МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра программной инженерии

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_______________ О.Г. Локтионова
«15» 12 _______________ 2017 г.

МНОЖЕСТВА

Методические указания к лабораторным работам
по дисциплине «Дискретная математика»
для студентов направлений подготовки
09.03.04 «Программная инженерия»,
09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»

Курск 2017

УДК 519.6

Составитель В.В. Свиридов

Рецензент:
кандидат технических наук, доцент кафедры программной инженерии ЮЗГУ *В.В. Апальков*

Множества: методические указания к лабораторным работам по дисциплине «Дискретная математика» для студентов направлений подготовки 09.03.04 «Программная инженерия», 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: В.В. Свиридов. Курск, 2017. 68 с.

Изложены основы теории множеств, операции над множествами, способы задания множеств. Рассмотрены примеры выполнения заданий. Приведены варианты заданий, контрольные вопросы к защите лабораторных работ.

Методические указания соответствуют требованиям рабочей программы по дисциплине «Дискретная математика».

Материал предназначен для студентов направлений подготовки 09.03.04 «Программная инженерия», 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» очной и заочной форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . Формат 60 х 84 1/16.
Усл. печ. л. . Уч.- изд. л. . Тираж 100 экз. Заказ . Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Содержание

Лабораторная работа 1. Основы теории множеств

1. Цель работы

Целью лабораторной работы является изучение базовых понятий теории множеств и операций над множествами.

2. Краткие теоретические положения

Определение. Множество – это собрание объектов любой природы.

Например, множество всех станций метро, множество всех букв алфавита, множество всех чисел, множество всех книг, которые когда-то были написаны и т.д.

Множества обозначаются заглавными буквами латинского алфавита: A, B, F, и т.д. Множество может быть задано двумя способами: перечислением своих элементов и характерным свойством.

Пример 2.1. *Задание множеств***.** Определим следующие множества: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, B = {«Иван», «Андрей»}, $C = \{5, 10, 15\}$. Данные множества заданы перечислением своих элементов.

Их можно задать также характерным свойством. $A =\{x$: x – целое число и $1 \le x \le 4\}$; $B = \{x$: x – имя одного из сыновей Петра}; $C = \{x$: x – целое число и x делится на 5 и $1 \le x \le 18\}$.

В последнем случае множество определяется как собрание тех и только тех объектов, которые удовлетворяют данному свойству. Про каждый объект x всегда можно сказать, принадлежит он данному множеству A или нет. В первом случае записывается $x \in A$ и читается как «x принадлежит A», то есть x является элементом множества A. Во втором случае используется запись $x \notin A$, которая, таким образом означает, что объект x не является элементом множества A.

Например, пусть $A = \{10, 15\}$ и $x = 10$. Тогда имеем $x \in A$. Если же $x = 12$, то выполняется соотношение $x \notin A$.

При выяснении вопроса принадлежит или нет данный объект некоторому множеству, может оказаться, что множество задано характерным свойством. Тогда нужно проверить, выполняется или нет свойство для данного объекта.

Пусть, например, $A = \{x$: x – четно и $1 < x < 12\}$, а $x = 17$. Тогда $x \notin A$, так как 17 – нечетно. Если $x = 18$, то также $x \notin A$, так как $x = 18 > 12$, хотя и x является четным числом. Наконец, при $x = 10$ будем иметь, что $x \in A$, так как все условия в данном случае выполняются.

Для удобства рассмотрений вводится одно специальное множество, называемое пустым и обозначаемое символом $\varnothing$. Оно не содержит ни одного элемента.

Между двумя множествами A и B может выполняться ***отношение включения*** $\subseteq$:

$A \subseteq B$ тогда и только тогда, когда каждый элемент множества A является в то же время элементом множества В, то есть. является истинной следующая импликация: $(x \in A) \Rightarrow (x \in B)$, а множество A называется ***подмножеством множества*** B.

Множества считаются ***равными***, если они состоят из одних и тех же элементов, то есть одновременно $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. В этом случае является истинной следующая равносильность $(x \in \mathrm{A}) \Leftrightarrow (x \in \mathrm{B})$.

Наряду со знаком включения «$\subseteq$» используется также знак «$\subset$» ***строгого вклю****чения*, который означает «включено, но не совпадает». Если $A \subset B$, то множество A называется ***собственным подмножеством множества*** B.

Пусть, например, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3\}$, $C = \{4, 5, 6\}$, $D = \{3, 2, 1\}$. Тогда $B \subseteq A$, причем, также и $B \subset A$. Утверждение, что $C \subseteq A$ является неверным. Выполняется отношение $D \subseteq A$, но отношение $D \subset A$ уже не выполняется.

Множество всех подмножеств множества X имеет специальное обозначение: $P(X)$ и называется ***экспонентой множества*** X, в связи с чем используется также обозначение 2^X.

Например, если $X = \{1, 2 ,3\}$, то $P(X) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\},\{1,2,3\}\}$.

Важнейшей характеристикой множества является его ***мощность***, то есть ***количество элементов*** в нем.

Мощность множества X обозначается одним из двух возможных способов: как $|X|$ или как $\mathrm{card}(X)$.

Например, для множества A из примера 1 имеем $|A| = 4$, что также можно записать в виде $\mathrm{card}(A) = 4$, для множества B имеем $|B| = 2$.

Интересным является тот факт, что для любого множества A выполняется равенство: $|P(A)| = 2^{|A|}$.

Например, для множества $A = \{1\ 2, 3\}$, для которого $|A| = 3$, множество $P(A)$ уже было выписано нами ранее и, легко видеть, что $|P(A)| = 8 = 2^3$.

Мощность пустого множества равна 0: $|\varnothing| = 0$.

Если $B \subseteq A$, то $|B| \le |A|$, если же включение строгое: $B \subset A$, то и неравенство строгое $|B| < |A|$.

Над множествами можно выполнять различные операции. К важнейшим из их относятся объединение, пересечение, дополнение, разность и симметрическая разность.

Определение. Пусть даны два множества A и B.

Их ***объединение A∪B*** определяется согласно правилу $A \cup B = \{x: x \in A$ или $x \in B\}$;

Пересечение A∩B **–** по правилу $A \cap B = \{x: x \in A$ и $x \in B\}$;

Разность A\B по правилу **–** $A \setminus B = \{x: x \in A$ и $x \notin B\}$;

Симметрическая разность A⊕B $= \{x: ((x \in A)$ и $(x \notin B))$ или: $((x \notin A)$ и $(x \in B))\}$.

Таким образом, объединение включает все элементы обоих множеств, пересечение – элементы, которые входят в оба множества одновременно, разность – элементы, входящие в первое множество и не входящие во второе, симметрическая разность – элементы, которые не входят одновременно в оба множества.

Пример 2.2. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5\}$. Тогда, в соответствии с данным определением будем иметь: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cap B = \{3, 4\}$, $A \setminus B = \{1, 2\}$, $A \oplus B = \{1, 2, 5\}$.

Чтобы определить четвертую важную операцию, ***дополнение*** нужно использовать понятие «***универсального множества*»,** то есть такого множества, которое содержит элементы всех множеств рассматриваемой задачи. Универсальное множество обозначается буквой E.

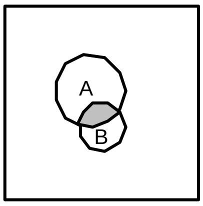
Определение. Дополнением данного множества A называется такое множество $\boldsymbol{A^d}$, которое состоит из всех элементов, то есть элементов универсального множества, не входящих в A.

Таким образом, имеем: $A^d = E \setminus A = \{x: x \in E$ и $x \notin A\}$.

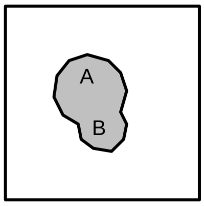
Пусть, например, изучается задача о свойствах натуральных чисел в пределах от 1 до 10. То есть универсум в данной задаче имеет вид $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Рассмотрим множество $A = \{2, 9, 10\}$. Тогда $A^d = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Операции над множествами становятся абсолютно понятными, если использовать аппарат так называемых ***диаграмм Венна***. При этом универсуму E соответствует геометрический квадрат, а различные его подмножества изображаются в виде различных фигур в квадрате. Операции над множествами изображаются следующим образом:

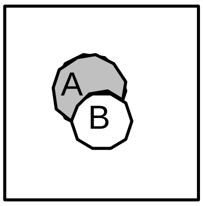
$A \cap B$



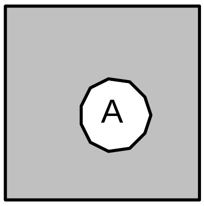
$A \cup B$



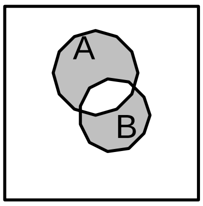
$A \backslash B$



A^d



A⊕B



К важнейшим операциям на множествах относится операция $A \times B$ ***декартового произведения*** двух множеств. По определению, это множество всех пар (a, b), где первая компонента берется из множества A, вторая – из множества B.

Пусть, например, $A = \{1, 2, f\}$, а $B = \{2, r\}$. Тогда $A \times B = \{(1, 2), (1, r), (2, 2), (2, r), (f, 2), (f, r)\}$.

Легко вычисляется мощность множества $A \times B$. Она равняется произведению мощностей множеств A и B: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$. Так в предыдущем примере $|A \times B| = 6$, $|A| = 3$, $|B| = 2$.

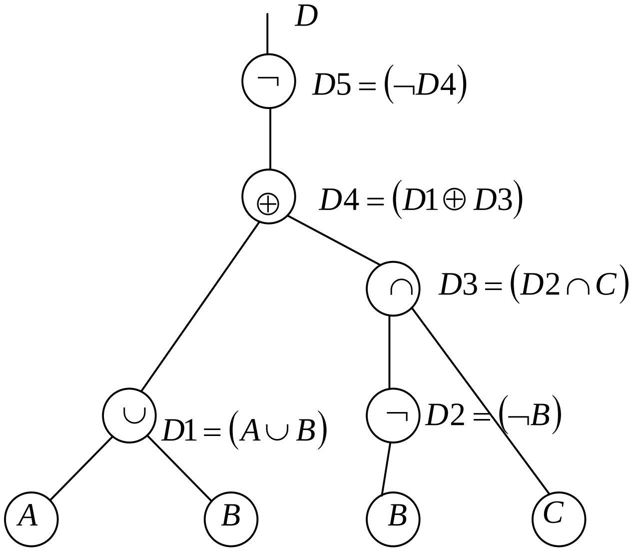
Интересный пример декартового произведения двух множеств возникает, если взять $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, а $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. В этом случае множество $A \times B$ означает набор полей шахматной доски:

a8	b8	c8	d8	e8	f8	g8	h8
a7	b7	c7	d7	e7	f7	g7	h7
a6	b6	c6	d6	e6	f6	g6	h6
a5	b5	c5	d5	e5	f5	g5	h5
a4	b4	c4	d4	e4	f4	g4	h4
a3	b3	c3	d3	e3	f3	g3	h3
a2	b2	c2	d2	e2	f2	g2	h2
a1	b1	c1	d1	e1	f1	g1	h1

Множество может быть описано также с помощью формулы.

Пример 2.3. Дан универсум $U=\{1,2,a,b\}$ и базовые множества (то есть некоторые подмножества универсума) $A=\{1,a\}$, $B=\{a,b\}$, $C=\{1,2,b\}$. Новое множество D задано формулой $D=(\neg((A\cup B)\oplus((\neg B)\cap C)))$.Найти состав множества D.

Решение. Построим дерево формулы.



Вычислим формулу поэтапно по ее структурному дереву, начиная с нижнего уровня, то есть с листьев.

Имеем:

1.$A = \{1, a\}$;

2.$B = \{a, b\}$;

3.$C = \{1, 2, b\}$

4.$D1 = A \cup B = \{1, a\} \cup \{a, b\} = \{1, a, b\}$;

5.$D2 = \neg B = \neg\{a, b\} = \{1, 2\}$;

6.$D3 = D2 \cap C = \{1, 2\} \cap \{1, 2, b\} = \{1, 2\}$:

7.$D4 = D1 \oplus D3 = \{1, a, b\} \oplus \{1, 2\} = \{2, a, b\}$;

8.$D5 = \neg D4 = \neg\{2, a, b\} = \{1\}$;

9.$D = D5 = \{1\}$.

Ответ: $D = \{1\}$.

Декартово произведение можно определить и для n множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$, где $n > 2$, как множество $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ всех упорядоченных наборов вида (a_1, a_2, …, a_n), причем $a_i \in A_i$ для всех $i \in [1:n]$. При этом также выполняется соотношение $|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|$.

3. Индивидуальные задания

Во всех последующих задачах универсум имеет состав: $U = \{1, 2, 3, 4, a, b, c, d, ee, tt, ww\}$.

Опираясь на определение базовых операций на множествах найти:

а) $C = A \cup B$ – объединение двух множеств;

б) $C = A \cap B$ – пересечение двух множеств;

в) $C = A \setminus B$ – разность первого и второго множества;

г) $C = B \setminus A$ – разность второго и первого множества;

д) $C = A \oplus B$ – симметрическая разность двух множеств;

е) $C = \overline{A}$ – дополнение первого множества;

ж) $C = \overline{B}$ – дополнение второго множества;

з) $C = A \times B$ – декартово произведениепервого множества на второе;

е) $C = B \times A$ – декартово произведениепервого множества на второе;

и) Множество C задано указанной формулой $F(A, B)$

Список вариантов индивидуальных заданий

1) $A = \{1, a, d\}, B = \{a, ee, 4, d\}, F = ((A \oplus B) \cap (A \setminus B))$;

2) $A = \{ee, a, d\}, B = \{a, ee, 4, 2\}, F = ((A \cup B) \cap (A \setminus B))$;

3) $A=\{1,2,ee,a,d\}, B=\{a,ee,4,2\}, F=((A\cap B)\cap(A\setminus B))$;

4) $A=\{1,2,ee,a,d\}, B=\{d,ee,4,3\}, F=((A\oplus B)\cap(A\cup B))$;

5) $A=\{1,2,ee,a,d\}, B=\{1,d,ee,4,3\}, F=((A\oplus B)\cap(A\cap B))$;

6) $A=\{1,2,ee,a,d\}, B=\{1,d,tt,4,3\}, F=((A\cup B)\cap(A\setminus B))$;

7) $A=\{1,2,ee,ww,a,d\}, B=\{1,d,tt,4,3\}, F=((A\cup B)\setminus(A\setminus B))$;

8) $A=\{1,2,ee,ww,a,d\}, B=\{1,a,c,tt,4,3\}, F=((A\setminus B)\cap(A\oplus B))$;

9) $A=\{1,2,ee,ww,a,d\}, B=\{2,a,c,tt,4,3\}, F=((A\cap B)\cup(A\setminus B))$;

10) $A=\{1,2,ee,ww,a,d\}, B=\{2,a,b,tt,4,3\}, F=((A\cup B)\setminus(A\setminus B))$;

11) $A=\{1,2,ee,ww,a,d\}, B=\{2,a,b,tt,4,3\}, F=((A\oplus B)\cup(A\setminus B))$;

12) $A=\{1,2,ee,ww,a,d\}, B=\{2,a,b,tt,1,3\}, F=((A\oplus B)\cap(B\setminus A))$

13) $A=\{1,2,ee,ww,c,d\}, B=\{2,a,b,tt,1,3\}, F=((A\oplus B)\cap(A\setminus B))$

14) $A=\{1,2,ee,ww,c,d\}, B=\{4,a,b,tt,1,3\}, F=((A\oplus B)\cap(A\setminus B))$

15) $A=\{1,a,ee,ww,c,d\}, B=\{4,a,b,tt,1,3\}, F=((A\setminus B)\setminus(A\cap B))$

16) $A=\{1,a,ee,ww,c,d\}, B=\{4,a,b,ee,1,3\}, F=((A\oplus B)\cup(A\setminus B))$

17) $A=\{1,a,ee,ww,c,d\}, B=\{c,a,b,ee,1,3\}, F=((A\cup B)\cap(A\setminus B))$

18) $A=\{1,a,b,ww,c,d\}, B=\{c,a,b,ee,1,3\}, F=((A\oplus B)\cap(\neg B))$

19) $A=\{1,a,b,ww,2,d\}, B=\{tt,a,b,ee,1,3\}, F=((\neg B)\cap(A\setminus B))$

20) $A=\{1,a,b,ww,2,d\}, B=\{c,a,b,ee,1,3\}, F=((A\oplus B)\cap(\neg B))$

21) $A=\{1,a,b,ww,2,d\}, B=\{2,a,b,ee,1,3\}, F=((A\cup B)\cap(\neg A))$

22) $A=\{1,a,b,ww,tt,d\}, B=\{2,a,b,ee,1,3\}, F=((A\oplus B)\cap(A\cup B))$

23) $A=\{1,a,b,ww,d\}, B=\{2,a,b,ee,1,3\}, F=((A\oplus B)\cap(A\cap B))$

24) $A=\{1,a,b,ww,d\}, B=\{2,a,c,ee,1,3\}, F=((A\setminus B)\cup(A\cap B))$

25) $A=\{1,a,b,ww,d\}, B=\{1,a,c,ee,4,3\}, F=((A\oplus B)\cap(A\setminus B))$

4. Контрольные вопросы

1. Дать определение объединения двух множеств.
2. Дать определение пересечения двух множеств.
3. Привести определение разности двух множеств.
4. Привести определение симметрической разности двух множеств.
5. Привести определение дополнения множества.
6. Дать определение декартового произведения двух множеств.

Лабораторная работа 2. Множества, задание множества с помощью предиката

1. Цель работы

Целью лабораторной работы является получение навыков определения поэлементный состав конечного множества по предикату (логическому условию на универсуме).

2. Задание

Дан универсум всех возможных элементов множеств U и одноместный предикат $P:U\to\{0,1\}$, определенный на нем. Определить состав множества $A^P=\{x\in U \mid P(x)=1\}$, порожденного предикатом P, то есть множества, состоящего из тех элементов универсума, для которых значение предиката P истинно, то есть равно 1. Выполнить 10 пунктов задания для следующих одноместных предикатов:

$$P_1(x)=((x>3)\wedge(x\le 8)\wedge(\exists(k\in N)(x=2\cdot k)))$$
$$P_2(x)=\left((x>1)\wedge\left(x^2\le 27\right)\wedge((\exists(k\in N)(x=2\cdot k)))\right)$$
$$P_3(x)=\left((3\cdot x+1>13)\wedge\left(x^2+1\le 44\right)\wedge((\exists(k\in N)(x=2\cdot k+1)))\right)$$
$$P_4(x)=\left((3\cdot x+1\ge 13)\wedge\left(x^2+1\le 37\right)\wedge((\exists(k\in N)(x=3\cdot k+1)))\right)$$
$$P_5(x)=\exists(y\in U)\exists(k\in N)((x=k\cdot y)\wedge(k\ne 1))$$
$$P_6(x)=((x>8)\vee(x\le 4))\wedge(\exists(k\in N)(x=2\cdot k))$$
$$P_7(x)=\forall(y\in U)\left(x<y^2\right)$$
$$P_8(x)=\exists(y\in U)\exists(z\in U)(x=y+z)$$
$$P_9(x)=\forall(y\in U)\forall(z\in U)(x\ne y\cdot z)$$
$$P_{10}(x)=\exists(y\in U)\exists(z\in U)((x=y\cdot z)\wedge(y>1)\wedge(z>1))$$

3. Краткие теоретические положения

Пусть U – универсум, то есть совокупность всех возможных объектов данной задачи. ***Предикатом*** $P(x)$, где $x\in U$, называется функция $P:U\to\{0,1\}$, определенная на универсуме и принимающая два значения: 1 – истина и 0 – ложь. Множеством A^P, порожденным данным предикатом, называется множество $A^P=\{x\in U \mid P(x)=1\}$, то есть множество таких объектов, для которых данный предикат истинен.

Пример 3.1.

Пусть U – множество студентов вуза, универсум данной задачи. Универсум U состоит из объектов вида x, где x – некоторый студент данного вуза. Объект x обладает рядом характеристик, ***полей.*** Например, имеется поле x.возраст – возраст данного студента. Рассмотрим предикат $P(x) = (x.\textit{возраст} \geq 18)$, то есть предикат $P(x)$ принимает значение *«истина»* для студентов не младше 18 лет и только для таких студентов. Тогда множество A^P – это множество студентов данного вуза, которые не младше 18 лет. То есть $A^P = \{x \in U \mid (x.\textit{возраст} \geq 18)\}$.

При построении необходимых предикатов используюся логические функции, то есть функции, принимающие значения в множестве $\{0,1\}$.

Основными в двузначной логике являются следующие функции:

Отрицание – функция $y = \bar{x}$, принимающая значения 1, когда $x = 0$, и значение 0, когда $x = 1$.

Дизъюнкция – функция $y(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$, принимающая значение 0 тогда и только тогда, когда оба аргумента имеют значение 0.

Конъюнкция – функция $y(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$, принимающая значение 1 тогда и только тогда, когда оба аргумента имеют значение 1.

Импликация – функция $y(x_1, x_2) = x_1 \to x_2$, равная 0 тогда и только тогда, когда $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, то есть посылка выполняется, а заключение нет. В остальных случаях импликация равна 1, то есть не нарушается.

Равносильность это функция $y(x_1, x_2) = x_1 \leftrightarrow x_2$, равная 1 тогда и только тогда, когда значения ее аргументов совпадают, то есть оба равны 0 или оба равны 1. При разных значениях аргументов равносильность равна 0.

Пример 3.2.

Пусть $U = N = \{1, 2, 3, \ldots\}$. То есть универсумом данной задачи является множество натуральных чисел. Пусть дан предикат $P(x) = (x \in N) \wedge ((x > 10) \wedge \overline{(x > 20)} \wedge (x = 5 \cdot k))$. Требуется найти множество $A^P = \{x \in N \mid P(x) = 1\}$, то есть множество истинности данного предиката.

Рассмотрев выражение для $P(x)$ определяем, что $P(x)=1$, если x – натуральное число, которое больше 10, не больше 20 и которое делится на 5. Получаем $A^P=\{15\}$. То есть данному набору требований удовлетворяет только одно число 15. Множество $\{15\}$и служит ответом в данной задаче.

При построении множеств используются также предикаты от нескольких аргументов.

***Предикатом (n-местным) от n пере*менных** называется функция, принимающая значения 0 и 1.

Например, $Q(x,y)$ – двуместный предикат, определенный на N^2, означающий $x \geq y$, то есть тот факт, что первый аргумент данного предиката не меньше второго. Так $Q(3,4)=0$, так как высказывание $3\geq 4$ ложно, $Q(5,1)=1$, так как высказывание $5\geq 1$ истинно.

Предикат становится высказыванием, если вместо n его аргументов подставить определенные значения. Предикат называется 0-*местным*, если он вообще не имеет аргументов, то есть является просто высказыванием.

Из n-местного предиката стандартным образом образуются (n-1)-местные путем использования специальных знаков называемых ***кванторами***, «$\forall$» – ***квантор всеобщности*** и «$\exists$» – ***квантор существования***.

Например, применение знака «$\forall$» к аргументу x в вышеописанном предикате Q приводит к образованию одноместного предиката $Q_1(y)=\forall x Q(x,y)$, определенного на множестве N натуральных чисел, причем $Q_1(1)=\forall x Q(x,1)=\forall x(x\geq 1)=1$ – верно, а $Q_1(5)=\forall x(x\geq 5)=0$, то есть неверно, так как не для всех $x\in N$ выполняется свойство $x\geq 5$,

Например, если $x=4$, то $4\geq 5$ не выполняется. Поэтому построенный одноместный предикат характеризуется значениями $Q_1(1)=1$, $Q_1(y)=0$, при $y=1$.

К двуместному предикату $Q(x,y)$ можно применить также квантор «$\exists$» – квантор существования. Тогда получаем другой одноместный предикат $Q_2(y)=\exists x Q(x,y)=\exists x(x\geq y)$. Предикат $Q_2(y)$ равен 1 при всех значениях y, так как для любого числа y всегда найдется такое x, что $x\geq y$. Таким образом, $Q_2(y)=1$ при всех y.

И так, применение кванторов, существования ($\exists$) и всеобщности ($\forall$) приводит к уменьшению местности предиката на 1. Переменная, которая стоит под знаком квантора, называется ***связанной*** (в предыдущих примерах это x), от неё полученный новый предикат (кванторный предикат) не зависит. Остальные переменные – ***свободные***.

Если в кванторном предикате остались свободные переменные, то к нему можно применять кванторы по оставшимся свободным переменным до тех пор, пока все переменные не окажутся связанными. В этом случае получаем ***высказывание***.

Пусть, например, $Q_3 = \exists y \forall x Q(x, y)$ – 0-местный предикат, в котором все переменные связаны, то есть это *высказывание* и Q_3 имеет определенное значение 0 или 1, ложь или истина. В словесной форме читается как «существует натуральное число y такое, что для всех натуральных чисел x выполняется неравенство $x \geq y$». Ясно, что значением Q_3 является 1, истина, так как можно взять $y = 1$, то есть указать тот элемент, о существовании которого утверждается.

Пример 3.3.

$U = [3, 20] \subseteq N$ – универсум данной задачи, то есть отрезок множества натуральных чисел от 3 до 20, включающий все натуральные числа в указанном промежутке, включая данные. Дан двухместный предикат, определенный на $U \times U$, имеющий вид $P(x, y) = ((x = k \cdot y) \vee (y \neq x))$, то есть предикат $P(x, y)$ истинен на паре чисел (x, y) тогда и только тогда, когда числа различны и первое число в данной паре делится нацело на второе, Дан предикат $P_1(x) = \exists y P(x, y)$, получаемый применением квантора существования по переменной y к исходному предикату $P(x, y)$.

Требуется найти множество A^{P_1}, то есть множество истинности предиката $P_1(x)$. Для этого заметим, что $P_1(x) = 1$ тогда и только тогда, когда для данного числа $x \in [3, 20]$ существует число $y \in [3, 20]$, которое является делителем числа x. То есть в множество A^{P_1} необходимо включать те числа, которые имеют делители в этом же множестве, отличные от данного числа. К таким относятся: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20. Таким образом, получаем ответ: A^{P_1}={4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20}.

4. Пример выполнения задания

$U = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 17, 18, 19, 20\}$.

$P_1(x) = ((x > 3) \wedge (x \le 8) \wedge (x = 2 \cdot k))$. x принадлежит U, больше 3, меньше или равно 8 и четно.

Ответ: $A^{P_1} = \{4,6,8\}$;

$P_2(x) = ((x > 1) \wedge (x^2 \le 27) \wedge (x = 2 \cdot k))$

Упростим второе условие:

$(x^2 \le 27) \Leftrightarrow |x| \le \sqrt{27} \Leftrightarrow x \le 5$, так как x – целое

x принадлежит U, больше 1, меньше или равно 5 и четно.

Ответ: $A^{P_2} = \{2, 4\}$;

$P_3(x) = ((3 \cdot x + 1 > 13) \wedge (x^2 + 1 \le 44) \wedge (x = 2 \cdot k + 1))$

Упростим первое условие: $(3 \cdot x + 1 > 13) \Leftrightarrow 3 \cdot x > 12 \Leftrightarrow x > 4$;

Упростим второе условие:

$(x^2 + 1 \le 44) \Leftrightarrow x^2 \le 43 \Leftrightarrow x \le \sqrt{43} \Leftrightarrow x \le 6$

x принадлежит U, больше 4, меньше или равно 6 и нечетно.

Ответ: $A^{P_3} = \{5\}$;

$P_4(x) = ((3 \cdot x + 1 \ge 13) \wedge (x^2 + 1 \le 37) \wedge (x = 3 \cdot k + 1))$

Упростим первое условие: $(3 \cdot x + 1 \ge 13) \Leftrightarrow 3 \cdot x \ge 12 \Leftrightarrow x \ge 4$;

Упростим второе условие:

$(x^2 + 1 \le 37) \Leftrightarrow x^2 \le 36 \Leftrightarrow x \le \sqrt{36} \Leftrightarrow x \le 6$;

x принадлежит U, больше или равно 4, меньше или равно 6 и при делении на 3 дает остаток 1.

4 = 3·1+1 = 1;

5 = 3·1 + 2, 2 ≠ 1;

6 = 3·2 + 0, 0 ≠ 1.

Ответ: $A^{P_4} = \{4\}$;

$P_5(x) = \exists (y \in U)((x = k \cdot y) \wedge (x \ne y))$

x принадлежит U и таков, что существует $y \in U$, причем $x \ne y$, такое, что x делится нацело на y.

Проверяем каждое число.

$U = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 17, 18, 19, 20\}$.

2 – нет; 3 – нет; 4 = 2·2, $2 \in U$ – да, 5 – нет, 6 = 2·3, $2 \in U$ – да, 7 – нет, 8 = 2·4, $4 \in U$ – да, 9 = 3·3, $3 \in U$ – да, 10 = 2·5, $2 \in U$ – да,

11 – нет, 12 = 2·6, $2 \in U$ – да, 13 – нет, 17 – нет, 18 = 2·9, $2 \in U$ – да, 19 – нет, 20 = 2·10, $2 \in U$ – да.

Ответ: $A^{P_5} = \{4, 6, 8, 10, 12, 18, 20\}$.

$P_6(x) = \left(\left((x > 8) \vee (x \le 4)\right) \wedge (x = 2 \cdot k)\right)$

x принадлежит U, четно и или больше 8 или меньше или равно 4.

Ответ: $A^{P_6} = \{2, 4, 10, 12, 18, 20\}$.

$P_7(x) = \forall(y \in U)\left(x < y^2\right)$

x принадлежит U, и таков, что меньше всех квадратов элементов универсума U. Это равносильно, чтобы x был меньше наименьшего такого квадрата, то есть числа $2^2 = 4$.

Ответ: $A^{P_7} = \{2, 3\}$.

$P_8(x) = \exists(y \in U)\exists(z \in U)\left(x = y + z\right)$

x принадлежит U и таков, что существуют $y, z \in U$, такие, что выполняется условие $x = y + z$, то есть элемент x можно представить в виде суммы каких либо элементов из множества U.

Проверяем каждое число.

$U = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 17, 18, 19, 20\}$.

2 – нет, 3 – нет, 4 = 2+2 – да, 5 = 2+3 – да, 6 = 2+4 – да, 7 = 2+5 – да, 8 = 2+6 – да, 9 = 2+7 – да, 10 = 2+8 – да, 11 = 2+9 – да, 12 = 2+10 – да, 13 = 2+11 – да, 17 = 4+13 – да, 18 = 6+12 – да, 19 = 6+13 – да, 20 = 2+18 – да.

Ответ: $A^{P_8} = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 17, 18, 19, 20\}$.

$P_9(x) = \forall(y \in U)\forall(z \in U)\left(x \ne y \cdot z\right)$

x принадлежит U и таков, что для всех выполняется условие $x \ne y \cdot z$, то есть элемент x нельзя представить в виде произведения каких либо элементов из множества U.

Проверяем каждое число.

$U = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 17, 18, 19, 20\}$.

2 – да, 3 – да, 4 = 2·2 – нет, 5 – да, 6 = 2·3 – нет, 7 – да, 8 =2·4 – нет, 9 = 3·3 – нет, 10 =2·5 – нет, 11 – да, 12 = 2·6 – нет, 13 – да, 17 – да, 18 = 2·9 – нет, 20 = 2·10 – нет.

Ответ: $A^{P_9} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$.

$P_{10}(x) = \exists(y \in U)\exists(z \in U)\left((x = y \cdot z) \wedge (y > 1) \wedge (z > 1)\right)$

x принадлежит U и таков, что существуют $y, z \in U$, такие, что выполняется условие $x = y \cdot z$, то есть элемент x можно представить в виде произведения каких либо элементов из множества U, причем должно выполняться также дополнительное условие, что эти элементы должны быть больше 1.

Проверяем каждое число.

$U = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 17, 18, 19, 20\}$.

2 – нет, 3 – нет, 4 = 2·2 – да, 5 – нет, 6 = 2·3 – да, 7 – нет, 8 = 2·4 – да, 9 = 3·3 – да, 10 = 2·5 – да, 11 – нет, 12 = 2·6 – да, 13 – нет, 17 – нет, 18 = 2·9 – да, 20 = 2·10 – да.

Ответ: $A^{P_{10}} = \{4, 6, 8, 9, 10, 12, 20\}$.

5. Индивидуальные задания

№ вар.	U
1.	{2 5 8 4 3 19 23 18 11 30}
2.	{10 2 3 5 9 4 19 6 18 7}
3.	{19 13 14 10 8 15 16 5 12 3}
4.	{10 2 3 5 8 4 19 6 18 7}
5.	{11 2 3 5 9 4 19 6 18 7}
6.	{10 2 3 4 13 5 19 6 18 7}
7.	{10 2 3 14 13 5 19 6 18 7}
8.	{1 2 3 5 9 4 19 6 18 7}
9.	{1 2 3 5 9 4 19 6 18 7}
10.	{19 13 14 10 8 15 16 6 12 3}
11.	{2 4 3 14 8 5 19 6 18 7}
12.	{9 4 3 14 8 5 19 6 18 7}
13.	{9 4 3 11 8 5 19 6 18 7}
14.	{9 10 3 11 8 5 19 6 18 7}
15.	{9 10 3 11 8 5 16 6 18 7}
16.	{9 10 4 11 8 5 16 6 18 7}
17.	{17 2 3 5 9 4 19 6 1 7}

№ вар.	*U*
18.	{9 10 4 11 8 5 16 6 12 7}
19.	{19 10 4 11 8 5 16 6 12 7}
20.	{19 13 4 11 8 5 16 6 12 7}
21.	{19 13 4 11 18 5 16 6 12 7}
22.	{19 13 14 11 18 5 16 6 12 7}
23.	{19 13 14 11 18 15 16 6 12 7}
24.	{19 13 14 10 18 15 16 6 12 7}
25.	{19 13 14 10 18 15 16 6 12 3}
26.	{17 2 3 5 9 4 19 6 8 7}
27.	{17 2 12 5 9 4 19 6 8 7}
28.	{17 2 12 5 9 14 19 6 8 7}
29.	{11 2 12 5 9 14 19 6 8 7}
30.	{11 2 12 5 9 14 19 6 10 7}
31.	{11 2 12 5 9 14 19 6 10 3}
32.	{11 2 7 5 9 14 19 6 10 3
33.	{11 2 7 5 12 14 19 6 10 3}
34.	{11 2 7 9 12 14 19 6 10 3}
35.	{11 5 7 9 12 14 19 6 10 3}
36.	{11 5 7 9 12 14 19 16 10 3}
37.	{1 5 7 9 12 14 19 16 10 3}
38.	{15 5 7 9 12 14 19 16 10 3}
39.	{15 5 7 9 2 14 19 16 10 3}
40.	{15 5 7 9 12 14 19 16 10 3}
41.	{15 5 17 9 12 14 19 16 10 3}

6. Контрольные вопросы

1. Дать определение одноместного предиката.
2. Дать определение двухместного предиката.
3. Как определяется множество A^P, соответствующее одноместному предикату P.
4. Как используется квантор существования $\exists$.
5. Как используется квантор всеобщности $\forall$.

Лабораторная работа 3. Функции и операции над ними

1. Цель работы

Целью лабораторной работы является изучение понятия функции и получение навыков решения типовых задач с использованием функций

2. Краткие теоретические положения

2.1. Упорядоченная пара объектов

Пусть даны множества A и B. Упорядоченной парой $\langle a,b\rangle$ или ***кортежем*** двух неравных объектов $a \neq b$ с компонентами $a \in A$ и $b \in B$ называется величина $\{\{a\},\{a,b\}\}$, то есть двухэлементное множество, состоящее из одноэлементного множества – синглета $\{a\}$, содержащего ***первый элемент пары*** – объект a, и двухэлементного множества $\{a,b\}$, то есть неупорядоченной пары, отражающей состав кортежа. Объект b называется ***второй компонентой*** кортежа. Если объекты a и b совпадают, то есть выполняется соотношение тождественности $a = b$, то по определению $\langle a,a\rangle = \{\{a\}\}$. В этом случае по определению первая и вторая компонента кортежа совпадает с указанным единственным объектом a.

Теорема 1. (Критерий равенства двух кортежей). Для кортежей имеет место равенство $\langle a,b\rangle = \langle x,y\rangle$ в том и только том случае, если выполняется система двух равенств: $\begin{cases} a = x \\ b = y \end{cases}$.

Доказательство. Нужно различать два случая.

Случай первый $x = y$. В этом случае $\langle x,y\rangle = \{\{x\}\}$ и при $a \neq b$ мы имеем равенство $\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{x\}\}$, которое невозможно, так как множество $\{\{x\}\}$ состоит только из одного объекта – синглета $\{x\}$, а множество $\{\{a\},\{a,b\}\}$ содержит также двухэлементное множество $\{a,b\}$. Поэтому имеет место равенство $a = b$ и $\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{a\}\}$. Получаем равенство $\{\{a\}\} = \{\{x\}\}$, откуда следует, что $x = a$.

Таким образом, в указанном частном случае имеем $\begin{cases} a = x \\ b = a = x = y \end{cases}$ то есть указанная система выполняется.

Рассмотрим второй частный случай $x \neq y$ и равенство $\langle a,b\rangle = \{\{x\},\{x,y\}\}$. В случае $a = b$ оно невозможно, как установлено перед этим. Поэтому $a \neq b$, $\langle a,b \rangle = \{\{a\},\{a,b\}\}$ и мы получаем равенство

$\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{x\},\{x,y\}\}$. В этом равенстве синглеты и пары должны совпадать, отсюда имеем $\begin{cases} \{x\} = \{y\} \\ \{x,y\} = \{a,b\} \end{cases}$, что равносильно данной системе $\begin{cases} a = x \\ b = y \end{cases}$.

Теорема доказана.

2.2. Декартово произведение двух множеств

Пусть даны два множества A и B. Декартовым произведением $A \times B$ первого множества на второе называется множество всех упорядоченных пар $\langle a,b \rangle$, где $a \in A$ и $b \in B$, то есть $A \times B = \{\langle a,b \rangle, a \in A, b \in B\}$.

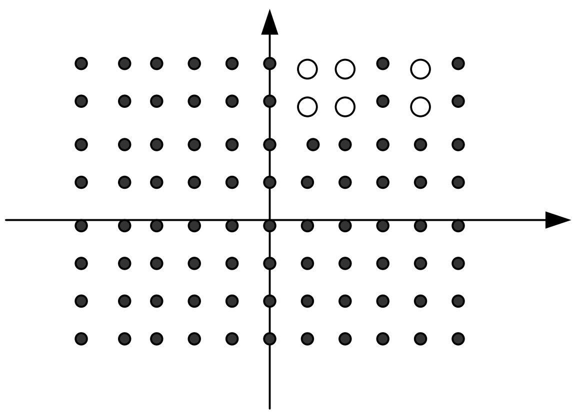
Пример 2.1. Дано $A = \{1,2,4\} \subseteq Z$, $B = \{4,3\} \subseteq Z$. Найти декартово произведение $Q_1 = A \times B$, а также множество $Q_2 = B \times A$, изобразить эти множества на целочисленной решетке $Z \times Z$.

Решение

Имеем

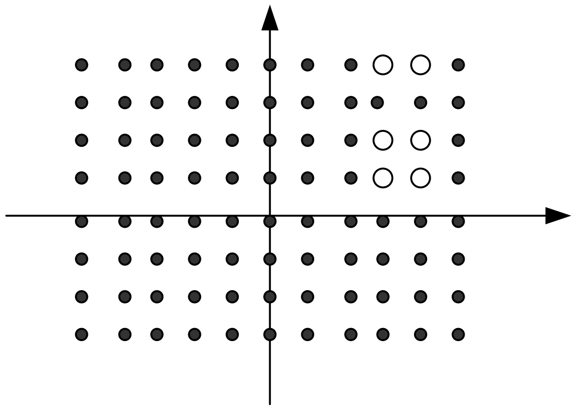
$Q_1 = A \times B = \{1,2,4\} \times \{4,3\} = \{\langle 1,4 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 2,4 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 4,4 \rangle, \langle 4,3 \rangle\}$.

Изобразим данное множество:



$Q_2 = B \times A = \{4,3\} \times \{1,2,4\} = \{\langle 4,1 \rangle, \langle 4,2 \rangle, \langle 4,4 \rangle, \langle 3,1 \rangle, \langle 3,2 \rangle, \langle 3,4 \rangle\}$

Изобразим данное множество на целочисленной решетке:



2.3. Функция

Пусть даны два множества A и B. Функцией из множества A в множество B называется подмножество $f \subseteq A \times B$ декартового произведения множеств A и B, обладающее свойством $\left(\langle x, y_1 \rangle \in f\right) \wedge \left(\langle x, y_2 \rangle \in f\right) \rightarrow \left(y_1 = y_2\right)$. Данное свойство называется ***функциональным свойством*** и означает, что для каждого значения аргумента $x \in A$ функция сопоставляет не более одного значения $y_1 = y_2 = f(x)$.

Пример 2.2. Дано $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1,2,3,4,5,6\}$ – начальное и конечное множества функции, $f = \{\langle 3,4 \rangle, \{\langle 1,1 \rangle, \langle 2,6 \rangle\}\}$ − функция из A в B. Найти значение функции $f(1)$.

Решение

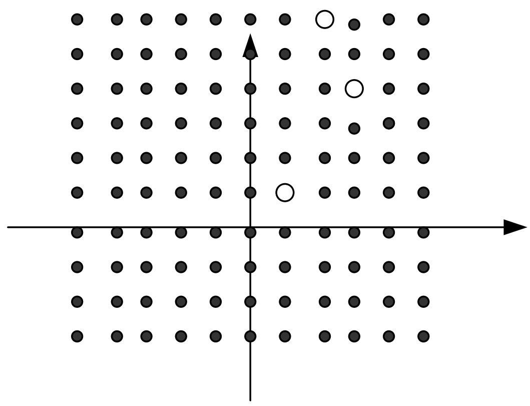
Поиск: Ищем пару вида $\langle 1, y \rangle \in f$. Результат этапа 1:Такая пара найдена и притом только одна $\langle 1,1 \rangle$;

1) Выборка: Из найденной пары извлекаем второй элемент, этот элемент будет искомым значением функции $f(1)$. Таким образом, получаем $f(1) = \mathrm{Pr}_2\left(\langle 1,1 \rangle = 1\right)$.

Ответ: $f(1) = 1$.

Изобразить данную функцию на решетке $Z \times Z$.

Решение



2.4. Область определения и область значений функции

Пусть дана функция f из множества A в множество B. ***Область определения*** данной функции – это множество $D_f = \{x \in A \mid \exists(y \in B)(\langle x, y\rangle \in f)\}$. ***Область значений*** функции f – это множество $R_f = \{y \in B \mid \exists(x \in A)(\langle x, y\rangle \in f)\}$. То есть область определения функции – это множество первых компонент кортежей, входящих в состав функции, а область значений – это множество вторых компонент.

Пример 2.3. Дано $A = Z, B = Z, f = \{\langle 1,5\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 7,4\rangle\}$. Найти D_f, R_f.

Решение

Путем анализа исходных данных сразу получаем ответ $D_f = \{1,2,7\}, R_f = \{4,5\}$.

2.5. Образ множества, прообраз множества, прообраз элемента при действии функции

Пусть дана функция $f \subseteq A \times B$ и подмножество $A_1 \subseteq A$. ***Образом*** $f(A_1)$ подмножества A_1 при действии функции f называется множество $f(A_1) = \{y \in B \mid \exists(x \in A_1)(\langle x, y\rangle \in f)\}$. То есть образ подмножества A_1 при действии функции f это *множество вторых компонент кортежей функции*, когда первые компоненты берутся из подмножества A_1. Пусть $B_1 \subseteq B$ – подмножество конечного множества функции f. Его ***прообразом*** $f^{-1}(B_1)$ при действии функции f называется множество $f^{-1}(B_1) = \{x \in A \mid \exists(y \in B_1)(\langle x, y\rangle \in f)\}$. То есть прообраз подмножества B_1 при действии функции f это *множество первых компонент кортежей функции,* когда вторые компоненты берутся из подмножества B_1.

Пусть дан элемент $b \in B$ его прообразом $f^{-1}(b)$ при действии функции f называется множество $f^{-1}(\{b\})$, то есть прообраз одноэлементного множества $\{b\}$ при действии функции f.

Пример 2.4. Дано
$A=\{1,2,3,4,5\},\ B=\{a,b,c,d\},\ f=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 4,b\rangle\},$
$A_1=\{1,5,3\},\ B_1=\{a,c,d\},\ b=d$. Найти $f(A_1),\ f^{-1}(B_1),\ f^{-1}(b)$.

Решение

Исходя из определения и данного состава функции f непосредственно выписываем ответ:

$$f(A_1)=\{a\},\ f^{-1}(B_1)=\{1,2\},\ f^{-1}(b)=\{\ \}.$$

2.6. Композиция и джойн функций

Пусть даны две функции $f \subseteq A\times B$ и $g \in B\times C$ их ***композицией*** $h=g\circ f$ называется функция $h\subseteq A\times C$ вида $h=\{\langle a,c\rangle \mid (a\in A)\wedge(c\in C)\wedge\exists(b\in B)((\langle a,b\rangle\in f)\wedge(\langle b,c\rangle\in g))\}$. Это определение можно пояснить следующей схематической диаграммой

$$\begin{tikzcd} & b \arrow[dr, "g"] & \\ a \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"'] & & c \end{tikzcd}$$

Таким образом, при композиции $g\circ f$ первой выполняется функция f, то есть первая справа. Имеют место следующие соотношения $D_{g\circ f}=f^{-1}(D_g)$, $(g\circ f)(a)=g(f(a)),\ a\in D_{g\circ f}$.

Композиция $g\circ f$ функций f и g может быть записана в виде ***джойна*** этих функций $f*g$,

где $*$ – операция джойна (то есть операция соединения или конкатенации).

Таким образом, при операции джойна первой выполняется функция первая слева.

Пример 2.5. Даны функции $f,g\subseteq U\times U$, где универсум $U=\{1,2,3,4,5\}$ и $f=\{\langle 1,5\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,3\rangle\},\ g=\{\langle 4,4\rangle,\langle 3,3\rangle\}$. Построить композиции и джойны $g\circ f,\ f\circ g,\ f*g,\ g*f$, выписать их кортежный состав и табличное представление.

Решение

Получим сначала табличное представление этих функций.

Имеем: $D_f=\{1,2,3\}$,

x	1	2	3
$f(x)$	5	4	3

$D_g = \{3,4\}$

x	3	4
$g(x)$	3	4

Находим $D_{g \circ f}$. Имеем: $D_{g \circ f} = f^{-1}(D_g) = f^{-1}(\{3,4\}) = \{2,3\} = \{2,3\}$.

Находим значения функции $g \circ f$ на всех элементах ее области определения. Имеем:

$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(4) = 4$, $(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(3) = 3$.

Таким образом, получили ответ по первой части задачи:

$D_{g \circ f} = \{2,3\}$,

x	2	3
$(g \circ f)(x)$	4	3

Из табличного получаем кортежное представление $g \circ f = \{\langle 2,4 \rangle, \langle 3,3 \rangle\}$. Так как $f * g = g \circ f$, автоматически получаем:

$D_{f * g} = \{2,3\}$,

x	2	3
$(f * g)(x)$	4	3

$f * g = \{\langle 2,4 \rangle, \langle 3,3 \rangle\}$.

Таким же способом находим ответ для второй части задачи.

$D_{f \circ g} = g^{-1}(D_f) = g^{-1}(\{1,2,3\}) = \{3\} = \{3\}$,

$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(3) = 3$.

То есть, $D_{f \circ g} = \{3\}$

x	3
$(f \circ g)(x)$	3

и $f \circ g = \{\langle 3,3 \rangle\}$.

Для соответствующего джойна ответ получаем автоматически:

$D_{g * f} = \{3\}$

x	3
$(g * f)(x)$	3

$g * f = \{\langle 3,3 \rangle\}$.

2.7. Отображения. Инъекция, сюръекция, биекция, свойства обратимости слева и справа

Функция $f \subseteq A \times B$ для которой $D_f = A$ называется ***всюду определенной***, обозначается $f : A \to B$ или $A \xrightarrow{f} B$ и называется также ***отображением.***

Тождественным отображением id_X на множестве X называется отображение $id_X : X \to X$, обладающее свойством $\forall(x \in X)(id_X(x) = x)$, то есть это отображение оставляет каждый элемент области определения на месте.

Пусть $f : A \to B$ − функция и $C \subseteq A$ − подмножество ее области определения. ***Сужением*** $f|_C$ функции на множество C называется функция $f|_C = f \cap (C \times B)$. Эта функция является отображением вида $f|_C : C \to B$. Имеет место формула: $f|_C = \{\langle a, b\rangle \mid (\langle a, b\rangle \in f) \wedge (a \in C)\}$.

Пример 2.6. Дано

$A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{a, b, c\}$, $f = \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 3, b\rangle, \langle 4, c\rangle\}$, $C = \{1,3\}$.

Найти сужение $f|_C$.

Решение

Имеем:

$$f|_C = f \cap (C \times B) = \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 3, b\rangle, \langle 4, c\rangle\} \cap$$
$$\cap \{\langle 1, a\rangle, \langle 1, b\rangle, \langle 1, c\rangle, \langle 3, a\rangle, \langle 3, b\rangle, \langle 3, c\rangle\} = \{\langle 1, a\rangle, \langle 3, b\rangle\}$$

Ответ: $f|_C = \{\langle 1, a\rangle, \langle 3, b\rangle\}$.

Функция f называется ***продолжением*** функции h, если выполняется включение $h \subseteq f$.

Отображение $f : X \to Y$ называется ***сюръективным*** или ***сюръекцией*** (отображением «на», накрытием) если $R_f = Y$, то есть если его образ совпадает со всем конечным множеством отображения. Это условие можно записать также в виде: $\forall(y \in Y)(f^{-1}(y) \neq \phi)$, то есть каждый элемент конечного множества является образом некоторого элемента начального множества отображения.

Отображение $f : X \to Y$ называется ***инъективным*** или ***инъекцией***, если выполняется свойство $\forall(x_1, x_2 \in X)((x_1 \neq x_2) \to (f(x_1) \neq f(x_2)))$, то есть разные переходят в разные.

Отображение $f: X \to Y$ называется ***биективным*** или ***биекцией*** (взаимно-однозначным отображением, перестановкой) если оно одновременно сюръекция и инъекция.

Пусть дано отображение $f: X \to Y$. Отображение $f_L^{-1}: Y \to X$ называется *левым обратным* к отображению f если выполняется свойство $f_L^{-1} \circ f = id_X$. Отображение $f_R^{-1}: Y \to X$ называется *правым обратным* к f, если $f \circ f_R^{-1} = id_Y$. Отображение $f^{-1}: Y \to X$ называется *обратным* к отображению f, если оно одновременно является правым обратным и левым обратным по отношению к f, то есть если выполняются свойства $f^{-1} \circ f = id_X$, $f \circ f^{-1} = id_Y$.

Теорема 2. Пусть имеется отображение $f: X \to Y$. Оно обладает левым обратным $f_L^{-1}: Y \to X$ тогда и только тогда, когда отображение f является инъекцией. При этом левое обратное находится по формуле: $f_L^{-1}(y) = \begin{cases} x: & f(x) = y,\ y \in R(f) \\ x \in X - \text{любое}, & \text{y} \in Y \setminus R(f) \end{cases}$

Отображение $f: X \to Y$ обладает правым обратным $f_R^{-1}: Y \to X$, если f является сюръекцией, при этом обратное f_R^{-1} находится по формуле:

$f_R^{-1}(y) = x,$ åñëè $x \in f^{-1}(y)$ *è* èç $f^{-1}(y)$ ýëåìåíò x ìîæåò áûòü âûáðàí ëþáûì.

Отображение $f: X \to Y$ обладает как левым обратным $f_L^{-1}: Y \to X$, так и правым обратным $f_R^{-1}: Y \to X$ в том и только том случае, если f – биекция. В этом случае левое и правое обратные отображения совпадают, определяются однозначно и их общее значение называется обратным (двусторонним) отображением $f^{-1}: Y \to X$ к отображению f.

2.8. Задание функции программой ЭВМ

Пример 2.7.

Функция $f: N \to N$ задана C++ программой:

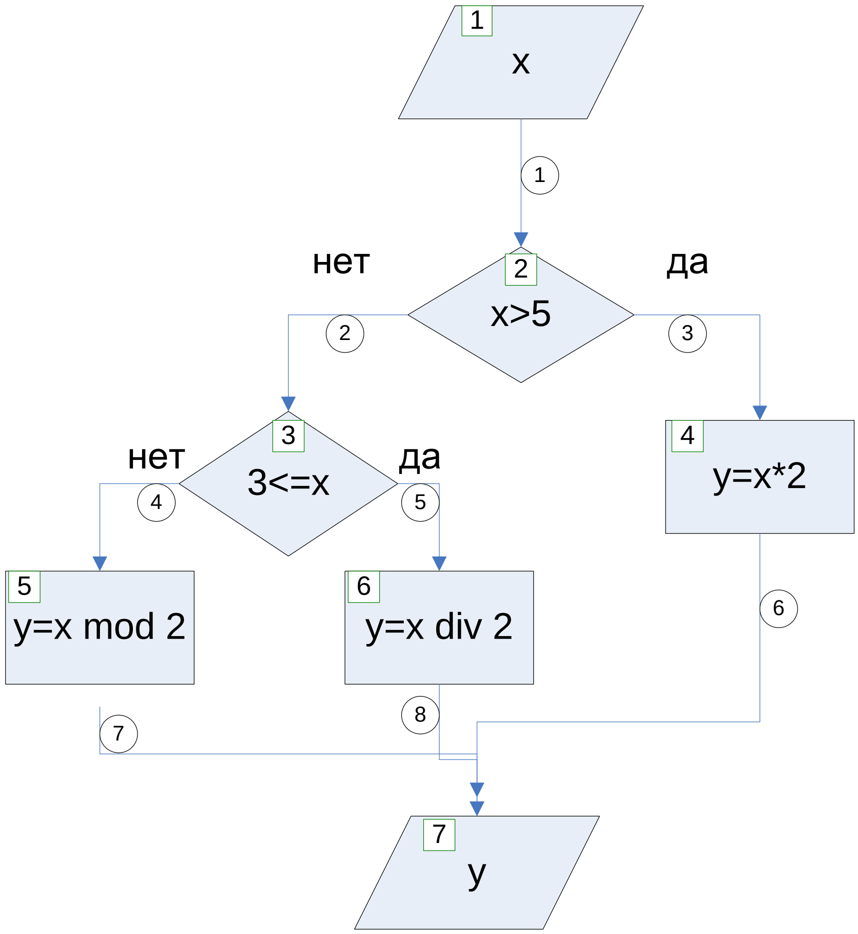
```
int f(int x)
{
if (x>5) return x*2;
else if (3<=x) return (x/2);
else return x%2;
```

}

Найти значение $f(2)$.

Решение

Для большей ясности действия указанной функции построим схему алгоритма данной функции:



Используя входные данные $x = 2$ осуществим прохождение от точки входа то точки выхода блок-схемы.

1) $x = 2$ – вход в схему;

2.Безусловный 1 переход на блок 2;

3) Проверка $2 > 5$ – нет, переход по дуге 2 на блок 3;

4) Проверка $3 \leq 2$ – нет, переход по дуге на исполнительный блок 5;

5) Операция $y = 2 \bmod 2 = 0$. Результат $y = 0$:

6) Безусловный переход на блок 7:

7) Вывод данных $y = 0$.

Итак, выполняя алгоритм данной функции по указанной схеме алгоритма получили ответ $f(2) = 0$.

3. Задание

Выполнить задания 1–4, записать решения, ответить на контрольные вопросы.

Задание 1. ***Кортежное задание функции*.** Даны начальное и конечные множества A, B, функция $f \subseteq A \times B$, найти область определения D_f, область значений R_f функции, получить табличное представление функции. Привести визуальное изображение функции в виде двудольного орграфа.

Пример выполнения.

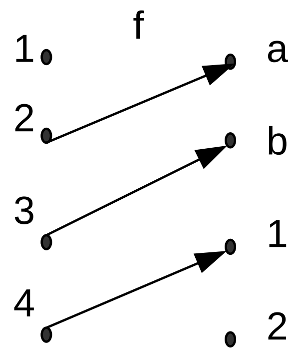
Дано $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{a, b, 1, 2\}$, $f = \{\langle 2, a\rangle, \langle 3, b\rangle, \langle 4,1\rangle\}$.

Решение

Область определения функции – это множество первых компонент ее кортежей. Получаем $D_f = \{2,3,4\}$. Область значений – это множество вторых координат ее кортежей. Получаем $R_f = \{1, a, b\}$. Табличное представление функции – это таблица аргумент – значение для всех элементов области определения функции. Получаем таблицу:

x	2	3	4
$f(x)$	a	b	1

Изображение:



Индивидуальные задания

№ вар	A	B	f	№ вар	A	B	f
1	$\{1,3,6,7\}$	$\{2,3,5\}$	$\{\langle 3,2\rangle, \langle 6,2\rangle, \langle 7,2\rangle\}$	2	$\{1,3,6,7\}$	$\{2,0,5\}$	$\{\langle 3,0\rangle, \langle 6,2\rangle\}$
3	$\{a,3,6,7\}$	$\{2,3,5\}$	$\{\langle 3,2\rangle, \langle a,5\rangle\}$	4	$\{1,3,6,0\}$	$\{2,3,5\}$	$\{\langle 3,2\rangle, \langle 6,5\rangle, \langle 0,5\rangle\}$
5	$\{1,3,6,7\}$	$\{2,m,5\}$	$\{\langle 3,m\rangle, \langle 6,2\rangle\}$	6	$\{1,3,6,7\}$	$\{7,3,5\}$	$\{\langle 3,7\rangle, \langle 6,2\rangle\}$

№ вар	A	B	f	№ вар	A	B	f
7	$\{e,3,h,7\}$	$\{2,3,5\}$	$\{\langle e,2\rangle,\langle h,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$	8	$\{1,3,g,6\}$	$\{2,3,5\}$	$\{\langle g,2\rangle,\langle 6,2\rangle\}$
9	$\{1,3,6,q\}$	$\{2,3,5\}$	$\{\langle 3,5\rangle,\langle q,2\rangle,\langle 6,2\rangle\}$	10	$\{1,3,6,7\}$	$\{3,5\}$	$\{\langle 3,3\rangle,\langle 6,5\rangle,\langle 1,3\rangle\}$
11	$\{1,3,6,7\}$	$\{t,3,5\}$	$\{\langle 3,t\rangle,\langle 6,2\rangle\}$	12	$\{1,3,f,7\}$	$\{2,3,5\}$	$\{\langle f,2\rangle,\langle 7,2\rangle\}$
13	$\{1,3,g,7\}$	$\{2,z,5\}$	$\{\langle g,5\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 7,2\rangle\}$	14	$\{1,3,6\}$	$\{2,3,5\}$	$\{\langle 1,5\rangle,\langle 6,2\rangle\}$
15	$\{1,3,xx,7\}$	$\{2,3,5\}$	$\{\langle 3,2\rangle,\langle xx,2\rangle\}$	16	$\{f,3,6,7\}$	$\{2,3,5\}$	$\{\langle f,5\rangle,\langle 6,2\rangle\}$
17	$\{1,3,6,7\}$	$\{2,3,l\}$	$\{\langle 3,2\rangle,\langle 6,l\rangle\}$	18	$\{1,3,6,7\}$	$\{z,3,5\}$	$\{\langle 3,z\rangle,\langle 6,5\rangle\}$
19	$\{1,3,u,7\}$	$\{2,3,5\}$	$\{\langle 3,3\rangle,\langle u,2\rangle\}$	20	$\{1,6,7\}$	$\{2,3,5\}$	$\{\langle 7,3\rangle,\langle 6,5\rangle\}$
21	$\{1,3,m,7\}$	$\{2,3,5\}$	$\{\langle m,2\rangle,\langle 7,2\rangle\}$	22	$\{1,3,6,7\}$	$\{2,3\}$	$\{\langle 3,2\rangle,\langle 6,2\rangle\}$
23	$\{1,3,6,7\}$	$\{2,3,5\}$	$\{\langle 3,2\rangle,\langle 6,2\rangle\}$	24	$\{1,3,7\}$	$\{2,3,5\}$	$\{\langle 3,2\rangle,\langle 1,5\rangle\}$
25	$\{1,3,6,55\}$	$\{3,5\}$	$\{\langle 55,5\rangle,\langle 6,3\rangle\}$	26	$\{1,3,6,7\}$	$\{h,3,5\}$	$\{\langle 3,h\rangle,\langle 6,5\rangle\}$
27	$\{1,3,6,7\}$	$\{2,kk,5\}$	$\{\langle 3,5\rangle,\langle 6,kk\rangle\}$	28	$\{1,j,6,7\}$	$\{2,3,5\}$	$\{\langle 7,3\rangle,\langle 6,2\rangle\}$
29	$\{1,3,6,7\}$	$\{2,3,5\}$	$\{\langle 3,2\rangle,\langle 6,5\rangle\}$	30	$\{1,3,6,7\}$	$\{2,5\}$	$\{\langle 3,5\rangle,\langle 6,2\rangle\}$
31	$\{1,3,6,7\}$	$\{2,3,5\}$	$\{\langle 3,2\rangle,\langle 6,3\rangle\}$	32	$\{1,6,7\}$	$\{2,3,5\}$	$\{\langle 1,2\rangle,\langle 6,5\rangle\}$
33	$\{1,3,6,7\}$	$\{2,3,5\}$	$\{\langle 3,2\rangle,\langle 7,3\rangle\}$	34	$\{1,d,6,7\}$	$\{2,3,5\}$	$\{\langle d,2\rangle,\langle 6,3\rangle\}$
35	$\{1,3,6,7\}$	$\{2,3,5\}$	$\{\langle 3,2\rangle,\langle 6,2\rangle\}$	36	$\{1,3,6,7\}$	$\{2,u,5\}$	$\{\langle 3,2\rangle,\langle 6,u\rangle\}$
37	$\{1,3,6,7\}$	$\{2,3,5\}$	$\{\langle 3,2\rangle,\langle 1,5\rangle\}$	38	$\{1,3,6,hh\}$	$\{2,3,5\}$	$\{\langle 3,2\rangle,\langle hh,3\rangle\}$
39	$\{1,3,6,7\}$	$\{2,3,5\}$	$\{\langle 3,2\rangle,\langle 6,5\rangle\}$	40	$\{1,3,6,7\}$	$\{2,f,5\}$	$\{\langle 3,2\rangle,\langle 6,f\rangle\}$

Задание 2. *Образ множества, прообраз множества, прообраз элемента.*

Дано**:** Множества A, B, функция $f \subseteq A \times B$, подмножество $A_1 \subseteq A$, подмножество $B_1 \subseteq B$, элемент $b \in B$. Найти: Образ подмножества A_1, то есть подмножество $f(A_1)$, прообраз подмножества B_1, то есть множество $f^{-1}(B_1)$, прообраз элемента b, то есть подмножество $f^{-1}(b)$.

Пример выполнения

Дано:

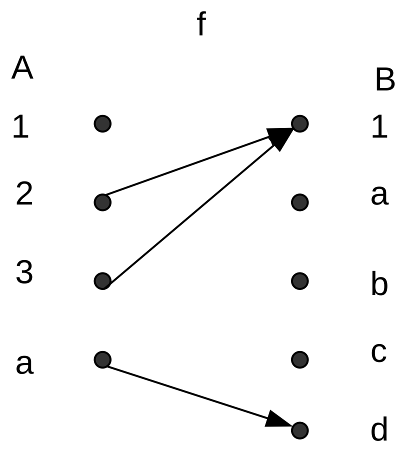
$A = \{1, 2, 3, a\}$, $B = \{1, a, b, c, d\}$, $f = \{\langle 2,1\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle a, d\rangle\}$, $A_1 = \{1,2,3\}$,

$B_1 = \{a, d\}$, $b = 1$.

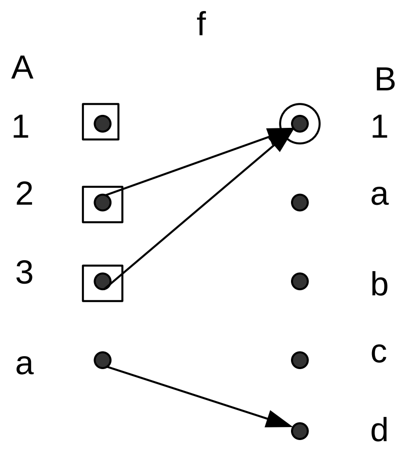
Найти объекты, указанные в задании.

Решение

Используем графическую интерпретацию функции как двудольного орграфа. Имеем следующую диаграмму (орграф функции):

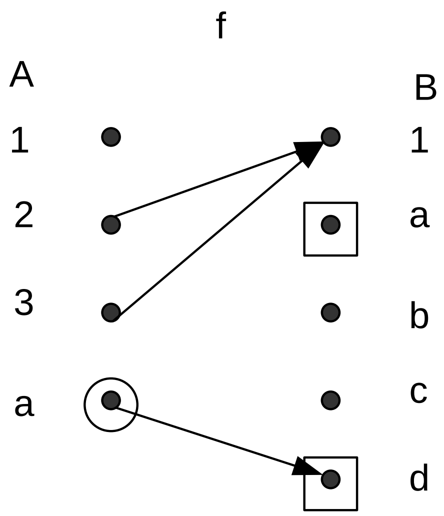


Для нахождения образа $f(A_1)$подмножества $A_1 = \{1,2,3\}$ выделим квадратами в множестве A вершины из A_1 а элементы, в которые ведут стрелки из выделенных вершин – кружками. Имеем:



Исходя из полученной диаграммы, находим ответ: $f(\{1,2,3\}) = \{1\}$.

Для нахождения прообраза $f^{-1}(B_1)$ подмножества $B_1 = \{a, d\}$ в множестве B выделим квадратами вершины из B_1, а элементы, из которых ведут стрелки в выделенные элементы – кружками. Имеем:



Исходя из полученной диаграммы, находим ответ: $f^{-1}(\{a,d\}) = \{a\}$.

Для нахождения прообраза $f^{-1}(b)$ элемента $b \in B$ заметим, что по определению, $f^{-1}(b) = f^{-1}(\{b\}) = f^{-1}(\{1\})$.

Таким образом, третья часть задачи решается методом аналогичным, использованному методу для второй части задачи.

Применяя этот метод, находим ответ: $f^{-1}(1) = \{2,3\}$.

Индивидуальные задания

№ вар.	A	B	f	A_1	B_1	b
1	$\{1,2,3,4,5\}$	$\{1,2,3,4,5\}$	$\{\langle 2,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,1\rangle\}$	$\{1,2,3\}$	$\{1,4,3\}$	1
2	$\{1,2,3,4,5\}$	$\{1,2,3,4,5\}$	$\{\langle 2,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,1\rangle\}$	$\{1,4,3\}$	$\{5,2,3\}$	3
3	$\{1,2,3,4,5\}$	$\{1,2,3,4,5\}$	$\{\langle 2,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 4,1\rangle\}$	$\{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$	2
4	$\{1,2,3,4,5\}$	$\{1,2,3,4,5\}$	$\{\langle 2,1\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 4,1\rangle\}$	$\{5,2,3\}$	$\{1,2,3\}$	4
5	$\{1,2,3,4,5\}$	$\{1,2,3,4,5\}$	$\{\langle 1,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,1\rangle\}$	$\{1,2,3\}$	$\{1,4,3\}$	5
6	$\{1,2,3,4,5\}$	$\{1,2,3,4,5\}$	$\{\langle 2,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,1\rangle\}$	$\{1,2,4\}$	$\{1,2,5\}$	1
7	$\{1,2,3,4,5\}$	$\{1,2,3,4,5\}$	$\{\langle 2,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,1\rangle\}$	$\{1,2,3\}$	$\{1,5,3\}$	3
8	$\{1,2,3,4,5\}$	$\{1,2,3,4,5\}$	$\{\langle 2,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,4\rangle\}$	$\{1,5,3\}$	$\{1,2,3\}$	2
9	$\{1,2,3,4,5\}$	$\{1,2,3,4,5\}$	$\{\langle 2,1\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 4,1\rangle\}$	$\{4,2,3\}$	$\{4,2,3\}$	2
10	$\{1,2,3,4,5\}$	$\{1,2,3,4,5\}$	$\{\langle 2,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 4,1\rangle\}$	$\{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$	1
11	$\{1,2,3,4,5\}$	$\{1,2,3,4,5\}$	$\{\langle 2,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 4,1\rangle\}$	$\{1,5,3\}$	$\{1,5,3\}$	1
12	$\{1,2,3,4,5\}$	$\{1,2,3,4,5\}$	$\{\langle 2,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,1\rangle\}$	$\{1,2,4\}$	$\{1,2,4\}$	4
13	$\{1,2,3,4,5\}$	$\{1,2,3,4,5\}$	$\{\langle 2,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,1\rangle\}$	$\{1,5,3\}$	$\{1,5,3\}$	2

№ вар.	A	B	f	A_1	B_1	b
14	{1,2,3,4,5}	{1,2,3,4,5}	$\{\langle 1,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,1\rangle\}$	$\{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$	2
15	{1,2,3,4,5}	{1,2,3,4,5}	$\{\langle 2,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,3\rangle\}$	$\{5,2,3\}$	$\{5,2,3\}$	4
16	{1,2,3,4,5}	{1,2,3,4,5}	$\{\langle 2,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,2\rangle\}$	$\{1,4,3\}$	$\{1,4,3\}$	4
17	{1,2,3,4,5}	{1,2,3,4,5}	$\{\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,1\rangle\}$	$\{1,2,5\}$	$\{1,4,3\}$	5
18	{1,2,3,4,5}	{1,2,3,4,5}	$\{\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,1\rangle\}$	$\{4,2,3\}$	$\{1,2,3\}$	5
19	{1,2,3,4,5}	{1,2,3,4,5}	$\{\langle 2,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 4,1\rangle\}$	$\{1,2,3\}$	$\{5,2,3\}$	5
20	{1,2,3,4,5}	{1,2,3,4,5}	$\{\langle 2,1\rangle,\langle 5,2\rangle,\langle 4,1\rangle\}$	$\{1,4,5\}$	$\{1,2,3\}$	5
21	{1,2,3,4,5}	{1,2,3,4,5}	$\{\langle 2,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 5,1\rangle\}$	$\{5,2,3\}$	$\{1,2,4\}$	5
22	{1,2,3,4,5}	{1,2,3,4,5}	$\{\langle 5,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,1\rangle\}$	$\{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$	5
23	{1,2,3,4,5}	{1,2,3,4,5}	$\{\langle 2,1\rangle,\langle 3,5\rangle,\langle 4,1\rangle\}$	$\{1,4,3\}$	$\{1,5,3\}$	3
24	{1,2,3,4,5}	{1,2,3,4,5}	$\{\langle 2,5\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,1\rangle\}$	$\{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$	3
25	{1,2,3,4,5}	{1,2,3,4,5}	$\{\langle 2,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,5\rangle\}$	$\{1,4,3\}$	$\{1,5,3\}$	2
26	{1,2,3,4,5}	{1,2,3,4,5}	$\{\langle 2,1\rangle,\langle 5,2\rangle,\langle 4,1\rangle\}$	$\{5,2,3\}$	$\{1,2,4\}$	2
27	{1,2,3,4,5}	{1,2,3,4,5}	$\{\langle 2,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 5,1\rangle\}$	$\{1,2,3\}$	$\{1,5,3\}$	1
28	{1,2,3,4,5}	{1,2,3,4,5}	$\{\langle 5,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,1\rangle\}$	$\{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$	1
29	{1,2,3,4,5}	{1,2,3,4,5}	$\{\langle 2,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,1\rangle\}$	$\{1,4,3\}$	$\{5,2,3\}$	1
30	{1,2,3,4,5}	{1,2,3,4,5}	$\{\langle 2,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,1\rangle\}$	$\{1,2,5\}$	$\{1,4,3\}$	1
31	{1,2,3,4,5}	{1,2,3,4,5}	$\{\langle 2,1\rangle,\langle 3,5\rangle,\langle 4,1\rangle\}$	$\{1,5,3\}$	$\{1,2,5\}$	4
32	{1,2,3,4,5}	{1,2,3,4,5}	$\{\langle 2,5\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,1\rangle\}$	$\{1,2,3\}$	$\{4,2,3\}$	4

Задание 3. *Композиция и джойн функций.*

Дано: Универсум U, функции $f, g \subseteq U \times U$. Построить композиции и джойны $g \circ f$, $f \circ g$, $f * g$, $g * f$, выписать их кортежный состав и табличное представление.

Пример выполнения

$U = \{1,2,3,4,5\}$ $f = \{\langle 1,5\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,3\rangle\}$, $g = \{\langle 4,4\rangle,\langle 3,3\rangle\}$.

Решение

Получим сначала табличное представление этих функций.

Имеем: $D_f = \{1,2,3\}$,

x	1	2	3
$f(x)$	5	4	5

$D_g = \{3,4\}$

x	3	4
$g(x)$	3	4

Находим $D_{g\circ f}$. Имеем: $D_{g\circ f} = f^{-1}(D_g) = f^{-1}(\{3,4\}) = \{2,3\} = \{2,3\}$.

Находим значения функции $g\circ f$ на всех элементах ее области определения. Имеем: $(g\circ f)(2) = g(f(2)) = g(4) = 4$, $(g\circ f)(3) = g(f(3)) = g(3) = 3$.

Таким образом, получили ответ *по первой части задачи*:

$D_{g\circ f} = \{2,3\}$,

x	2	3
$(g\circ f)(x)$	4	3

Из табличного получаем кортежное представление $g\circ f = \{\langle 2,4\rangle, \langle 3,3\rangle\}$.

Так как $f * g = g\circ f$, автоматически получаем: $D_{f*g} = \{2,3\}$,

x	2	3
$(f*g)(x)$	4	3

$f * g = \{\langle 2,4\rangle, \langle 3,3\rangle\}$.

Таким же способом находим ответ *для второй части задачи*.

$D_{f\circ g} = g^{-1}(D_f) = g^{-1}(\{1,2,3\}) = \{3\} = \{3\}$,

$(f\circ g)(3) = f(g(3)) = f(3) = 3$. То есть, $D_{f\circ g} = \{3\}$

x	3
$(f\circ g)(x)$	3

и $f\circ g = \{\langle 3,3\rangle\}$.

Для соответствующего джойна ответ получаем автоматически:

$D_{g*f} = \{3\}$

x	3
$(g*f)(x)$	3

$g * f = \{\langle 3,3\rangle\}$.

Индивидуальные задания

Для всех вариантов $U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

№ вар.	f, g
1	f={<2,1>,<3,4>,<4,1>,<5,3>} g={<1,1>,<3,5>,<5,1>}
2	f={<2,1>,<3,4>,<4,1>,<5,3>} g={<1,4>,<3,5>,<5,1>}
3	f={<2,1>,<3,4>,<4,1>,<5,3>} g= {<1,4>,<3,5>,<5,3>}
4	f={<2,1>,<3,4>,<4,2>,<5,3>} g={<1,4>,<3,5>,<5,3>}
5	f={<2,1>,<3,4>,<4,2>,<5,3>} g={<1,4>,<3,4>,<5,3>}
6	f={<2,3>,<3,4>,<4,2>,<5,3>} g=<1,4>,<3,4>,<5,3>}
7	f={<2,3>,<3,4>,<4,2>,<5,3>} g={<1,4>,<3,4>,<5,3>,<7,5>}
8	f={<2,3>,<3,4>,<4,7>,<5,3>} g={<1,4>,<3,4>,<5,3>,<7,5>}
9	f={<2,3>,<3,4>,<4,7>,<5,5>} g={<1,4>,<3,4>,<5,3>,<7,5>}
10	f={<2,3>,<3,4>,<4,7>,<5,5>} g={<1,4>,<3,4>,<5,3>,<7,4>}
11	f={<2,3>,<3,4>,<4,7>,<5,5>} g={<1,4>,<3,4>,<5,4>,<7,4>}
12	f={<2,3>,<3,4>,<4,7>,<5,5>} g={<1,4>,<3,2>,<5,4>,<7,2>}
13	f={<2,3>,<3,4>,<4,7>,<5,5>} g={<1,8>,<3,2>,<5,4>,<7,8>}
14	f={<2,3>,<3,4>,<4,7>,<5,5>} g={<1,8>,<3,9>,<5,4>,<7,8>}
15	f={<2,3>,<3,4>,<5,5>,<8,7>} g={<1,8>,<3,9>,<5,4>,<7,8>}
16	f={<2,3>,<3,4>,<5,5>,<8,9>} g={<1,8>,<3,9>,<5,4>,<7,8>}
17	f={<2,3>,<3,4>,<5,5>,<8,9>} g=<1,5>,<3,9>,<5,4>,<7,8>}
18	f={<2,3>,<3,4>,<5,3>,<8,9>} g={<1,5>,<3,9>,<5,4>,<7,8>}
19	f={<2,3>,<3,4>,<5,3>,<8,9>} g=<1,5>,<3,9>,<4,6>,<5,4>,<7,8>}
20	f={<2,3>,<3,4>,<5,3>,<8,9>} g={<3,9>,<4,6>,<5,4>,<7,8>,<9,5>}
21	f={<2,3>,<3,4>,<5,9>,<8,9>} g={<3,9>,<4,6>,<5,4>,<7,8>,<9,5>}
22	f={<2,3>,<3,4>,<5,9>,<8,9>} g={<3,9>,<4,3>,<5,4>,<7,8>,<9,5>}
23	f={<2,3>,<3,4>,<5,9>,<8,5>} g={<3,9>,<4,3>,<5,4>,<7,8>,<9,5>}
24	f={<2,3>,<3,4>,<5,9>,<8,5>,<9,9>} g={<3,9>,<4,3>,<5,4>,<7,8>,<9,5>}
25	f={<2,9>,<3,4>,<5,9>,<8,5>,<9,9>} g={<3,9>,<4,3>,<5,4>,<7,8>,<9,5>}
26	f={<2,4>,<3,3>,<5,9>,<8,7>,<9,9>}g={<3,9>,<4,3>,<5,3>,<7,8>, <9,5>}

№ вар.	f, g
27	f={<2,4>,<3,3>,<5,9>,<8,7>,<9,9>}g={<3,5>,<4,3>,<5,3>,<7,8>,<9,5>}
28	f={<2,4>,<3,3>,<5,9>,<8,7>,<9,9>}g={<3,5>,<4,3>,<5,3>,<7,3>,<9,5>}
29	f={<2,4>,<3,3>,<5,5>,<8,7>,<9,9>}g={<3,5>,<4,3>,<5,3>,<7,3>,<9,5>}
30	f={<2,4>,<3,3>,<5,5>,<8,7>,<9,9>}g={<3,5>,<4,3>,<5,3>,<7,3>,<9,2>}
31	f={<2,4>,<3,3>,<5,4>,<8,7>,<9,9>}g={<3,5>,<4,3>,<5,3>,<7,3>,<9,2>}
32	f={<2,4>,<3,3>,<5,4>,<8,7>,<9,9>}g={<3,8>,<4,3>,<5,3>,<7,3>,<9,2>}
33	f={<2,4>,<3,3>,<5,4>,<8,7>,<9,9>}g={<3,8>,<4,3>,<5,3>,<7,3>,<9,3>}
34	f={<2,4>,<3,3>,<5,9>,<8,7>,<9,9>}g={<3,8>,<4,3>,<5,3>,<7,3>,<9,3>}
35	f={<2,4>,<3,7>,<5,9>,<8,7>,<9,9>}g={<3,8>,<4,3>,<5,3>,<7,3>,<9,3>}
36	f={<2,4>,<3,7>,<5,9>,<8,3>,<9,9>}g={<3,8>,<4,3>,<5,3>}
37	f={<2,4>,<3,7>,<5,4>,<8,3>,<9,9>}g={<3,8>,<4,3>,<5,3>}
38	f={<2,4>,<3,7>,<5,4>,<8,3>,<9,9>}g={<3,8>,<4,3>,<5,2>}
39	f={<2,3>,<3,7>,<5,4>,<8,3>,<9,9>}g={<3,8>,<4,3>,<5,2>}
40	f={<2,3>,<3,4>,<5,4>,<8,3>,<9,9>}g={<3,8>,<4,3>,<5,2>}
41	f={<2,3>,<3,4>,<5,5>,<8,3>,<9,9>}g={<3,8>,<4,3>,<5,2>}
42	f={<2,3>,<3,3>,<5,5>,<8,3>,<9,9>}g={<3,8>,<4,3>,<5,2>}
43	f={<2,3>,<3,3>,<5,5>,<8,4>,<9,9>}g={<3,8>,<4,3>,<5,2>}
44	f={<2,3>,<3,3>,<5,5>,<8,4>,<9,9>}g={<3,8>,<4,3>,<5,8>}
45	f={<2,3>,<3,3>,<5,5>,<8,4>,<9,9>}g={<3,2>,<4,3>,<5,8>}
46	f={<2,3>,<3,5>,<5,5>,<8,4>,<9,9>}g={<3,2>,<4,3>,<5,8>}
47	f={<2,3>,<3,5>,<5,5>}g={<3,2>,<4,3>,<5,2>}
48	f={<2,3>,<3,5>,<5,5>}g={<3,2>,<4,3>,<5,3>}
49	f={<2,3>,<3,5>,<5,5>}g={<3,2>,<4,3>,<5,3>}
50	f={<2,3>,<3,5>,<5,5>}g={<3,2>,<4,1>,<5,3>}

Задание 4. *Алгоритмическое определение функции*.

Дано: Программа ЭВМ, описывающая функцию $f : N \to N$, элемент $a \in N$. Найти**:** $f(a)$, изобразить схему алгоритма функции,

Пример выполнения

Функция $f : N \to N$ задана C++ программой:

```
int f(int x)
{
if (x>5) return x*2;
else if (3<=x) return (x/2);
else return x%2;
}
```

Найти значение $f(2)$.

Решение

Используем следующую информацию о языке программирования C++:

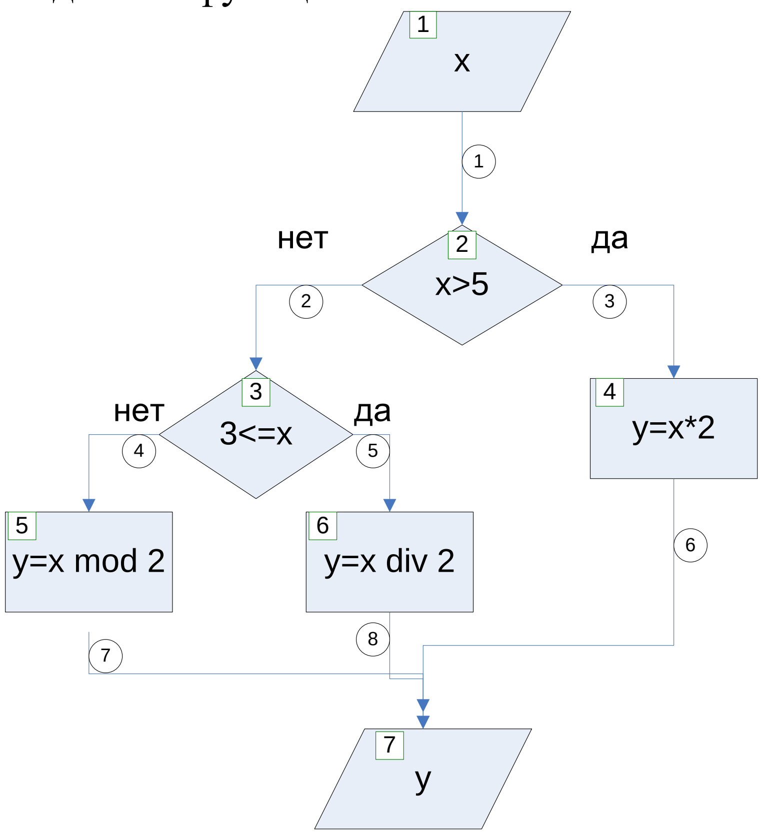
$$a \backslash b \quad = \quad a\, div\, b;$$

$$a\%b \quad = \quad a \ \mathrm{mod}\ b;$$

$$Q\&\&P \quad = \quad Q \wedge P;$$

$$Q \| P \quad = \quad Q \vee P;$$

Для большей ясности действия указанной функции построим схему алгоритма данной функции.



Используя входные данные $x = 2$ осуществим прохождение от точки входа то точки выхода схемы алгоритма.

1) $x = 2$ – вход в схему;

2. Безусловный 1 переход на блок 2;

3) Проверка $2 > 5$ – нет, переход по дуге 2 на блок 3;

4) Проверка $3 \le 2$ – нет, переход по дуге на исполнительный блок 5;

5) Операция $y = 2 \bmod 2 = 0$. Результат $y = 0$:

6) Безусловный переход на блок 7:

7) Вывод данных $y = 0$.

Итак, выполняя алгоритм данной функции по указанной схеме алгоритма, получили ответ $f(2) = 0$.

Индивидуальные задания

<table>
<tr><th>№ вар.</th><th>f</th><th>a</th></tr>
<tr><td>1</td><td>int f(int x)
{
if (x>15) return x+2;
else if ((10<=x)&&(x<=12)) return (x/3);
else return x%4;
}</td><td>12</td></tr>
<tr><td>2</td><td>int f(int x)
{
if (x>15) return x+2;
else if ((6<=x)&&(x<=12)) return (x/5);
else return x%3;
}</td><td>7</td></tr>
<tr><td>3</td><td>int f(int x)
{
if ((x>15)||(x<=4)) return x+2;
else if ((6<=x)&&(x<=12)) return (x/3);
else return x%2;
}</td><td>7</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>№ вар.</th><th>f</th><th>a</th></tr>
<tr><td>4</td><td>int f(int x)
{
if ((x>15)||(x<=4)) return x*2;
else if ((6<=x)&&(x<=12)) return (x/3);
else return x%2;
}</td><td>3</td></tr>
<tr><td>5</td><td>int f(int x)
{
if ((x>15)||(x<=4)) return x*2;
else if ((4<=x)&&(x<=12)) return (x/8);
else return x%2;
}</td><td>11</td></tr>
<tr><td>6</td><td>int f(int x)
{
if ((x>15)||(x<=4)) return x*2;
else if ((4<=x)&&(x<=12)) return (x/5);
else return x%2;
}</td><td>8</td></tr>
<tr><td>7</td><td>int f(int x)
{
if ((x>15)||(x<=4)) return x*2;
else if ((4<=x)&&(x<=12)&&(x%2==0))
return (x+20);
else return x%2;
}</td><td>8</td></tr>
<tr><td>8</td><td>int f(int x)
{
if ((x>15)||(x<=4)) return x*2;
else if ((4<=x)&&(x<=12)&&(x%2==1))
return (x+20);
else return x%2;
}</td><td>8</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>№ вар.</th><th>f</th><th>a</th></tr>
<tr><td>9</td><td>int f(int x)
{
if ((x>15)||(x<=4)) return x*2;
else if ((4<=x)&&(x<=12)&&(x%2==1))
return (x+20);
else return x%2;
}</td><td>11</td></tr>
<tr><td>10</td><td>int f(int x)
{
if ((x>15)||(x<=4)||(x%3==0)) return x*2;
else if ((4<=x)&&(x<=12)&&(x%2==1))
return (x+20);
else return x%2;
}</td><td>9</td></tr>
<tr><td>11</td><td>int f(int x)
{
if ((x>15)||(x<=4)||(x%3==0)) return x*2;
else if ((4<=x)&&(x<=12)&&(x%2==1))
return (x+20);
else return x%2;
}</td><td>10</td></tr>
<tr><td>12</td><td>int f(int x)
{
if ((x>15)||(x<=4)||(x%5==0)) return x-x/2;
else if ((4<=x)&&(x<=12)&&(x%2==1))
return (x+20);
else return x%2;
}</td><td>5</td></tr>
<tr><td>13</td><td>int f(int x)
{
if ((x>15)||(x<=4)||(x%5==0)) return x-x/2;
else if ((4<=x)&&(x<=12)&&(x%2==1))
return (x+20);
else return x%2;
}</td><td>19</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>№ вар.</th><th>f</th><th>a</th></tr>
<tr><td>14</td><td>int f(int x)
{
if ((x>15)||(x<=2)||(x%5==2)) return x-x/2;
else if ((4<=x)&&(x<=12)&&(x%2==1))
return (x+20);
else return x%2;
}</td><td>7</td></tr>
<tr><td>15</td><td>int f(int x)
{
if ((x>15)||(x<=2)||(x%5==2)) return x-x/2;
else if ((4<=x)&&(x<=12)&&(x%2==1))
return (x+20);
else return x%2;
}</td><td>21</td></tr>
<tr><td>16</td><td>int f(int x)
{
if ((x>15)||(x<=2)||(x%5==2)) return x-x/2;
else if ((4<=x)&&(x<=12)&&(x%2==0))
return (x+20);
else return x%2;
}</td><td>10</td></tr>
<tr><td>17</td><td>int f(int x)
{
if ((x>15)||(x<=2)||(x%5==2)) return x-x/2;
else if ((4<=x)&&(x<=12)&&(x%2==0))
return (x+20);
else return x%2;
}</td><td>16</td></tr>
<tr><td>18</td><td>int f(int x)
{
if ((x>15)||((x<=12)&&(x%5==2))) return
x-x/2;
else if ((4<=x)&&(x<=12)&&(x%2==0))
return (x+20);
else return x%2;
}</td><td>12</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>№
вар.</th><th>f</th><th>a</th></tr>
<tr><td>19</td><td>int f(int x)
{
if ((x>15)||((x<=12)&&(x%5==2))) return x-x/2;
else if ((4<=x)&&(x<=12)&&(x%2==0)) return (x+20);
else return x%2;
}</td><td>11</td></tr>
<tr><td>20</td><td>int f(int x)
{
if ((x>30)||((x<=12)&&(x%5==2))) return x-x/2;
else if ((4<=x)&&(x<=12)&&(x%2==0)) return (x+20);
else return x%2;
}</td><td>8</td></tr>
<tr><td>21</td><td>int f(int x)
{
if ((x>30)||((x<=12)&&(x%5==2))) return x-x/2;
else if ((4<=x)&&(x<=12)&&(x%2==0)) return (x+20);
else return x%2;
}</td><td>38</td></tr>
<tr><td>22</td><td>int f(int x)
{
if ((x>30)||((x<=12)&&(x%5==2))) return x-x/2;
else if ((4<=x)&&(x<=12)&&(x%23==0)) return (x+20);
else return x%2;
}</td><td>9</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>№ вар.</th><th>f</th><th>a</th></tr>
<tr><td>23</td><td>int f(int x)
{
if ((x>30)||((x<=12)&&(x%5==2))) return x-x/2;
else if ((4<=x)&&(x<=12)&&(x%3==0)) return (x+20);
else return x%2;
}</td><td>9</td></tr>
<tr><td>24</td><td>int f(int x)
{
if ((x>30)||((x<=12)&&(x%5==2))) return x-x/2;
else if ((4<=x)&&(x<=12)&&(x%3==1)) return (x+20);
else return x%2;
}</td><td>9</td></tr>
<tr><td>25</td><td>int f(int x)
{
if ((x>30)||((x<=12)&&(x%5==2))) return x-x/2;
else if ((4<=x)&&(x<=12)&&(x%3==1)) return (x+20);
else return x%2;
}</td><td>69</td></tr>
<tr><td>26</td><td>int f(int x)
{
if ((x>30)||((x<=12)&&(x%5==2))) return x-x/2;
else if ((4<=x)&&(x<=12)&&(x%3==1)) return (x+20);
else return x%2;
}</td><td>30</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>№ вар.</th><th>f</th><th>a</th></tr>
<tr><td>27</td><td>int f(int x)
{
if ((x%12==2)||((x<=12)&&(x%5==2)))
return x-x/2;
else if ((4<=x)&&(x<=12)&&(x%3==1))
return (x+20);
else return x%2;
}</td><td>26</td></tr>
<tr><td>28</td><td>int f(int x)
{
if ((x%12==2)||((x<=12)&&(x%5==2)))
return x-x/2;
else if ((4<=x)&&(x<=12)&&(x%3==1))
return (x+20);
else return x%2;
}</td><td>25</td></tr>
</table>

4. Контрольные вопросы

1. Дать определение функции.
2. Что такое область определения и область значений функции.
3. Привести определение композиции функций.
4. Как определяется табличное задание функции.
5. Что такое джойн двух функций.

Лабораторная работа 4. Перестановки, нумерующие биекции

1. Цель работы

Целью лабораторной работы является изучение основных свойств перестановок, понятия мощности множества, знакомство с понятием нумерующей биекции.

2. Краткие теоретические положения

Множество натуральных чисел от 1 до n или множество $\{1,2,...,n\}$ называется начальным отрезком $[1,n]$ натурального ряда и обозначается $\underline{n}$. Биективное отображение $p:\underline{n}\leftarrow\underline{n}$ называется n – перестановкой и задается таблицей вида $p=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$, где $\alpha_i = p(i), i=1,...,n$. Множество n-перестановок обозначается P_n. Таким образом, $P_n=\{p:\underline{n}\to\underline{n},\ p\in Bjk(\underline{n},\underline{n})\}$. Произведением $p\cdot q$ двух биекций $p,\ q\in P_n$ называется биекция $r\in P_n$ такая, что $r(k)=q(p(k)), k=1,...,n.$

Таким образом, произведение двух перестановок – это перестановка, которая получается, если сначала выполнить первую из перемножаемых перестановок, а затем вторую. Таким образом, имеем $p\cdot q = p * q$, то есть произведение перестановок, это джойн перестановок как отображений.

Пример 2.1. Найти произведение $p\cdot q$ и произведение $q\cdot p$ перестановок $p=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, и $q=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение

Найдем $p\cdot q$. Процесс вычисления реализуем в виде диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 1 & 2. \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 1 \end{array}$$

Таким образом, получили перестановку $p\cdot q=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Аналогичным образом находим $q\cdot p$:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 3 & 2 \end{array}$$

Получили: $q \cdot p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение задачи закончено.

Замечание. Из данного примера видно, что, вообще говоря, $p \cdot q \neq q \cdot p$, то есть операция умножения перестановок не является коммутативной.

Единичной перестановкой $e_n \in P_n$ называется перестановка вида $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$, то есть эта перестановка удовлетворяет соотношению $e(k) = k,\ k \in [1, n]$. Единичная перестановка обладает свойством: $e_n \cdot p = p \cdot e_n = p, \forall p \in P_n$. то есть единичная перестановка играет роль единицы при умножении перестановок.

Обратной перестановкой p^{-1} по отношению к перестановке $p \in P_n$ называется однозначно определенная перестановка $q \in P_n$ такая, что $q \cdot p = p \cdot q = e_n$.

Пример 2.2. Дана перестановка $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Найти обратную перестановку $p^{-1} \in P_n$.

Решение

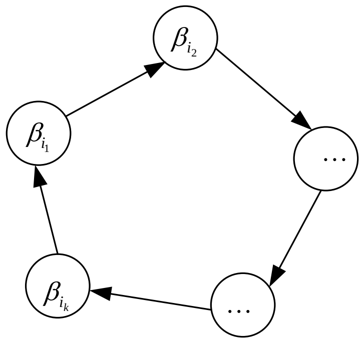
Для нахождения обратной перестановки достаточно поменять местами строки ее таблицы:

$$p^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Данный ответ является верным. Но его целесообразно привести к каноническому виду (то есть однозначно определенному) путем перестановки столбцов полученного ответа таким образом, чтобы в верхней строке получилась стандартная последовательность $1,2,3 \cdots, n$. Окончательный ответ имеет вид:

$$p^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Перестановка называется ***циклической или циклом длины*** k, если при ее действии часть элементов $1 \le \alpha_{i_1} < \alpha_{i_2} < \ldots < \alpha_{i_{n-k}} \le n$ множества $[1, n]$ остаются неподвижными, то есть $p(\alpha_{i_k}) = \alpha_{i_k}, k = 1, \ldots, n-k$, а остальные элементы этого множества $1 \le \beta_{i_1} < \beta_{i_2} < \ldots < \beta_{i_k} \le n$ переставляются по циклу в соответствии с диаграммой



и выполняется соотношение

$$p(\beta_j) = p(\beta_{j+1}),\ j = 1, \ldots, k-1 \text{ è } p(\beta_k) = p(\beta_1).$$

Такая перестановка записывается в виде $p = (\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \ldots, \beta_{i_k})$.

Пример 2.3.

Дан цикл $p = (3, 6, 7) \in P_8$. Записать эту перестановку в стандартном виде.

Решение

Элементы множества $\{1,2,4,5,8\} = [1,8] \setminus \{3,6,7\}$ остаются неподвижными при действии данной перестановки, а элементы множества $\{3, 6, 7\}$ переставляются по схеме: $3 \to 6 \to 7 \to 3$. Получаем перестановку

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 6 & 4 & 5 & 7 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

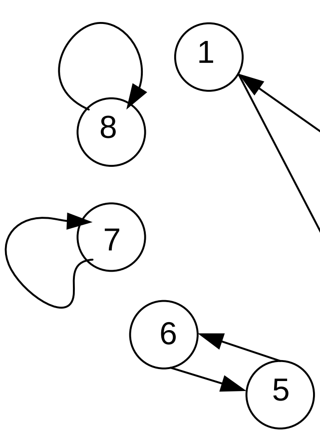
Всякая перестановка, может быть представлена в виде произведения непересекающихся, то есть не имеющих общих элементов циклов. Непересекающиеся циклы коммутируют, то есть перестановочны, поэтому порядок записи циклов в таком разложении не существенен.

Пример 2.4.

Перестановку $p=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 4 & 2 & 1 & 3 & 6 & 5\end{pmatrix}$ представить в виде произведения циклов.

Решение

Представим перестановку в виде ориентированного графа на множестве вершин $\{1,2,3,4,5,6\}$. Расположение вершин графа произвольно, выбираем расположение по кругу. Образы элементов изображаем ориентированными ребрами. Получаем граф:



Из визуального анализа данного графа получаем, что в графе имеется ориентированный цикл длины 3, орцикл длины 2 и 3 элементарных цикла-петли длины 1. Получаем искомое разложение $p=(5,6)(4,3,1)(7)(2)(8)$ в виде циклов. Порядок циклов в разложении и выбор первого элемента каждого цикла не существенен. Если порядок $n=8$ перестановки предполагается известным, то полученное разложение на циклы можно записать более кратко $p=(5,6)(4,3,1)$.

Порядком $ord(p)$ перестановки $p\in P_n$ называется наименьшее положительное целое число k такое, что $p^k=e_n$.

Пусть перестановка p разложена в произведение m непересекающихся циклов C_i с длинами $l_i=L(C_i)$, $i=1,\ldots,m$. Тогда порядок перестановки находится по формуле $ord(p)=NOK(l_1,\ldots,l_m)$

Например, для данной перестановки имеем $p=(5,6)(4,3,1)$. Отсюда $ord(o)=NOK(L(5,6),L(4,3,1))=NOK(2,3)=6$.

Транспозицией называется перестановка, являющаяся циклом длины 2. То есть, транспозиция фактически является перестановкой некоторых двух элементов $i,j\in[1,n]$. Такая транспозиция записывается в виде τ_{ij}. Всякая перестановка может быть записана как произведение транспозиций.

Пример 2.5.

Представить перестановку $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ как произведение транспозиций.

Решение

Используем результат предыдущего примера, в котором было получено разложение данной перестановки в произведение циклов: $p = (5{,}6)(4{,}3{,}1)$. В данном разложении первый цикл $c_1 = (5{,}6)$ уже является транспозицией, а второй цикл $c_2 = (4{,}3{,}1)$ можно представить в виде произведения двух перестановок $c_2 = (4{,}3{,}1) = (4{,}3) \cdot (4{,}1)$, то есть циклический сдвиг можно реализовать серией двух последовательных парных обменов, при которых первый элемент 4 «проталкивается» вдоль цикла.

Таким же образом любой цикл $c = \left(\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, ..., \beta_{i_k}\right)$ длины k можно представить в виде произведения $k-1$ транспозиции в виде $c = \left(\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, ..., \beta_{i_k}\right) = \left(\beta_{i_1}, \beta_{i_2}\right) \cdot \left(\beta_{i_1}, \beta_{i_3}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\beta_{i_1}, \beta_{i_k}\right)$.

В данном примере получаем разложение перестановки на транспозиции: $p = (5{,}6)(4{,}3{,}1) = (5{,}6) \cdot (4{,}3) \cdot (4{,}1) = \tau_{56} \cdot \tau_{43} \cdot \tau_{41}$. В этом разложении имеется три перестановки, то есть нечетное число. Такая перестановка называется ***нечетной*** и это записывается в виде $odd(p) = 1$. Если число транспозиций в разложении перестановки четное, то перестановка называется ***четной*** и для нее выполняется свойство $odd(p) = 0$.

3. Задание

Для двух перестановок $p, q \in P_8$ найти:

a) их произведение $p \cdot q$;

b) произведение $q \cdot p$;

c) обратную перестановку p^{-1};

d) Обратную перестановку q^{-1};

e) Разложение перестановки p в произведение циклов;

f) Разложение перестановки q в произведение циклов:

g) Порядок перестановки ord(p);

k) Порядок перестановки ord(q);

l) Разложение перестановки *p* в произведение транспозиций;

m) Разложение перестановки *q* в произведение транспозиций;

n) Четность ord(*p*) перестановки *p*;

o) Четность ord(*q*) перестановки *q*;

Для выполнения пунктов задания следовать примерам, изложенных в теоретической части.

Индивидуальные задания

№ вар.	p	q
1	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&3&1&2&4&5&8&6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&3&1&7&4&5&8&6\end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&3&1&7&4&8&5&6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&1&3&7&4&8&5&6\end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&1&3&7&6&8&5&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&1&3&7&6&8&2&4\end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&1&3&7&2&8&6&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&7&3&1&2&8&6&4\end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&7&3&1&4&8&6&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&7&8&1&4&3&6&2\end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&5&8&1&4&3&6&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&5&8&1&3&4&6&2\end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&5&8&1&3&4&2&6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&5&8&1&3&4&2&6\end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&5&3&1&8&4&2&6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&4&3&1&8&5&2&6\end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&4&3&1&6&5&2&8\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&4&3&1&6&5&2&7\end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&4&3&2&6&5&1&7\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&2&3&4&6&5&1&7\end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&5&8&1&3&4&2&6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&5&3&1&8&4&2&6\end{pmatrix}$
12	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&7&3&1&4&8&6&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&1&3&7&6&8&2&4\end{pmatrix}$

№ вар.	p	q
13	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&4&3&1&8&5&2&6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&5&8&1&3&4&2&6\end{pmatrix}$
14	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&4&6&1&3&5&2&8\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&4&3&1&7&5&2&6\end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&5&8&4&3&1&2&6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&4&3&1&6&5&7&8\end{pmatrix}$
16	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&1&4&7&6&8&2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&6&3&1&4&8&7&2\end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&5&8&1&3&4&2&6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&2&8&1&3&4&5&6\end{pmatrix}$
18	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&4&3&1&6&5&2&8\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&1&5&7&6&8&2&4\end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&4&1&6&3&5&2&8\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&5&3&1&7&4&2&6\end{pmatrix}$
20	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&5&8&1&3&4&6&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&6&1&3&4&8&7&2\end{pmatrix}$
21	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&4&3&5&6&1&7&8\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&2&8&1&3&4&5&7\end{pmatrix}$
22	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&1&5&7&6&3&2&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&4&8&1&3&5&6&2\end{pmatrix}$
23	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&8&3&1&4&6&7&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&4&1&7&6&8&2&3\end{pmatrix}$
24	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&5&2&4&3&1&8&6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&8&2&1&3&4&5&6\end{pmatrix}$
25	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&6&1&4&3&8&7&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&8&1&6&3&5&2&4\end{pmatrix}$

Контрольные вопросы

1. Что называется перестановкой.
2. Дать определение произведения перестановок.
3. Что такое обратная перестановка.
4. Дать определение порядка перестановки.
5. Какая перестановка называется циклом.

Лабораторная работа 5 Изучение множеств с помощью их числовых кодов

1. Цель работы

Целью лабораторной работы является получение навыков исследования множества с помощью аппарата характеристических функций и числового кодирования подмножеств.

2. Краткие теоретические положения

Одномерный булевский куб это $B^1 = \{0,1\}$ – множество, состоящее из 0 и 1.

Многомерный булевский куб
$B^n = B^1 \times \ldots \times B^1 = \{(x_1,\ldots,x_n), x_i \in \{0,1\}\}$ – множество n-координатных двоичных наборов, n-мерный булевский куб. При этом $\left|B^n\right| = 2^n$ – мощность множества B^n, например, $\left|B^3\right| = 8$. Для каждого двоичного вектора $\bar{x}^n = (x_1,\ldots,x_n) \in B^n$ определяется число $J(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot 2^{n-i}$ десятичный эквивалент двоичного набора $\bar{x}^n$ или номер набора, при этом, где правая часть соотношения принадлежности это множество всех возможных номеров двоичных наборов.

Пример 2.1.

$J((10101)) = 1\cdot 2^{5-1} + 0\cdot 2^{5-2} + 1\cdot 2^{5-3} + 0\cdot 2^{5-4} + 1\cdot 2^{5-5} = 16 + 4 + 1 = 21.$

Соответствие $x \to J(x)$ взаимно-однозначно, то есть является нумерующей биекцией

$J : B^n \to \left[0, 2^n - 1\right]$.

Пример 2.2

Найти 5-мерный двоичный набор $\bar{x}^5$, для которого $J(\bar{x}) = 19$.

Решение

Используем таблицу весов двоичных разрядов:

i	5	4	3	2	1	0
$w_i = 2^i$	32	16	8	4	2	1

Имеем начальное число $m = 19$. Находим наибольший вес $w_i \le 19$. Таким весом является $w_4 = 16$. Выделяем найденный максимальный вес разряда, получаем $m = 19 = 16 + 3 = w_4 + m_1$.

К остатку $m_1 = 3$ применяем тот же алгоритм. Получаем $m_1 = 2 + 1 = w_1 + m_2$, где $m_2 = 1$ – новый остаток.

К полученному новому остатку применяем тот же алгоритм последовательного выделения весов. Получаем $m_2 = 1 = 1 + 0 = w_0 + 0$. Получили последний остаток $m_3 = 0$.

Работа алгоритма закончена. В результате получено разложение исходного числа $m = 19$ по степеням 2: $19 = w_4 + w_1 + w_0$. Получаем ответ задачи: (10011).

Пусть дан универсум U, состоящий из n различных элементов: $U = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Для любого подмножества $A \subseteq U$ в этом универсуме определен характеристический двоичный вектор $\overline{h}_A \in B^n$, имеющий следующие компоненты: $\overline{h}_i = \begin{cases} 1, & x_i \in A \\ 0, & x_i \notin A \end{cases}$ и десятичный эквивалент $d(A) = J(\overline{h}_A) = \sum_{i=1}^{n} h_i \cdot 2^{n-i}$.

Пример 2.

Дан универсум $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Найти десятичный эквивалент подмножества универсума $A = \{x_2, x_3\}$.

Решение

Строим характеристический булев вектор: $\overline{h}_A = (0,1,1,0)$. Находим десятичный эквивалент данного подмножества: $d(A) = J(\overline{h}_A) = 0 \cdot 2^{4-1} + 1 \cdot 2^{4-2} + 1 \cdot 2^{4-3} + 0 \cdot 2^{4-4} =$

$= 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 = 12$. Итак, данное подмножество характеризуется своим десятичным эквивалентом $d(A) = 12$.

Пример 2.3.

Дан универсум $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Найти состав подмножества A универсума, которое имеет десятичный эквивалент $d(A) = 14$.

Решение

Находим 4-разрядное двоичное число, соответствующее десятичному числу 14:

$$14 = 8 + 6 = 8 + 4 + 2 = 2^3 + 2^2 + 2^1 = (1,1,1,0).$$

Выписываем состав искомого подмножества:

$$A = \{x_1, x_2, x_3\}.$$

3. Задания

Задание 1. Дан универсум $U = \{u_1, ..., u_m\}$ и подмножество $A \subseteq U$ этого универсума. Найти десятичный числовой код $d(A)$ данного подмножества. Считать, что элементы универсума пронумерованы в естественном порядке слева направо.

Индивидуальные задания

№ вар	U	A
1	$\{1,2,a,uu,88\}$	$\{2,a,88\}$
2	$\{1,j,a,uu,8\}$	$\{1,j,uu,8\}$
3	$\{p,2,a,uu,u8\}$	$\{p,2,a,uu\}$
4	$\{1,2,a,u1,f8\}$	$\{a,u1,f8\}$
5	$\{v,2,a,uu,x8\}$	$\{v,2,uu\}$
6	$\{1,d,a,uu,d8\}$	$\{d,a,d8\}$
7	$\{1,a2,a,uu,18\}$	$\{1,a2,uu\}$
8	$\{1,7,a,uu,8i\}$	$\{1,a,uu,8i\}$
9	$\{1,2,a,u,8\}$	$\{1,2,u,8\}$
10	$\{1,2,a,hu,g\}$	$\{1,2,a,hu,g\}$
11	$\{1,2,a,u1u,j8\}$	$\{1,2,a,j8\}$
12	$\{1,d,a,uu,kk\}$	$\{1,a,uu,kk\}$
13	$\{1,21,a,uu,kl\}$	$\{1,21,kl\}$
14	$\{1,2,a,2u,kh\}$	$\{1,a,2u\}$
15	$\{1,f,a,uu,bb\}$	$\{f,a,uu,bb\}$
16	$\{1,2,wa,uu,l8\}$	$\{1,2,wa,uu\}$
17	$\{1,2,a,6u,g8\}$	$\{1,2,a,6u,g8\}$
18	$\{1,2g,a,uu,ff\}$	$\{1,2g,uu,ff\}$
19	$\{1,2s,a,uu,dd\}$	$\{1,a,uu,dd\}$
20	$\{j,f,a,uu,bb\}$	$\{f,a,uu\}$
21	$\{1,2,a,6u,gg\}$	$\{1,2,gg\}$
22	$\{1,2,22,uu,l8\}$	$\{2,22\}$
23	$\{ll,d,a,uu,d8\}$	$\{ll,d8\}$
24	$\{1,21,a,u,kl\}$	$\{1,21,u,kl\}$
25	$\{1,2g,a,uu,13\}$	$\{1,a,13\}$

Задание 2 Дан универсум $U = \{u_1, ..., u_m\}$ и целое число $q \in \lfloor 0, 2^m - 1 \rfloor$. Найти подмножество $A \subseteq U$ универсума, для которого десятичный числовой код $d(A)$ (каноническая нумерация) равен заданному числу q. Считать, что элементы универсума пронумерованы в естественном порядке слева направо.

Индивидуальные задания

№ вар.	U	$q = d(A)$
1	$\{1, 2, a, uu, 88\}$	17
2	$\{1, j, a, uu, 8\}$	19
3	$\{p, 2, a, uu, u8\}$	11
4	$\{1, 2, a, u1, f8\}$	7
5	$\{v, 2, a, uu, x8\}$	23
6	$\{1, d, a, uu, d8\}$	30
7	$\{1, a2, a, uu, 18\}$	28
8	$\{1, 7, a, uu, 8i\}$	14
9	$\{1, 2, a, u, 8\}$	16
10	$\{1, 2, a, hu, g\}$	5
11	$\{1, 2, a, u1u, j8\}$	12
12	$\{1, d, a, uu, kk\}$	16
13	$\{1, 21, a, uu, kl\}$	11
14	$\{1, 2, a, 2u, kh\}$	13
15	$\{1, f, a, uu, bb\}$	26
16	$\{1, 2, wa, uu, l8\}$	15
17	$\{1, 2, a, 6u, g8\}$	4
18	$\{1, 2g, a, uu, ff\}$	31
19	$\{1, 2s, a, uu, dd\}$	0
20	$\{j, f, a, uu, bb\}$	11
21	$\{1, 2, a, 6u, gg\}$	12
22	$\{1, 2, 22, uu, l8\}$	18
23	$\{ll, d, a, uu, d8\}$	21
24	$\{1, 21, a, u, kl\}$	22
25	$\{1, 2g, a, uu, 13\}$	24

4. Контрольные вопросы

1. Дать определение одномерного и n-мерного булевского куба.
2. Как по двоичному набору строится его десятичный эквивалентный код, как по десятичному ислу находится его двоичное представление?
3. Как строится десятичный исловой код данного подмножества универсума?
4. Как по дестичному коду находится соответствующее подмножество?

Лабораторная работа 6. Формула включений и исключений

1. Цель работы

Целью лабораторной работы является изучение типичных применений формулы включений и исключений.

2. Краткие теоретические положения

Пусть в универсуме $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ заданы конечные подмножества $A_1, A_2, \ldots, A_k$.

Тогда справедливы формулы.

Формула включений и исключений для двух подмножеств:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

При подсчете $|A_1 \cup A_2|$ мы включаем и подсчитываем элементы как подмножества A_1 в количестве $|A_1|$, так и элементы подмножества A_2 в количестве $|A_2|$. При этом элементы их пересечения $A_1 \cap A_2$ учитывались дважды и их нужно исключить путем вычитания числа $|A_1 \cap A_2|$).

Далее для $k = 3$.

Формула включений и исключений для трех множеств

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| +$$
$$+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

Здесь мы удаляем лишние парные пересечения, но тройное пересечение удалено трижды, а в сумме $|A_1| + |A_2| + |A_3|$ оно имеет две избыточные копии, следовательно, для компенсации число $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$ необходимо добавить.

И в общем случае:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| = \sum_{i=1}^{k} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le k} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < m \le k} |A_i \cap A_j \cap A_m| + \cdots +$$
$$+ (-1)^{k-1} \left|\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right|$$

Пример 2.1.

В классе $N = 25$ человек. Из них $N_1 = 6$ занимаются боксом, $N_2 = 13$ – футболом, $N_{12} = 3$ – и боксом и футболом. Сколько человек не занимается этими видами спорта?

Решение

Пусть A_1 – множество школьников, занимающихся боксом, A_2 – множество школьников занимающихся футболом. Тогда $A_1 \cap A_2$ множество школьников, которые занимаются обоими этими видами спорта. По условию имеем $|A_1| = 6, |A_2| = 13$,

$|A_1 \cap A_2| = 3$. По формуле включения-исключения получаем $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| = 6 + 13 - 3 = 16$. Нас интересует мощность дополнения $\overline{A_1 \cup A_2}$. По формуле дополнения имеем: $|\overline{A_1 \cup A_2}| = |U| - |A_1 \cup A_2| = 25 - 16 = 9$. Итак, 9 учащихся класса не занимается ни боксом, ни футболом.

Пример 2.2.. Сколько целых чисел в интервале $[1, 677]$ не делятся ни на 3, ни на 4, ни на 6.

Решение

Пусть A_3, A_4, A_6 подмножества чисел интервала $[1, 677]$, делящихся соответственно на 3, 4, 6. Найдем мощности этих множеств, их пересечений и их тройного пересечения.

Имеем:

$A_3 = \{3 \cdot k \mid k \in N, 1 \le 3 \cdot k \le 677\}$. Ограничения, фигурирующие в описании множества A_3 можно записать в виде $\frac{1}{3} \le k \le \frac{677}{3}$ или $\frac{1}{3} \le k \le 225\frac{2}{3}$.

Так как k – целое число, можно записать $1 \le k \le \left\lfloor 225\frac{2}{3} \right\rfloor$, $1 \le k \le 225$. Видим, что имеется биективное соответствие $A_3 \approx [1, 225]$.

Отсюда получаем $|A_3| = 225$.

Аналогично получаем $A_4 = \{4 \cdot k \mid k \in N, 1 \le 4 \cdot k \le 677\}$. Далее получаем: $1 \le k \le \left\lfloor 169\frac{1}{4} \right\rfloor$, $1 \le k \le 169$.

Отсюда $|A_4| = 169$.

Таким же методом находим $A_6 = \{6 \cdot k \mid k \in N, 1 \le 6 \cdot k \le 677\}$, $1 \le k \le 112\frac{5}{6}$, $1 \le k \le 112$.

Отсюда $|A_6| = 112$.

Найдем мощности попарных пересечений множеств A_3, A_4, A_6.

Имеем $A_3 \cap A_4 = A_{\text{Îîê}\ (3,4)} = A_{12}$.

Дале, $A_{12} = \{12 \cdot k \mid 1 \le 12 \cdot k \le 677\}$. Можно записать $1 \le k \le \left\lfloor 56\frac{5}{12} \right\rfloor$ или $1 \le k \le 56$, откуда $|A_{12}| = |A_3 \cap A_4|$=56.

Таким же образом $A_3 \cap A_6 = A_{Nok(3,6)} = A_6$.

Отсюда $|A_3 \cap A_6| = |A_6| = 112$.

Для третьего пересечения получаем $A_4 \cap A_6 = A_{Nok(4,6)} = A_{12}$. Поэтому $|A_4 \cap A_6| = |A_{12}| = 56$.

Остановимся на методике вычисления наименьшего общего кратного $Nok(4,6) = 12$. Используем метод разложения на простые множители: $4 = 2^2 \cdot 3^0$, $6 = 2^1 \cdot 3^1$. Отсюда $Nok(4,6) = 2^{\max(2,1)} \cdot 3^{\max(0,1)} = 2^2 \cdot 3^1 = 12$.

Продолжим решение задачи.

Найдем мощность тройного пересечения $A_3 \cap A_4 \cap A_6 = A_{Nok(3,4,6)} = A_{12}$. Это вычисление уже выполнялось, поэтому получаем $|A_3 \cap A_4 \cap A| = |A_{12}| = 56$.

По формуле включения-исключения далее имеем

$$|A_3 \cup A_4 \cup A_6| = |A_3| + |A_4| + |A_6| - |A_3 \cap A_4| -$$
$$-|A_3 \cap A_6| - |A_4 \cap A_6| + |A_3 \cap A_4 \cap A_6| = 225 + 169 + 56 - 56 -$$
$$-112 - 56 + 56 = 287.$$

Окончательно, по формуле дополнения получаем

$$\left|\overline{A_3 \cup A_4 \cup A_6}\right| =$$
$$= [1, 677] - |A_3 \cup A_4 \cup A_6| = 677 - 287 = 390.$$

Формула включения-исключения допускает значительное уточнение. При этом используется важное понятие констинуенты относительно данной системы базовых множеств. Пояснение этого понятия приведем для случая трех базовых множеств.

Пусть даны универсум $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ и три подмножества A_1, A_2, A_3, которые называются базовыми или исходными. Констинуентой $C_{\overline{\alpha}} = C_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}$, $\alpha_i \in \{0,1\}$ в алгебре подмножеств универсума U, порожденной системой базовых множеств $\{A_1, A_2, A_3\}$, называется подмножество $C_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} = A_1^{\alpha_1} \cap A_2^{\alpha_2} \cap A_3^{\alpha_3}$, где использовано соотношение $A^\alpha = \begin{cases} A, \alpha = 1 \\ \overline{A}, \alpha = 0 \end{cases}$.

Например, $C_{(0,0,1)} = A_1^0 \cap A_2^0 \cap A_3^1 = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3$.

Таким образом, ***констинуента*** – это пересечение базовых множеств или их дополнений в зависимости от компонент булевского вектора $\overline{\alpha} \in B^3$, индексирующего констинуенту.

Для трех базовых множеств имеется $2^3 = 8$ констинуент, начиная от констинуенты $C_0 = C_{(0.0.0)} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$ и заканчивая констинуентой $C_7 = C_{(1,1,1)} = A_1 \cap A_2 \cap A_3$. Констинуенты взаимно не пересекаются, то есть $C_{\overline{\alpha}} \cap C_{\overline{\beta}} = \phi, \overline{\alpha} \neq \overline{\beta}$ и их объединение равно всему универсуму, то есть $U = \bigcup\limits_{\overline{\alpha} \in B^3} C_{\overline{\alpha}}$.

Важность констинуент объясняется их свойством атомности: любой подмножество, полученное из базовых множеств $\{A_1, A_2, A_3\}$ применением теоретико-множественных операций, то есть применением формулы алгебры множеств после всех упрощений представляется в виде объединения (непересекающихся) констинуент, входящих в данное множество.

Таким образом, с помощью констинуент мы описываем алгебру подмножеств, порожденную данными тремя множествами $\{A_1, A_2, A_3\}$, то есть порожденную подалгебру булеана $P(U)$ вида $\Lambda(U, \{A_1, A_2, A_3\})$.

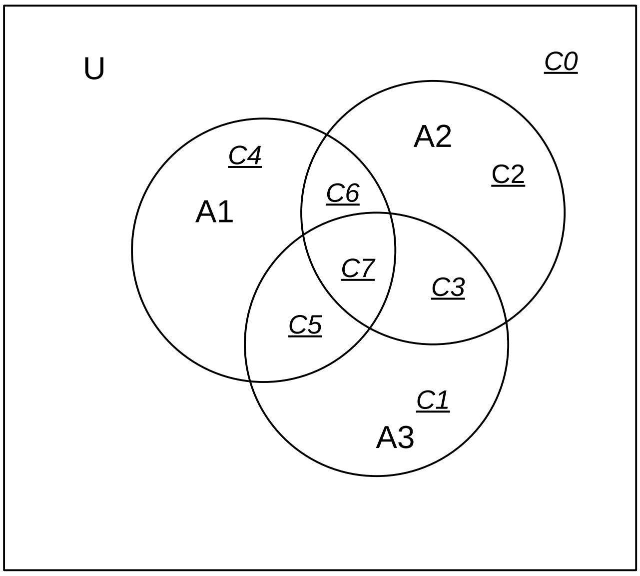
Мы имеем $\Lambda(U, \{A_1, A_2, A_3\}) = \left\{ D \subseteq U \mid D = \bigcup\limits_{\{\overline{\alpha} | C_{\overline{\alpha}} \in D\}} C_{\overline{\alpha}} \right\}$.

Пусть нам даны мощности универсума, базовых множеств A_1, A_2, A_3, их парных пересечений и тройного пересечения.

Таким образом, имеем 8 независимых данных. Из этих данных мы можем найти также 8 независимых величин мощностей всех констинуент. Эти подсчеты удобнее всего пояснить следующей таблицей:

$\overline{\alpha}$	$C_{\overline{\alpha}}$	$N_{\overline{\alpha}}$
$(0,0,0)$	$C_0 = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3$	$N((1-\alpha_1)\cdot(1-\alpha_2)\cdot((1-\alpha_3)))=$ $= N(1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3+\alpha_1\cdot\alpha_2+\alpha_1\cdot\alpha_3+\alpha_2\cdot\alpha_3-$ $-\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3)=$ $= N - N_1 - N_2 - N_3 + N_{12} + N_{13} + N_{23} - N_{123}$
$(0,0,1)$	$C_1 = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3$	$N((1-\alpha_1)\cdot(1-\alpha_2)\cdot\alpha_3)=$ $= N(\alpha_3-\alpha_1\cdot\alpha_3-\alpha_2\cdot\alpha_3+\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3)=$ $= N_3 - N_{13} - N_{23} + N_{123}$
$(0,1,0)$	$C_2 = \overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3$	$N((1-\alpha_1)\cdot(\alpha_2)\cdot(1-\alpha_3))=$ $= N(\alpha_2-\alpha_1\cdot\alpha_2-\alpha_2\cdot\alpha_3+\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3)=$ $= N_2 - N_{12} - N_{23} + N_{123}$
$(0,1,1)$	$C_3 = \overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3$	$N((1-\alpha_1)\cdot(\alpha_2)\cdot(\alpha_3))=$ $= N(\alpha_2\cdot\alpha_3-\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3)=$ $= N_{23} - N_{123}$
$(1,0,0)$	$C_4 = A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3$	$N((\alpha_1)\cdot(1-\alpha_2)\cdot(1-\alpha_3))=$ $= N(\alpha_1-\alpha_1\cdot\alpha_3-\alpha_1\cdot\alpha_2+\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3)=$ $= N_1 - N_{13} - N_{12} + N_{123}$
$(1,0,1)$	$C_5 = A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3$	$N((\alpha_1)\cdot(1-\alpha_2)\cdot(\alpha_3))=$ $= N(\alpha_1\cdot\alpha_3-\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3)=$ $= N_{13} - N_{123}$
$(1,1,0)$	$C_6 = A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3$	$N((\alpha_1)\cdot(\alpha_2)\cdot(1-\alpha_3))=$ $= N(\alpha_1\cdot\alpha_2-\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3)=$ $= N_{12} - N_{123}$
$(1,1,1)$	$C_7 = A_1 \cap A_2 \cap A_3$	$N((\alpha_1)\cdot(\alpha_2)\cdot(\alpha_3))=$ $= N(\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3)=$ $= N_{123}$

Расположение констинуент можно проиллюстрировать следующей диаграммой:



Пример 2.3.

Даны мощность универсума, мощности трех базовых подмножеств A_1, A_2, A_3 универсума, а также мощности их парных и тройного пересечений. Дана также формула $D = f(A_1, A_2, A_3)$, выражающее производное множество D через базовые. Найти мощности всех констинуент данного порождающего набора подмножеств, выписать констинуентный состав каждого базового множества и производного множества D, а также мощность производного множества.

Дано: $|U| = 100$ – число студентов в потоке;

$|A_1| = N_1 = 30$ – число студентов, изучающих английский язык;

$|A_2| = N_2 = 42$ – число студентов, изучающих французский язык;

$|A_3| = N_3 = 38$ – число студентов, изучающих немецкий язык;

$|A_1 \cap A_2| = N_{12} = 12$ – число студентов, изучающих английский и французский;

$|A_1 \cap A_3| = N_{13} = 6$ – число студентов, изучающих английский и немецкий;

$|A_2 \cap A_3| = N_{23} = 8$ – число студентов, изучающих французский и немецкий;

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = N_{123} = 3$ – число студентов, изучающих все три языка;

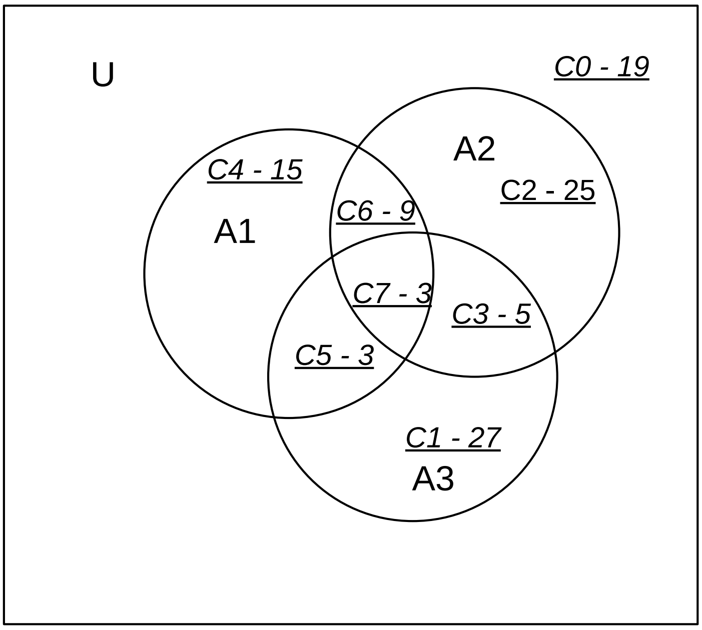
Найти мощность множества $D = \left(\left(A_1 \oplus A_2\right) \setminus A_3\right)$ студентов, которые изучают английский или французский языки, но не оба и при этом не изучают немецкий язык.

Решение

Найдем мощности констинуент в следующей таблице.

$\overline{\alpha}$	$C_{\overline{\alpha}}$	$N_{\overline{\alpha}}$
$(0,0,0)$	$C_0=\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3$	$=N-N_1-N_2-N_3+N_{12}+N_{13}+N_{23}-N_{123}$ $=100-30-42-38+12+6+8-3=$ $=19$
$(0,0,1)$	$C_1=\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap A_3$	$N_3-N_{13}-N_{23}+N_{123}=$ $=38-6-8+3=27$
$(0,1,0)$	$C_2=\overline{A}_1\cap A_2\cap\overline{A}_3$	$N_2-N_{12}-N_{23}+N_{123}=$ $=42-12-8+3=25$
$(0,1,1)$	$C_3=\overline{A}_1\cap A_2\cap A_3$	$N_{23}-N_{123}=8-3=5$
$(1,0,0)$	$C_4=A_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3$	$N_1-N_{13}-N_{12}+N_{123}=$ $=30-6-12+3=15$
$(1,0,1)$	$C_5=A_1\cap\overline{A}_2\cap A_3$	$N_{13}-N_{123}=$ $=6-3=3$
$(1,1,0)$	$C_6=A_1\cap A_2\cap\overline{A}_3$	$N_{12}-N_{123}=$ $=12-3=9$
$(1,1,1)$	$C_7=A_1\cap A_2\cap A_3$	$N_{123}=3$

Для проверки расчета изобразим диаграмму констинуент вместе с их найденными мощностями.



Суммируя мощности констинуент, составляющих каждое базовое множество и сопоставляя найденные суммы с данными мощностями базовых множеств, выполняем проверку расчета.

Выпишем констинуентный состав базовых подмножеств (эта часть решения не зависит от данных по мощностям):

$$A_1 = (C_4 \cup C_5 \cup C_6 \cup C_7)$$

$$A_2 = (C_2 \cup C_3 \cup C_7 \cup C_6)$$

$$A_3 = (C_1 \cup C_3 \cup C_5 \cup C_7)$$

Найдем констинуентный состав производного множества $D = ((A_1 \oplus A_2) \setminus A_3)$. При этом, так как констинуенты не пересекаются, выполняем действия с множествами, как если бы их элементами были сами констинуентты.

Имеем:

$$A_1 \oplus A_2 = (C_4 \cup C_5 \cup C_6 \cup C_7) \oplus (C_2 \cup C_3 \cup C_7 \cup C_6) =$$

$$= (C_4 \cup C_5 \cup C_2 \cup C_3)$$

$$D = ((A_1 \oplus A_2) \setminus A_3) = (C_4 \cup C_5 \cup C_2 \cup C_3) \setminus (C_1 \cup C_3 \cup C_5 \cup C_7) =$$

$$= (C_2 \cup C_4)$$

Суммируем мощности констинуент, составляющих множество D: $|D| = |C_2| + |C_4| = 15 + 25 = 40$. Итак. 40 студентов потока учат английский или французский языки, но не оба вместе и при этом не изучают немецкий язык.

3. Задание

Решить три задачи комбинаторики, в которых используется формула включений и исключений. Ответить на контрольные вопросы.

Индивидуальные задания

Задание 1. В классе учится N учащихся. Из них боксом занимаются N_1 человек, футболом занимаются N_2 человек. Обоими видами спорта занимается N_{12} школьников. Найти количество учащихся класса, которые не занимаются ни футболом, ни боксом.

№ вар.	N	N_1	N_2	N_{12}
1	20	12	5	3
2	30	11	8	3
3	23	6	5	2
4	34	7	4	2
5	27	12	7	4

№ вар.	N	N_1	N_2	N_{12}
6	19	10	5	4
7	22	9	5	4
8	23	8	3	1
9	25	6	6	4
10	30	9	6	3
11	19	10	3	1
12	18	11	3	1
13	21	8	2	1
14	20	8	4	3
15	20	7	6	3
16	23	10	6	5
17	34	20	12	6
18	28	12	6	5
19	32	10	4	1
20	23	8	9	3
21	33	12	10	6
22	23	7	4	2
23	24	8	8	1
24	26	10	12	4
25	29	12	11	7
26	31	12	17	8
27	30	2	1	0

Задание 2. Найти количество чисел в интервале от 1 до M, которые не делятся ни на k_1, ни на k_2, ни на k_3.

Индивидуальные задания

№ вар.	M	k_1	k_2	k_3
1	566	4	5	2
2	234	2	4	5
3	198	3	4	6
4	189	6	8	4
5	156	7	6	2
6	897	8	3	6
7	1000	3	5	4
8	999	8	7	4
9	1200	6	5	4

№ вар.	M	k_1	k_2	k_3
10	134	12	5	10
11	874	4	5	8
12	345	5	4	8
13	987	8	3	9
14	456	9	4	6
15	733	10	3	3
16	944	3	5	9
17	773	5	4	6
18	567	3	4	7
19	456	3	6	9
20	566	12	6	7
21	788	2	7	11
22	920	8	11	14
23	456	7	14	28
24	189	23	11	12
25	345	12	6	8
26	567	3	5	8

Задание 3. Даны мощность универсума, мощности трех базовых подмножеств A_1, A_2, A_3 универсума, а также мощности их парных и тройного пересечений. Дана также формула $D = f(A_1, A_2, A_3)$, выражающее производное множество D через базовые. Найти мощности всех констинуент данного порождающего набора подмножеств, выписать констинуентный состав каждого базового множества и производного множества D, а также мощность производного множества.

Индивидуальные задания

№ вар.	N	N_1	N_2	N_3	N_{12}	N_{13}	N_{23}	N_{123}	D
1	120	30	35	32	10	13	8	3	$((A_1 \cup A_2) \setminus A_3)$
2	112	45	29	34	12	8	12	4	$((A_1 \cup A_2) \oplus A_3)$
3	200	34	32	45	12	12	11	2	$((A_1 \oplus A_2) \oplus A_3)$
4	117	35	34	34	13	11	13	2	$((A_1 \oplus A_2) \cup A_3)$
5	120	29	45	35	8	13	10	1	$((A_1 \setminus A_2) \cup A_3)$
6	100	32	34	29	12	10	12	2	$((A_1 \setminus A_2) \setminus A_3)$

№ вар.	N	N_1	N_2	N_3	N_{12}	N_{13}	N_{23}	N_{123}	D
7	112	34	35	45	11	12	12	2	$((A_1 \setminus A_2) \cap A_3)$
8	114	45	34	34	13	12	10	3	$((A_1 \oplus A_2) \cap A_3)$
9	113	34	35	34	10	13	12	3	$((A_1 \cap A_2) \oplus A_3)$
10	89	35	29	35	12	8	12	3	$((A_1 \setminus A_2) \cup A_3)$
11	99	29	45	29	12	12	13	3	$((A_1 \cap A_2) \cup A_3)$
12	200	45	34	45	13	11	8	2	$((A_1 \setminus A_2) \cup A_3)$
13	117	34	35	34	8	8	12	2	$((A_1 \setminus A_2) \setminus A_3)$
14	120	35	34	35	12	12	12	3	$((A_1 \setminus A_2) \cap A_3)$
15	100	29	35	34	11	11	11	3	$((A_1 \oplus A_2) \cup A_3)$
16	112	32	29	35	13	13	13	4	$((A_1 \setminus A_2) \cup A_3)$
17	200	34	35	29	8	10	10	2	$((A_1 \setminus A_2) \setminus A_3)$
18	117	34	29	45	12	12	12	2	$((A_1 \setminus A_2) \cap A_3)$
19	120	35	45	34	11	12	12	1	$((A_1 \oplus A_2) \cap A_3)$
20	100	29	34	35	13	13	13	2	$((A_1 \cup A_2) \setminus A_3)$
21	112	45	35	34	10	8	10	2	$((A_1 \cup A_2) \oplus A_3)$
22	200	34	32	35	12	12	12	3	$((A_1 \oplus A_2) \oplus A_3)$
23	117	35	31	29	12	11	12	3	$((A_1 \oplus A_2) \cup A_3)$
24	120	34	29	45	13	13	13	3	$((A_1 \setminus A_2) \setminus A_3)$
25	100	35	45	34	12	10	12	3	$((A_1 \setminus A_2) \cap A_3)$
26	112	29	34	35	11	12	11	2	$((A_1 \oplus A_2) \cup A_3)$
27	200	45	35	29	13	12	8	2	$((A_1 \setminus A_2) \cup A_3)$
28	117	34	34	45	10	13	12	1	$((A_1 \setminus A_2) \setminus A_3)$
29	120	35	35	34	12	12	11	2	$((A_1 \setminus A_2) \cap A_3)$
30	100	32	29	35	12	11	13	2	$((A_1 \oplus A_2) \cap A_3)$

4. Контрольные вопросы

1. Привести формулу влючения-исключения.
2. Что такое конституента в алгебре подмножеств универсума.
3. Как находтся мощность конституенты с использованием формулы вклюоения-исключения.
4. Как в терминах конституент производятся операции над множествами.