, умножения и деления, так из заданных высказываний получаются новые с помощью операций *конъюнкции*, *дизъюнкции*, *импликации*, *эквивалентности*, *отрицания*.

Операции над высказываниями

Отрицанием высказывания А называют такое высказывание $\overline{A}$ (или $\neg A$), что $\overline{A}$ ложно, если А истинно и $\overline{A}$ истинно, если А ложно. Обозначение $\overline{A}$ читается: «Не А» или «Неверно, что А».

Следующая таблица показывает связь между высказываниями A и ¬ A:

A	¬ A
1	0
0	1

1 соответствует значению «истина», 0 – значению «ложь». Эти слова в логике называют *значениями истинности*. Таблица называется *таблицей истинности* ¬ A.

Конъюнкцией двух высказываний A и B называется такое высказывание A∧B (читается «A и B»), которое истинно тогда и только тогда, когда истинны оба составляющих его высказывания.

Это определение распространяется на любое конечное число высказываний.

Таблица истинности A∧B:

A	B	A∧B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Высказывание C: «Число 2 четное и простое» сложное, оно состоит из двух высказываний: A: «Число 2 четное» и B: «Число 2 простое», связанных союзом «и». Оба этих высказывания истинны. Истинным является и сложное высказывание, которое есть конъюнкция высказываний A и B.

Дизъюнкцией двух высказываний A и B называется высказывание A∨B (читается «A или B»), которое истинно тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из составляющих его высказываний.

Это определение распространяется на любое конечное число высказываний. Определение дизъюнкции двух высказываний может быть выражено следующей таблицей истинности:

A	B	A∨B
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Примером дизъюнкции двух высказываний является высказывание С: «Если последняя цифра числа равна 0 или 5, это число делится на 5» есть дизъюнкция высказываний А: «Если последняя цифра числа равна 0, то это число делится на 5» и В: «Если последняя цифра числа равна 5, то это число делится на 5».

Импликацией двух высказываний А и В называется такое высказывание А→В (читается «из А следует В» или «если А, то В»), которое ложно тогда и только тогда, когда А истинно, а В – ложно.

Таблица истинности для импликации имеет следующий вид:

A	B	A→B
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Высказывание А называют *условием* (или *посылкой*), а В – *заключением* (*следствием*). Существует немало синонимов для связки «если, …, то…», например:

- Из А следует В;
- А влечет за собой В;
- Как только А, то В;
- А достаточное условие В.

Пример импликации: С: «Если ΔАВС равносторонний, то ∠А = ∠В = ∠С». А: «ΔАВС равносторонний», В: «∠А = ∠В = ∠С».

Эквивалентностью двух высказываний А и В называется такое высказывание А↔В, которое истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания А и В либо истинны, либо оба – ложны.

Читается запись А↔В так: «А тогда и только тогда, когда В». Таблица истинности такова:

A	B	$A \leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Пример эквивалентности двух высказываний: C: «Для того, чтобы некоторый параллелограмм был ромбом, необходимо и достаточно, чтобы его диагонали были взаимно перпендикулярны». Здесь высказывание A: «Некоторый параллелограмм – ромб» и B: «Диагонали некоторого параллелограмма взаимно перпендикулярны».

В логике, как и в арифметике, операции делятся по старшинству. Это позволяет при записи сложных высказываний избегать большого количества скобок. *Порядок выполнения операций* таков: приоритет имеет отрицание, затем на одном уровне – дизъюнкция и конъюнкция, следующая связка – импликация и, наконец, самая последняя – эквивалентность.

Для сложных высказываний (*составных формул*) применяют также таблицы истинности, где перебирают все возможные значения истинности составляющих высказываний (*элементарных формул*, простых компонент, то есть таких высказываний, которые нельзя представить как результат действия логических операций). Такая таблица содержит 2^n строк, где n – количество простых компонент. Таблицу истинности удобно составлять, разбивая сложное высказывание на более простые и добавляя вспомогательные столбцы со значениями истинности этих составляющих.

Приведем таблицу истинности для высказывания $(A \lor B) \land (B \to \neg C)$:

A	B	C	$A \lor B$	$\neg C$	$B \to \neg C$	$(A \lor B) \land (B \to \neg C)$
1	1	1	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1

0	0	1	0	0	1	0
0	0	0	0	1	1	0

Высказывание содержит три простые компоненты A, B и C, поэтому в таблице $2^3 = 8$ строк.

Логическая эквивалентность. Свойства логических операций

Формула A *логически эквивалентна* формуле B, если их таблицы истинности совпадают. Это записывается: $A \Leftrightarrow B$.

Проверим, например, что $A \vee B \Leftrightarrow (A \to B) \to B$. Для этого составим таблицу истинности формулы $(A \to B) \to B$:

A	B	$A \to B$	$(A \to B) \to B$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	0	1	0

Видно, что построенная таблица совпадает с таблицей истинности дизъюнкции.

Логически эквивалентные высказывания неразличимы с точки зрения формальной логики, поскольку они при каждом наборе значений компонент принимают одинаковые значения истинности. В любом рассуждении высказывание можно заменить на логически эквивалентное.

В следующей теореме отражены алгебраические свойства дизъюнкции, конъюнкции и отрицания.

Теорема 3. Следующие пары формул логически эквивалентны:

1. $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$	1’. $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$
2. $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$	2’. $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$
3. $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (B \vee C)$	3’. $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (B \wedge C)$
4 и 4’. $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$	
5. $A \vee A \Leftrightarrow A$	5’. $A \wedge A \Leftrightarrow A$

6. $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$	6’. $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$
7. $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$	7’. $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

Задания

Вариант 0

1. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если $A = [2, 7)$, $B = (3, +\infty)$.
2. Упростите выражение: $A \cap (B \cap (\overline{A} \cup \overline{B}))$.
3. Докажите равенство: $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.
4. Каждая из 30 невест красива, воспитана или умна.

Воспитанных невест - 21, красивых - 18, умных – 15, красивых и воспитанных – 11, умных и воспитанных – 9, умных и красивых – 7. Сколько невест обладает всеми тремя из указанных качеств?

5. Составьте таблицу истинности следующей формулы алгебры высказываний: $(P \to Q) \vee (P \to (Q \wedge P))$.
6. Докажите равносильность: $\rceil A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow \rceil A \wedge B$.

Вариант 1

1. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если $A = (1, 4)$, $B = [0, 8]$.
2. Упростите выражение: $\overline{\overline{A} \cap B} \cup B$.
3. Докажите равенство: $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.
4. Из 220 студентов 163 играют в баскетбол, 175 – в футбол, 24 не играют в эти игры. Сколько человек одновременно играют в баскетбол и футбол?
5. Составьте таблицу истинности следующей формулы алгебры высказываний: $(A \vee B) \to (A \wedge B)$.
6. Докажите равносильность: $\overline{A \to B} \Leftrightarrow A \wedge \rceil B$.

Вариант 2

1. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если $A = (3, +\infty)$, $B = [1, 4)$.
2. Упростите выражение: $(A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) \cup \overline{B} \cup \overline{C}$.
3. Докажите равенство: $A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$.

4. В группе 30 студентов. Все, кроме двух, имеют оценки «5», «4» и «3». Число студентов, имеющих оценки «5» - двенадцать, «4» - четырнадцать, «3» - шестнадцать. Трое учатся лишь на «5» и на «3», трое – лишь на «5» и «4» и четверо лишь на «4» и на «3». Сколько человек имеет одновременно оценки «5», «4» и «3»?

5. Составьте таблицу истинности следующей формулы алгебры высказываний: $((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)$.

6. Докажите равносильность:
$A \wedge (A \vee C) \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

Вариант 3

1. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если $A = [2, 5]$, $B = (-\infty, 3)$.
2. Упростите выражение: $\overline{(A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})}$.
3. Докажите равенство: $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.
4. Из 64 студентов на вопрос, занимаются ли они в свободное время спортом, утвердительно ответили 40 человек; на вопрос, любят ли они слушать музыку, 30 человек ответили утвердительно, причем 21 студент занимаются спортом и любят слушать музыку. Сколько человек не увлекаются ни спортом, ни музыкой?
5. Составьте таблицу истинности следующей формулы алгебры высказываний: $(\neg A \vee \neg B) \wedge C \to (A \leftrightarrow B)$.
6. Докажите равносильность: $A \wedge A \Leftrightarrow A$.

Вариант 4

1. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если $A = [0, 7)$, $B = (-\infty, 2)$.
2. Упростите выражение:
$(A \cap B \cap C \cap \overline{D}) \cup (\overline{A} \cap C) \cup (\overline{B} \cap C) \cup (C \cap D)$.
3. Докажите равенство: $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.
4. Среди 35 туристов одним английским языком владеют 11 человек, английским и французским – 5 человек, 9 человек не владеют ни английским, ни французским. Сколько человек владеют только французским языком?
5. Составьте таблицу истинности следующей формулы алгебры высказываний: $(A \wedge (\neg C \to \neg B)) \leftrightarrow A$.

6. Докажите равносильность: $A \vee (B \wedge A) \Leftrightarrow A$.

Вариант 5

1. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если $A = (-3, 7)$, $B = [0, 10)$.
2. Упростите выражение: $\overline{A \cup B \cup C}$.
3. Докажите равенство: $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$.
4. Анкетирование, проведенное среди 57 студентов, показало, что в шахматы умеют играть 35 человек, в шашки – 40 человек, причем в обе игры умеют играть 21 человек. Сколько человек не умеют играть ни в шахматы, ни в шашки?
5. Составьте таблицу истинности следующей формулы алгебры высказываний: $(A \rightarrow \urcorner B) \wedge (\urcorner A \vee B)$.
6. Докажите равносильность: $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (B \vee C)$.

Вариант 6

1. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если $A = (3, 5]$, $B = (-\infty, 10)$.
2. Упростите выражение: $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$.
3. Докажите равенство: $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.
4. Из 25 студентов группы «отлично» по английскому языку по экзамену получили 10 человек, «отлично» по математике получили 14 человек. 7 студентов получили «отлично» по обоим предметам. Сколько студентов группы не имеют отличной оценки ни по математике, ни по английскому языку?
5. Составьте таблицу истинности следующей формулы алгебры высказываний: $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$.
6. Докажите равносильность: $(A \wedge B) \vee ((A \vee B) \wedge (\urcorner A \vee \urcorner B)) \Leftrightarrow A \vee B$.

Вариант 7

1. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если $A = [-2, 4)$, $B = (1, 6)$.
2. Упростите выражение: $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$.
3. Докажите равенство: $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

4. В олимпиаде по математике приняло участие 10 учеников класса, в олимпиаде по биологии – 7 человек, в олимпиаде по физике – 9 человек. Известно, что в олимпиадах по математике и биологии участвовало 4 ученика, в олимпиадах по математике и физике – 5 человек, во всех трех олимпиадах – 2 ученика. Сколько школьников участвовало в олимпиадах по физике и биологии, если всего участников олимпиад было 17 человек?
5. Составьте таблицу истинности следующей формулы алгебры высказываний: $(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (P \wedge Q)$.
6. Докажите равносильность: $\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$.

Вариант 8

1. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если $A = [1, 3]$, $B = [2, 10)$.
2. Упростите выражение: $\overline{A \cup B} \cup A$.
3. Докажите равенство: $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$.
4. В группе 30 студентов. Известно, что 18 человек имеют спортивный разряд по лыжам, а 16 – по плаванию. 10 студентов не имеют разряда ни по плаванию, ни по лыжам. Сколько студентов имеют спортивный разряд и по плаванию, и по лыжам?
5. Составьте таблицу истинности следующей формулы алгебры высказываний: $(P \wedge (Q \rightarrow P)) \vee \neg P$.
6. Докажите равносильность: $A \vee (\neg A \wedge B) \Leftrightarrow A \vee B$.

Вариант 9

1. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если $A = (3, 7)$, $B = (-\infty, 5)$.
2. Упростите выражение: $A \cup (\overline{A} \cap B)$.
3. Докажите равенство: $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$.
4. Множество M состоит из m лиц, владеющих хотя бы одним иностранным языком – английским, французским, немецким. Известно, что английским языком владеют 70 лиц, французским – 65, немецким – 50, английским и французским – 40, английским и немецким – 30, французским и немецким – 20, а всеми тремя языками – 5. Найти m.
5. Составьте таблицу истинности следующей формулы алгебры высказываний: $(P \wedge (Q \vee \neg P)) \wedge (\neg Q \rightarrow P) \vee Q$.

6. Докажите равносильность: $\rceil A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow \rceil A \vee B$.

Вариант 10

1. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если $A = [0, 5)$, $B = [2, +\infty)$.
2. Упростите выражение: $\overline{\overline{A} \cup B} \cup B$.
3. Докажите равенство: $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$.
4. В одной семье было много детей. 7 любили капусту, 6 – морковь, 5 – горох, 4 – капусту и морковь, 3 – капусту и горох, 2 – морковь и горох, 1 – все. Сколько детей в семье?
5. Составьте таблицу истинности следующей формулы алгебры высказываний: $\overline{P \to \overline{\overline{Q \wedge P}}} \to (P \vee R)$.
6. Докажите равносильность: $\rceil A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow (A \to B)$.

Вариант 11

1. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если $A = (-7, -3)$, $B = [-5, 0)$.
2. Упростите выражение: $(A \cup B) \cap (\overline{A \cup B})$.
3. Докажите равенство: $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.
4. В отчете об изучении иностранных языков студентами говорилось, что из 100 человек 5 изучают английский, немецкий и французский, 10 – английский и немецкий, 8 – французский и английский, 20 – немецкий и французский, 30 – английский, 23 – немецкий, 50 – французский. Тому, кто составил отчет, было указано на ошибки. Верно ли это?
5. Составьте таблицу истинности следующей формулы алгебры высказываний: $(P \wedge (Q \vee \rceil P)) \wedge ((\rceil Q \to P) \vee Q)$.
6. Докажите равносильность: $A \wedge (\rceil A \vee B) \Leftrightarrow (A \wedge B)$.

Пример выполнения

Вариант 0

1. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если $A = [2, 7)$, $B = (3, +\infty)$.

Решение.

Изобразим числовые множества на оси Ox (рис. 11).

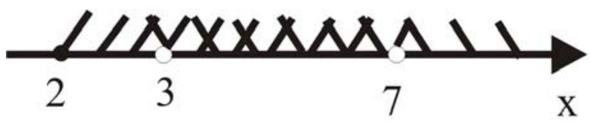

Рис. 11

Исходя из определений операций над множествами и рис. 11, получим:

$A \cup B = [2; +\infty)$,

$A \cap B = (3; 7)$,

$A \setminus B = [2; 3]$,

$B \setminus A = [7; +\infty)$.

2. Упростите выражение: $A \cap (B \cap (\overline{A} \cup \overline{B}))$.

Решение.

Применяя к исходному выражению ассоциативный закон, получим:

$$(A \cap (\overline{A} \cup \overline{B})) \cap B. \quad (1)$$

Применим к выражению $A \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$ дистрибутивный закон, вместо (1) получим:

$$((A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B})) \cap B. \quad (2)$$

Согласно свойству 5’ операций над множествами $A \cap \overline{A} = \varnothing$, тогда (2) перепишется в виде:

$$(\varnothing \cup (A \cap \overline{B})) \cap B. \quad (3)$$

Согласно свойству 4 объединение пустого множества с любым множеством есть само множество: $\varnothing \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap \overline{B}$, тогда вместо (3) получим:

$$(A \cap \overline{B}) \cap B. \quad (4)$$

Применим к выражению (4) ассоциативный закон и перепишем его в виде:

$$A \cap (\overline{B} \cap B). \tag{5}$$

$\overline{B} \cap B = \varnothing$ по свойству 5', тогда вместо (5) получим:

$$A \cap \varnothing. \tag{6}$$

По свойству 4' $A \cap \varnothing = \varnothing$.

Итак,

$$A \cap(B \cap (\overline{A} \cup \overline{B})) = \varnothing.$$

3. Докажите равенство: $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

Решение.

1 способ

Согласно определению множества A и B равны (A = B), если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. Следовательно, необходимо доказать, что:

1. $(A \cup B) \setminus C \subseteq (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$,
2. $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) \subseteq (A \cup B) \setminus C$.

Для доказательства вышеуказанных включений будем использовать определения операций над множествами.

1. Пусть $x \in (A \cup B) \setminus C \Leftrightarrow x \in (A \cup B)$ и $x \notin C \Leftrightarrow x \in A$ или $x \in B$ и $x \notin C \Leftrightarrow x \in A$ и $x \notin C$ или $x \in B$ и $x \notin C \Leftrightarrow x \in (A \setminus C)$ или $x \in (B \setminus C) \Leftrightarrow x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (A \cup B) \setminus C \subseteq (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

2. Пусть $x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \Leftrightarrow x \in (A \setminus C)$ или $x \in (B \setminus C) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in A$ и $x \notin C$ или $x \in B$ и $x \notin C \Leftrightarrow x \in A$ или $x \in B$ и $x \notin C \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in (A \cup B)$ и $x \notin C \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \setminus C \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \subseteq (A \cup B) \setminus C$.

Следовательно, равенство доказано.

2 способ

Для доказательства исходного равенства изобразим множества слева и справа от знака равенства с помощью диаграмм Эйлера-Венна (рис. 12, 13):

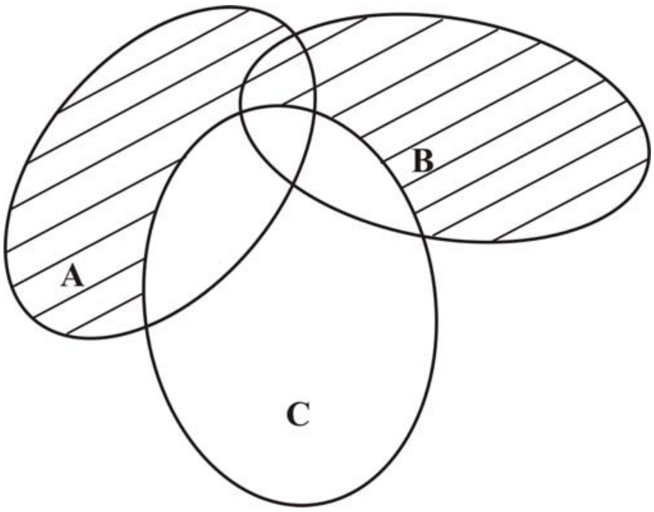

Рис. 12. $(A \cup B) \setminus C$

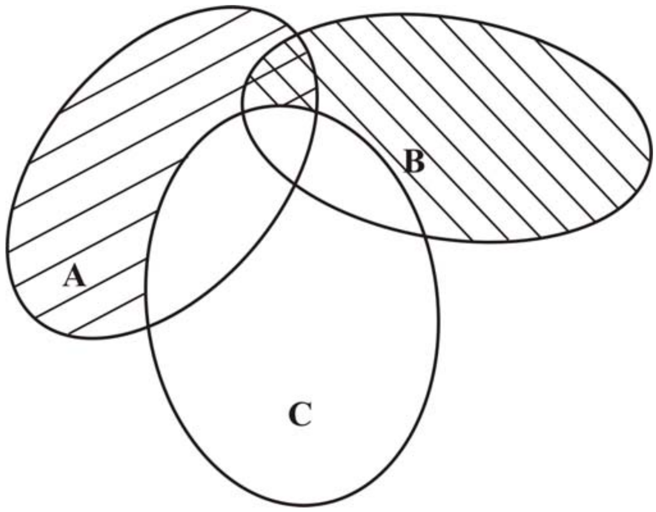

Рис. 13. $(A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

Так как диаграммы Эйлера-Венна множеств слева и справа от знака равенства совпадают, то исходное равенство доказано.

4. Каждая из 30 невест красива, воспитана или умна. Воспитанных невест - 21, красивых - 18, умных – 15, красивых и воспитанных – 11, умных и воспитанных – 9, умных и красивых – 7. Сколько невест обладает всеми тремя из указанных качеств?

Решение.

Пусть U – множество невест, $A = \{x \mid x$ – красивая невеста$\}$, $B = \{x \mid x$ – воспитанная невеста$\}$, $C = \{x \mid x$ – умная невеста$\}$.

Пусть D – некоторое конечное множество. Обозначим m(D) – число элементов в этом множестве.

Множества A, B и C – конечны. По условию:

$m(A) = 18$,

$m(B) = 21$,

$m(C) = 15$,

$m(A \cap B) = 11$,

$m(B \cap C) = 9$,

$m(A \cap C) = 7$,

$m(A \cup B \cup C) = 30$.

Требуется найти $x = m(A \cap B \cap C)$.

Изобразим указанные выше множества с помощью диаграмм Эйлера-Венна (рис. 14).

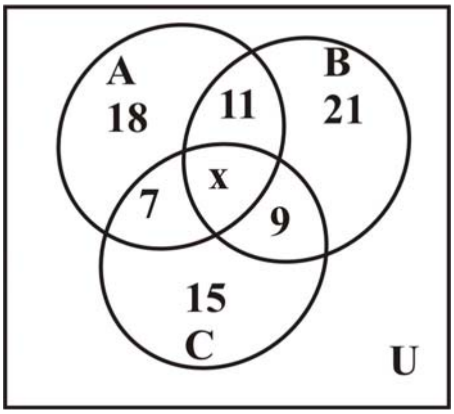

Рис. 14

Для решения задачи будем использовать следующий вывод теории множеств. Пусть A, B и C – некоторые конечные множества. Тогда для них справедливо равенство:

$$m(A\cup B\cup C) = m(A) + m(B) + m(C) - m(A\cap B) - m(B\cap C) - m(A\cap C) + m(A\cap B\cap C) \quad (7)$$

Для двух произвольных конечных множеств A и B справедливо равенство:

$$m(A\cup B) = m(A) + m(B) - m(A\cap B) \quad (8)$$

Выразим из формулы (7) $x = m(A\cap B\cap C)$:
$x = m(A\cup B\cup C) - m(A) - m(B) - m(C) + m(A\cap B) + m(B\cap C) + m(A\cap C)$.
Подставляя числовые значения в последнее выражение, получим:
$x = 30 - 18 - 21 - 15 + 11 + 9 + 7 = 3$.
Итак, 3 невесты одновременно умны, воспитаны и красивы.

5. Составьте таблицу истинности следующей формулы алгебры высказываний: $(P \to Q) \vee (P \to (Q \wedge P))$.

Решение.

Исходная формула содержит две элементарные формулы P и Q, поэтому в таблице истинности для нее будет $2^2 = 4$ строки.

P	Q	$P \to Q$	$Q \wedge P$	$P \to (Q \wedge P)$	$(P \to Q) \vee (P \to (Q \wedge P))$
0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1

6. Докажите равносильность: $\rceil A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow \rceil A \wedge B$.

Решение.

Две формулы алгебры высказываний равносильны (логически эквивалентны), если их таблицы истинности совпадают. Поэтому для доказательства равносильности составим таблицы истинности формул слева $F_1 = \urcorner A \wedge (A \vee B)$ и справа $F_2 = \urcorner A \wedge B$ от знака логической эквивалентности.

Формулы F_1 и F_2 содержат два простых высказывания A и B, поэтому их таблицы истинности будут содержать $2^2 = 4$ строки.

A	B	$\urcorner A$	$A \vee B$	$F_1 = \urcorner A \wedge (A \vee B)$	$F_2 = \urcorner A \wedge B$
0	0	1	0	**0**	**0**
0	1	1	1	**1**	**1**
1	0	0	1	**0**	**0**
1	1	0	1	**0**	**0**

Поскольку таблицы истинности F_1 и F_2 совпадают (выделенные столбцы), то равносильность доказана.

Контрольные вопросы

1. Понятие множества.
2. Числовые множества.
3. Конечные и бесконечные множества. Способы задания множеств.
4. Понятие подмножества. Свойства включений.
5. Равенство множеств.
6. Понятие универсального множества, пустого множества, дополнения множества.
7. Графическое изображение множеств: понятие диаграммы Эйлера-Венна.
8. Операции над множествами: объединение, пересечение, разность.
9. Свойства операций над множествами.
10. Понятие высказывания. Простые и сложные высказывания.
11. Понятие таблицы истинности, значений истинности.
12. Операции над высказываниями: отрицание.
13. Операции над высказываниями: конъюнкция, дизъюнкция.
14. Операции над высказываниями: импликация.
15. Операции над высказываниями: эквивалентность.
16. Порядок выполнения логических операций.
17. Понятие логически эквивалентных формул.
18. Свойства логических операций.
19. Понятие тавтологии (тождественно истинной формулы), противоречия.
20. Соответствие понятий теории множеств и математической логики.

Рекомендуемая литература

1. Бережной, В.В. Дискретная математика [Электронный ресурс]: учебное пособие / В.В. Бережной, А.В. Шапошников. - Ставрополь: СКФУ, 2016. - 199 с. – Режим доступа: biblioclub.ru.
2. Дискретная математика [Электронный ресурс]: учебное пособие / И.П. Болодурина, Т.М. Отрыванкина, О.С. Арапова, Т.А. Огурцова. - Оренбург: ОГУ, 2016. - Ч. 1. - 108 с. – Режим доступа: biblioclub.ru.
3. Зайцева, О.Н. Математические методы в приложениях. Дискретная математика [Электронный ресурс]: учебное пособие / О.Н. Зайцева, А.Н. Нуриев, П.В. Малов. - Казань: Издательство КНИТУ, 2014. - 173 с. . – Режим доступа: biblioclub.ru.
4. Зюзьков, В.М. Математическая логика и теория алгоритмов [Электронный ресурс]: учебное пособие / В.М. Зюзьков. - Томск: Эль Контент, 2015. - 236 с. – Режим доступа: biblioclub.ru.
5. Математическая логика и теория алгоритмов [Электронный ресурс]: учебное пособие / сост. А.Н. Макоха, А.В. Шапошников, В.В. Бережной р. - Ставрополь: СКФУ, 2017. - 418 с. – Режим доступа: biblioclub.ru.