МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждения высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра информационной безопасности

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_______________ О.Г. Локтионова
«_17_» _________________ 2017 г.

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

Методические рекомендации по выполнению лабораторных работ №1, №2
для студентов укрупненных групп специальностей 09.00.00, 10.00.00, 11.00.00

Курск 2017

УДК 621.(076.1)

Составители: В.П. Добрица, К.А. Тезик

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент кафедры
«Информационные системы и технологии» Ю.А. Халин

Теория множеств [Текст] : методические рекомендации по выполнению лабораторных работ / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: В.П. Добрица, К.А. Тезик. – Курск, 2017. – 24 с.: ил. 7. – Библиогр.: с. 24.

Содержат сведения и материалы по разделу дискретной математики – теория множеств. Указывается порядок выполнения лабораторной работы, правила оформления отчета.

Методические указания соответствуют требованиям программы, утвержденной учебно-методическим объединением по специальности.

Предназначены для студентов укрупненных групп специальностей и направлений подготовки 09.00.00, 10.00.00, 11.00.00.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 12.11.17. Формат 60х84 1/16.
Усл.печ. л. 1,40. Уч.-изд. л. 1,26. Тираж 100 экз. Заказ. Бесплатно. 1936
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

В данных методических рекомендациях изложены материалы по разделу дискретной математики - теория множеств.

В разделе «Теория множеств» рассмотрены следующие темы: множества и операции над множествами; отношения и функции.

По каждой теме представлены:

1. краткие теоретические положения;
2. перечень вопросов, выносимых на практическое задание;
3. примеры задач, выносимых на практическое занятие;
4. задачи, выносимые на самостоятельную работу студентов.

Данные методические рекомендации предназначены для проведения практических занятий по дисциплине «Дискретная математика» для студентов второго курса Юго-Западного государственного университета следующих направлений подготовки: информационная безопасность; инфокоммуникационные технологии и системы связи, информационные системы и технологии.

По изложенным в данных методических рекомендациях материалам можно рекомендовать преподавателю проведение 4-х часов практических занятий по следующему плану:

- множества и операции над множествами (2 часа);
- отношения и функции (2 часа);

При выполнении каждой работы следует приводить все этапы выполняемых рассуждений, необходимый теоретический материал для объяснения проводимых преобразований и вычислений, обоснование делаемых выводов.

На титульном листе привести следующие данные: ЮЗГУ, кафедра, предмет, номер задания, номер варианта, ФИО студента, номер группы, данные о проверяющем.

Практическое занятие №1

Множества и операции над множествами

Цель: изучить способы задания множеств, основные операции над множествами, представление множеств в виде кругов Эйлера. Научиться решать задачи по доказательству тождеств, включающих множества.

Вопросы, выносимые на практическое занятие.

1. Понятие множества. Способы задания множеств. Понятие подмножества.
2. Представление множеств в виде кругов Эйлера.
3. Понятия универсального и пустого множеств. Дополнение множества.
4. Основные операции над множествами: объединение множеств, пересечение множеств, разность множеств, симметричная разность множеств.
5. Законы де Моргана.

Краткие теоретические положения

Под множеством А будем понимать любое объединение определенных и различимых между собой объектов, мыслимое как единое целое. Через $\in$ обозначается отношение принадлежности, т.е. $x \in A$ означает, что элемент x принадлежит множеству А. Если x не является элементом множества А, то это записывается следующим образом $x \notin A$.

Через $\subseteq$ обозначается отношение включения множеств, т.е. запись $A \subseteq B$ означает, что каждый элемент множества А является элементом множества В. В этом случае В – надмножество А.

Множество, не содержащее элементов, называется пустым и обозначается через $\emptyset$.

Объединением множеств А и В называется множество
$A \cup B = \{x | x \in A \text{ или } x \in B\}$

Пересечением множеств А и В называется множество
$A \cap B = \{x | x \in A \text{ и } x \in B\}$

Разностью множеств А и В называются множество
$A \backslash B = \{x | x \in A \text{ и } x \notin B\}$

Симметричной разностью множества А и В называется множество
$A \dot{-} B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$

Универсальное множество $\cup$ - это множество элементов, которые участвуют в данной области рассуждений. Например, если рассматриваются различные множества целых положительных чисел, то универсальное множество – это множество всех натуральных чисел.

Дополнением множества А называется множества $\bar{A} = \{x | x \notin A \text{ и } x \in \cup\}$

Законы де Моргана устанавливают связь между операциями объединения, пересечения и дополнения.

Дополнение объединения есть пересечение дополнений
$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

Дополнение пересечения есть объединение дополнений
$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

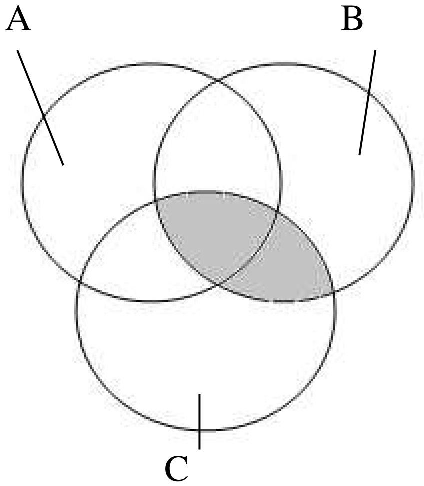
Примеры задач, выносимых на практическое занятие

Задача 1

С помощью кругов Эйлера доказать тождество:

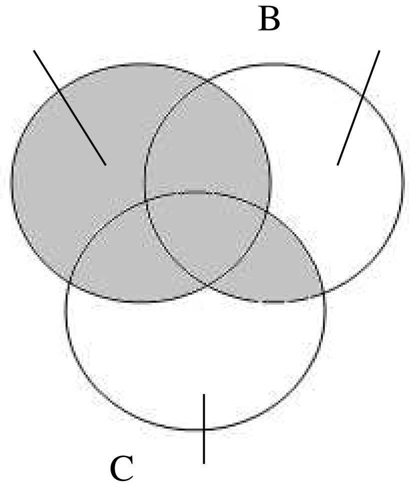
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Левая часть тождества имеет вид:



$B \cap C$(закрашенная фигура)

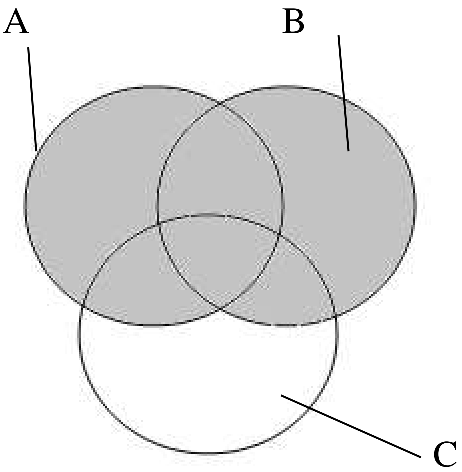
Рис 1.



$A \cup (B \cap C)$(закрашенная фигура)

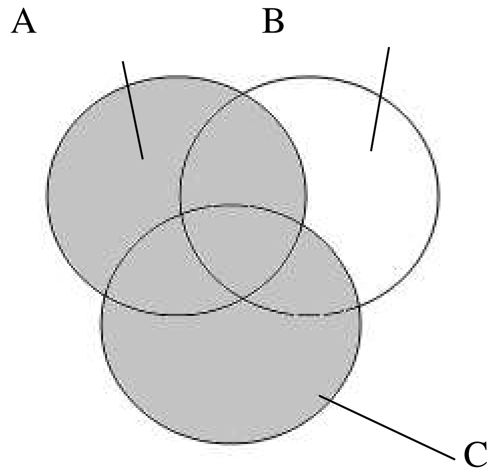
Рис 2.

Правая часть тождества имеет вид:



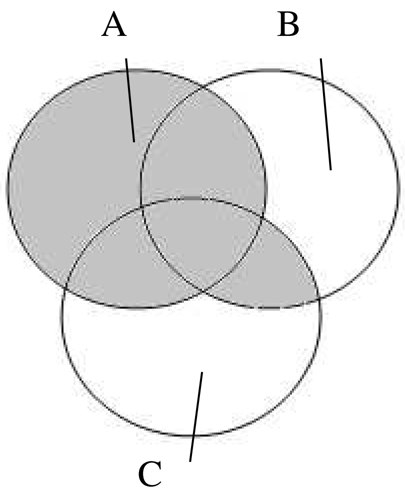
$A \cup B$ (закрашенная фигура)

Рис 3.



$A \cup C$ (закрашенная фигура)

Рис 4.



$(A \cup B) \cap (A \cup C)$ (закрашенная фигура)

Рис 5.

Закрашенные фигуры, изображающие левую и правую части тождества на Рис 2 и Рис 5 одинаковые, что доказывает истинность тождества:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Задача 2

С помощью кругов Эйлера доказать, что: $A \cup B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq C$ и $B \subseteq C$

Знак $\Leftrightarrow$ означает «тогда и только тогда, когда».

Докажем условие достаточности.

Пусть правая часть тождества выполняется $A \subseteq C$ и $B \subseteq C$, см. рис 6.

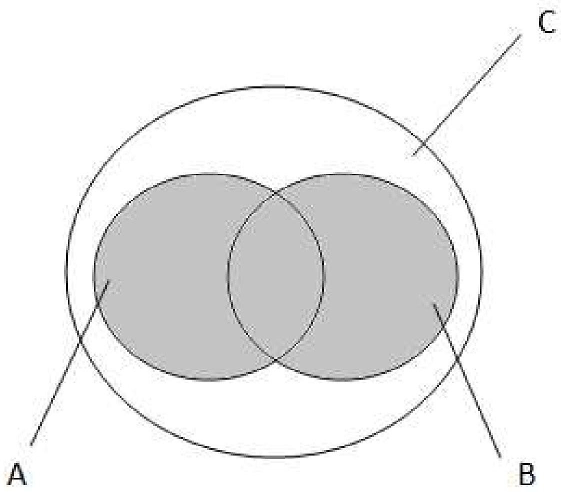


Рис 6.

$A \cup B$ (заштрихованная фигура)

Тогда круги Эйлера показывают, что элементы объединения множества А и В являются элементами множества С, то есть $A \cup B \subseteq C$.

Докажем это же условие методом доказательства от противного.

Предположим, что правая часть тождества не выполняется, например множества А не является подмножеством множества С, см. рис 7.

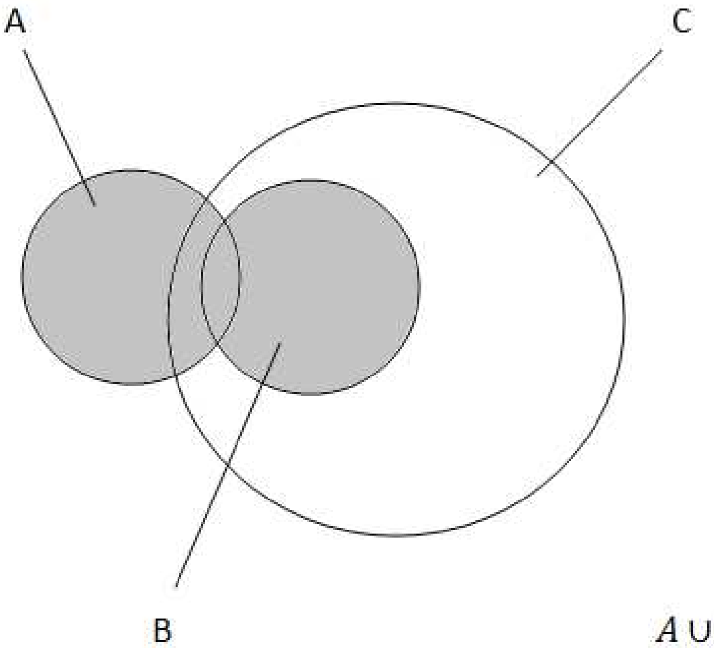


Рис 7.

$A \cup B$ (заштрихованная фигура)

Мы видим, что не все элементы объединения множества А и В являются элементами множества С, следовательно, утверждение $A \cup B \subseteq C$ в данном случае является ложным, что и требовалось доказать.

Так как $A \subseteq A \cup B$ и $A \cup B \subseteq C$, то в силу транзитивности отношения включения имеем $A \subseteq C$. Аналогично доказывается включение $B \subseteq C$.

Таким образом, доказано, что левая часть эквивалентности $A \cup B \subseteq C$ выполняется тогда и только тогда, когда выполняется правая часть этой эквивалентности, то есть $A \subseteq C$ и $B \subseteq C$.

Тождества, включающие в себя множества, могут быть доказаны не только диаграммами Эйлера, но и аналитическим методом.

Задача 3

Доказать аналитическим методом следующее тождество: $(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (B \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup D)$

Пусть элемент $x \in (A \cap B) \cup (C \cap D)$.

Отсюда следует, что $x \in A$ и $x \in B$ или $x \in C$ и $x \in D$

Рассмотрим 2 гипотезы

Гипотеза №1

Предположим, что $x \in A$ и $x \in B$. Но если элемент x принадлежит, например, множеству A, то он принадлежит объединению множества A с любым другим множеством. Отсюда следует, что $x \in (A \cup C)$ и $x \in (B \cup C)$ и $x \in (A \cup D)$ и $x \in (B \cup D)$

А значит, элемент x лежит в пересечении этих множеств.

Гипотеза №2

Пусть $x \in C$ и $x \in D$. Отсюда следует, что: $x \in (A \cup C)$ и $x \in (B \cup C)$ и $x \in (A \cup D)$ и $x \in (B \cup D)$.

Итак, при обеих гипотезах доказано включение: $(A \cap B) \cup (C \cap D) \subset (A \cup C) \cap (B \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup D)$

Докажем обратное включение.

Пусть $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup D)$, тогда имеем

$x \in (A \cup C)$ и $x \in (B \cup C)$ и $x \in (A \cup D)$и $x \in (B \cup D)$. Это равносильно утверждению ($x \in$A или $x \in$C) и ($x \in$B или $x \in$C) и ($x \in$A или $x \in D$) и ($x \in$B или $x \in D$).

Если в первом условии выполняется $x \in$A , то третье условие выполняется автоматически. А из выполнения второго и третьего условий следует, что $x \in$B , или ($x \in$C и $x \in D$). Из условий $x \in$A и $x \in$B следует, что $x \in A \cap B$. Условие ($x \in$C и $x \in D$) гарантирует, что

$x \in C \cap D$. Одно из этих условий выполняется обязательно в силу нашего предположения, поэтому имеем $x \in (A \cap B) \cup (C \cap D)$.

Второй возможный случай $x \in C$ из первого условия рассматривается аналогично.

Задачи, выносимые на самостоятельную работу студентов

ВАРИАНТ 1

1. Доказать: если $A \subseteq B$ *и* $B \subseteq C$, *то* $A \subseteq C$.
2. Доказать, что если A множество корней уравнения $x^2 - 7x + 6 = 0$ *и* $B = \{1,6\}$, то A=B.
3. Доказать, что множество всех корней многочлена $\Psi(x)=f(x)\times\varphi(x)$ есть объединение множеств корней многочленов f(x) и φ(x).
4. Доказать тождество $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
5. Доказать тождество $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
6. Доказать тождество $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$.
7. Доказать, что: $A \subseteq B \cap C \Leftrightarrow A \subseteq B$ *и* $A \subseteq C$.
8. Доказать, что: $A \subseteq B \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$.
9. Доказать тождество: $A \dotminus (B \dotminus C) = (A \dotminus B) \dotminus C$.
10. Найти все подмножества множеств $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{x\}$, $\{1,2\}$.

ВАРИАНТ 2

1. Доказать: $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$.
2. Доказать, что $\emptyset \neq \{\emptyset\}$.
3. Доказать, что множество во всех корней многочлена $\Psi(x)=(f(x))^2+(\varphi(x))^2$ есть пересечение множеств корней многочленов f(x) и φ(x).
4. Доказать тождество: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
5. Доказать тождество: $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
6. Доказать тождество: $\overline{\overline{A}} = A$.
7. Доказать, что: $A \cap B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq \overline{B} \cup C$.
8. Доказать, что: $A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$.
9. Доказать тождество $A \cap (B \dotminus C) = (A \cap B) \dotminus (A \cap C)$.

10. Найти все подмножества множеств $\{2, 3, 4\}$.

ВАРИАНТ 3

1. Доказать: $A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$.
2. Доказать, что $\{\{1,2\},\{2,3\}\} \neq \{1,2,3\}$.
3. Доказать, что множество всех корней многочлена $\Psi(x)=f(x)\cdot\varphi(x)$ есть объединение множеств корней многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$.
4. Доказать тождество $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
5. Доказать тождество: $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.
6. Доказать тождество $A \cup (\overline{A}) = U$.
7. Доказать, что $A \subseteq B \cup C \Leftrightarrow A \cap (\overline{B}) \subseteq C$.
8. Доказать, что $A \subseteq B \Rightarrow (A \setminus C) \subseteq (B \setminus C)$.
9. Доказать тождество $A \dot{-} (A \dot{-} B) = B$.
10. Доказать, что множество из n элементов имеет 2^n подмножеств.

ВАРИАНТ 4

1. Доказать: $A \setminus B \subseteq A$.
2. Существуют ли такие множества A, B и C, что $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C \neq \emptyset$, $(A \cap B) \setminus C \neq \emptyset$.
3. Доказать, что множество во всех корней многочлена $\Psi(x)=(f(x))^2+(\varphi(x))^2$ есть пересечение множеств корней многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$.
4. Доказать тождество $(A \cup B) \cap A = (A \cap B) \cup A = A$.
5. Доказать тождество $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.
6. Доказать тождество $A \cap (-A) = \emptyset$.
7. Доказать, что $(A \setminus B) \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$.
8. Доказать, что $A \subseteq B \Rightarrow (C \setminus B) \subseteq (C \setminus A)$.
9. Доказать тождество $A \cup B = (A \dot{-} B) \dot{-} (A \cap B)$.
10. Доказать, что множество из n элементов имеет 2^n подмножеств.

ВАРИАНТ 5

1. Доказать, что $A \setminus A = \emptyset$.
2. Существуют ли такие множества A, B и C, что $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C \neq \emptyset$, $(A \cup B) \setminus C \neq \emptyset$.

3. Пусть f(x), φ(x) характеристические функции множеств A и B соответственно. Доказать, что функция Ψ(x)=sgn(f(x) +φ(x)) является характеристической для множества $A \cup B$.
4. Доказать тождество $(A \backslash B) \cap B = \emptyset$.
5. Доказать тождество $B \backslash (A \setminus B) = B$.
6. Доказать, что $(A \setminus B) \cup B = A \Leftrightarrow B \cap A = B$.
7. Доказать тождество $A \cup B = (A \dot{-} B) \cup (A \cap B)$.
8. Доказать, что $A \cap B = B \Rightarrow (C \setminus A) \subseteq (C \setminus B)$.
9. Какие соотношения между произвольными двумя множествами могут быть?
10. Есть ли подмножества в пустом множестве?

ВАРИАНТ 6

1. Когда выполняется включение $A \dot{-} B \subseteq A$?
2. Существуют ли такие множества A, B и C, что $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C \neq \emptyset$, $(A \cap B) \setminus C \neq \emptyset$.
3. Пусть f(x), φ(x) характеристические функции множеств A и B соответственно. Доказать, что функция Ψ(x)= f(x) ·φ(x) является характеристической для множества $A \cap B$.
4. Выполняется ли равенство $(A \dot{-} B) \cap B = \emptyset$?
5. Доказать тождество $A \backslash (B \setminus A) = A$.
6. Доказать, что $(A \dot{-} B) \cup B = A \Leftrightarrow B \cup A = A$.
7. Доказать тождество $\emptyset = (A \dot{-} B) \cap (A \cap B)$.
8. Доказать, что $A \cup B = B \Rightarrow (C \setminus B) \subseteq (C \setminus A)$.
9. Указать все подмножества пустого множества.
10. Найти все подмножества множеств $\{\emptyset\}$.

ВАРИАНТ 7

1. Доказать, что $A \dot{-} A = \emptyset$.
2. Существуют ли такие множества A, B и C, что $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, $(A \cap B) \setminus C \neq \emptyset$.
3. Пусть f(x), φ(x) характеристические функции множеств A и B соответственно. Доказать, что функция $\Psi(x) = (f(x))^2 \cdot (\varphi(x))^2$ является характеристической для множества $A \cap B$.
4. Доказать тождество $(A \dot{-} B) \dot{-} B = A$.

5. Доказать тождество $A \cap (B \cup A) = A$.
6. Доказать, что $(A \cap B) \cup B = A \Leftrightarrow B = A$.
7. Доказать, что $A \cap B = A \Rightarrow (C \setminus B) \subseteq (C \setminus A)$.
8. Доказать тождество $B \cup A = (A \dot{-} B) \dot{-} (A \cap B)$.
9. Сколько подмножеств у пятиэлементного множества?
10. Указать все собственные подмножества множества
11. $\{x, y\}$.

ВАРИАНТ 8

1. Существуют ли множества A, B, C такие, что выполняются условия
2. $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, $(A \cap B) \setminus C \neq \emptyset$?
3. Доказать, что $A \dot{-} A = \emptyset$.
4. Пусть $f(x)$, $\varphi(x)$ характеристические функции множеств A и B соответственно. Доказать, что функция $\Psi(x)=\mathrm{sgn}((f(x))^2 + (\varphi(x))^2)$ является характеристической для множества $A \cup B$.
5. Доказать, что множество $\{\{1,2\},3\}$ неравно множеству $\{1,2,3\}$.
6. Существуют ли такие множества A, B и C, что $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, $(A \cap B) \setminus C \neq \emptyset$.
7. Доказать, что $A \dot{-} B) \cup B = A \Leftrightarrow B \cap A = B$.
8. Доказать, что $A \cup B = B \Rightarrow (C \setminus B) \subseteq (C \setminus A)$.
9. Доказать, что $A \setminus (B \setminus A) = A$.
10. Указать все собственные подмножества пустого множества.
11. Сколько подмножеств у четырёхэлементного множества?

Практическое занятие №2

Отношения и функции

Цель: Изучить определения декартова бинарного соответствия, функции, композиции соответствий. Научиться решать задачи по доказательству тождеств, включающих декартово произведение множеств и композиции соответствий.

Вопросы, выносимые на практическое занятие.

Декартово произведение множеств.

Степень множества.

Понятие бинарного соответствия. Область определения и область значения бинарного соответствия. Понятия образа и прообраза.

Понятие функции. Недоопределённые (частично опрекделенные) и всюду определённые функции, разнозначные (1-1) функции. Понятие подстановки множества.

Композиция соответствий.

Сравнение бесконечных множеств по мощности.

Краткие теоретические положения

Декартовым произведением множеств A и B называются множество всех пар (x,y), где x – элемент множества A, а y – элемент множества B. Формально операция декартова произведения множеств A и B определяется следующим образом:

$A \times B = \{(x,y) | x \in A \text{ и } y \in B\}$.

Если в декартовом произведении n множеств $A_1, A_2 \dots A_n$, то можно записать $M = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$.

Если в этом произведении принять $A_1 = A_2 \dots = A_n = A$, то получим A^n, где A^n является степенью множества A.

Бинарным соответствием между элементами множеств A и B называется любое множество R декартова произведения A×B, то есть R ⊆ A×B.

Областью определения бинарного соответствия R называется множество вида: $\delta_R = \{x | \text{существует } y \text{ такое, что } (x,y) \in R\}$.

Областью значений бинарного соответствия называется множество

$$\rho_R = \{y | \text{существует } x \text{ такое, что } (x,y) \in R\}$$

Обратным соответствием для бинарного соответствия R называют множество вида: $R^{-1} = \{(x,y)|(y,x) \in R\}$.

Пусть даны множества X и Y.

Бинарное соответствие R является функцией, если каждому элементу x ∈ X соответствует не более одного элемента y ∈ Y, что выполняется отношение $(y,x) \in R$. Это по другому можно записать следующим образом: x R y или y=R(x). Значение функции y ∈ Y называют образом элемента x ∈ X, а сам элемент x ∈ X – прообразом элемента y.

Функция y=F(x) называется всюду определённой, если каждому элементу x ∈ X соответствует некоторый элемент y ∈ Y, в противном случае функция является недоопределённой (частично определённой).

Функция называется разнозначной (1-1) функцией, если для любых элементов x_1, x_2, y из того, что y=f(x_1) и y=f(x_2), следует $x_1 = x_2$.

Говорят, что функция f:A⟶B осуществляет взаимно-однозначное соответствие между A и B, если $\delta f = A, \rho f = B$ и f является 1-1 функцией.

Взаимно-однозначное соответствие f:A⟶A называется подстановкой множества A и обозначается i_A.

Композицией соответствий $R_1 \subseteq$ A×B и $R_2 \subseteq$ B×C называется соответствие: $R_1 \circ R_2 = \{(x,y)|\text{существует } z \text{ такое, что } (x,z) \in R_1 \text{ и } (z,y) \in R_2\}$

Пример: $R_1 = \{(1,2),(2,4),(3,6)\}$;

$R_2 = \{(1,3),(2,6),(3,9),(4,12)\}$

$R_1 \circ R_2 = \{(1,6),(2,12)\}$

(x=1,y=6,z=2) (x=2,y=12,z=4)

Примеры задач, выносимых на практическое занятие

Задача 1

Доказать тождество

$$(A \cap B) \times (C \cap D) \subset (A \times C) \cap (B \times D).$$

Пусть z $\in (A \cap B) \times (C \cap D) \Rightarrow$ z = (x,y) $\in (A \cap B) \times (C \cap D) \Rightarrow$ x $\in (A \cap B)$ и $y \in (C \cap D) \Rightarrow$ x $\in A$ и x $\in B$ и y $\in$

C и $y \in D \Rightarrow$ (x $\in A$ и y $\in C$) и (x $\in B$ и y $\in D$) $\Rightarrow$ (x,y) $\in$ A×C и (x,y) $\in$ B×D $\Rightarrow$(x,y) $\in (A \times C) \cap (B \times D)$.

Задача 2

Доказать тождество

$R_1 \circ (R_2 \circ R_3) = (R_1 \circ R_2) \circ R_3$.

(x,y) $\in R_1 \circ (R_2 \circ R_3) \Leftrightarrow$ существует z такое, что $(x,z) \in R_1$ и $(z,y) \in R_2 \circ R_3 \Leftrightarrow$ существуют z, v такие, что $(x,z) \in R_1$ и $(z,v) \in R_2$ и $(v,y) \in R_3 \Leftrightarrow (x,v) \in (R_1 \circ R_2)$ и $(v,y) \in R_3 \Leftrightarrow$ (x,y) $\in (R_1 \circ R_2) \circ R_3$.

Задача 3

Найти $\delta_R, \rho_R, R^{-1}, R \circ R, R \circ R^{-1}$ для отношения R = $\{(x,y) | x,y \in D$ и $2x \geq 3y\}$.

a) Область определения бинарного соответствия R – это множество первых элементов пар (x,y) из этого соответствия. Так как для каждого x $\in D$ существует такое $y = \frac{2}{3}x \in D$, что (x,y) $\in R$. Следовательно $\delta_R = D$.
b) Область значений бинарного соответствия R – это множество вторых элементов пар (x,y) из этого соответствия. Так как для каждого $y \in D$ существует такое $x = \frac{3}{2}y \in D$, что (x,y) $\in R$, то $\rho_R = D$.
c) В обратном соответствии R^{-1} элементы x и y в парах из соответствия R меняются местами. Пусть (x,y) $\in R$, где $x, y \in D$ и $2x \geq 3y$. Тогда (y,x) $\in R^{-1}$, где $y, x \in D$ и $3y \leq 2x$. Если первую координату обозначить через x, а вторую через y, то $R^{-1} = \{(x,y) | x,y \in D$ и $2y \geq 3x\}$.
d) Композицией R∘R является соответствие R∘R= $\{(x,y) |$ существует z такое, что $(x,z) \in R$ и $(z,y) \in R\}$ А это значит, что: 2x≥3z и 2z≥3y исходя из условия, заданного для соответствия R. Отсюда 4x≥6z и 6z≥9y, или $\frac{4}{6}x \geq z$ и $z \geq \frac{9}{6}y$.
Из этого следует, что если второй элемент пары (x,z) равен первому элементу пары (z,y) по определению

композиции, то $\frac{4}{6}x \geq \frac{9}{6}y$ или 4x ≥ 9y.

Итак: R∘R=$\{(x, y) | (x, y) \in D$ и 4x ≥ 9y }.

е) По определению композиции R∘R^{-1}=

$\{(x, y) |$ существует z такое, что $(x, z) \in R$ и $(z, y) \in R^{-1}\}$

Если $(x, z) \in R$, то по условию: 2x≥3z , т.е. x≥ $\frac{3}{2}z$.

Если $(z, y) \in R^{-1}$, то из результатов решения (см. пункт в)) имеем 2x≥3z, или y≥ $\frac{3}{2}z$.

Итак: x≥$\frac{3}{2}$z; y≥ $\frac{3}{2}z$. Отсюда следует, что числа x и y не связаны между собой никакой зависимостью, т.к. для любой пары действительных чисел (x,y) можно подобрать z такое, что x≥$\frac{3}{2}$z, y≥ $\frac{3}{2}z$. Например, z=min{$\frac{2}{3}$x, $\frac{2}{3}$y} .

Следовательно, композиция R∘R^{-1}=D×D=D^2.

Задача 4

Доказать, что если f есть функция из A в B и g - функция из B в C, то f∘g является функцией из A в C.

Пусть f – есть функция из A в B, следовательно, для каждого элемента x $\in A$ существует только 1 элемент y $\in B$, что y=f(x).

Пусть g – есть функция из B в C, следовательно, для каждого y $\in B$ существует только 1 элемент z $\in C$ такой, что z=g(y).

Следовательно, для каждого значения x существует только одна пара $(x, z) \in f \circ g$, где $(x, y) \in f$ и $(y, z) \in g$.

А это значит, что композиция f∘g отображает элемент x ∈ A только на 1 элемент z $\in C$, то есть z=(f∘g)(x).

Отсюда следует, что композиция f∘g есть функция из A в C.

Задачи, выносимые на самостоятельную работу студентов

ВАРИАНТ 1

Доказать, что существуют A,B такие, что A×B≠ B×A.

1. Найти геометрическую интерпретацию следующего множества (a,b]×[c,d), где (a,b] и [c,d)- полуинтервалы действительной прямой D.
2. Доказать, что если A,B,C и D не пусты, то A ⊆ B и C ⊆ D ⇔ A× C $\subseteq B \times D$.
3. Доказать, что (A×B) ∪ $(C \times D)$ ⊆(A ∪ C)×(B ∪ D).
4. При каких множествах A,B,C и D получается равенство?
5. Доказать, что $(A \cup B)$×($C \cup D)$ = (A×C) ∪(B×C) ∪(A×D) ∪(B×D).
6. Найти $\delta_R, \rho_R, R^{-1}, R \circ R, R \circ R^{-1}, R^{-1} \circ R$ для отношения: R = $\{(x, y) | x, y \in N$ и x делит $y\}$.
7. Доказать, что $\delta_R = \emptyset$ ⇔ R = ∅ ⇔ $\rho_R = \emptyset$.
8. Доказать, что если B ≠ ∅, то $\delta_{A \times B} = A$.
9. Доказать, что для любых бинарных отношений: $R \cup R$= $R \cap R$= R.
10. Пусть A и B – конечные множества, состоящие из m и n элементов соответственно. Сколько существует бинарных соответствий между элементами множеств A и B?
11. Пусть φ: A⟶A – подстановка множества A. Доказать, что φ^{-1} – подстановка множества A.

ВАРИАНТ 2

1. Доказать, что можно установить взаимно-однозначное соответствие между множествами A×B и B×A.
2. Найти геометрическую интерпретацию следующего множества [a,b)×[c,d), где [a,b) и [c,d) – полуинтервалы действительной прямой D.
3. Доказать, что если A,B,C и D не пусты, то A ⊆ B и C ⊆ D ⇔ A× C $\subseteq B \times D$.
4. Пусть A,B,C, D ≠ ∅ и (A×B) ∪ (B×A)=C×D . Доказать, что A=B=C=D.
5. Доказать, что: (A \ B) × C = (A×C) \(B×C).
6. Найти $\delta_R, \rho_R, R^{-1}, R \circ R, R \circ R^{-1}, R^{-1} \circ R$ для отношения: $R = \{(x, y) | x, y \in N$ и y делится на $x\}$.

7. Доказать, что $\delta_{R^{-1}} = \rho_R, \rho_{R^{-1}} = \delta_R$.
8. Доказать, что если B $\neq \emptyset$, то $\delta_{A\times B} = A$.
9. Доказать, что для любых бинарных отношений: $(R^{-1})^{-1}$=R.
10. Пусть A и B – конечные множества, состоящие из m и n элементов соответственно. Сколько имеется функций из A в B?
11. Пусть φ: A⟶B – взаимно однозначное соответствие. Доказать, что: φ^{-1} – взаимно однозначное соответствие между B и A.

ВАРИАНТ 3

1. Доказать, что можно установить взаимно однозначное соответствие между множествами: A×(B×C) и (A×B)×C.
2. Найти геометрическую интерпретацию следующего множества: $[a, b]^2$, где [a,b] – отрезок действительной прямой D.
3. Доказать, что если A,B,C и D не пусты, то A=B и C=D ⇔ A×C=B×D.
4. Пусть A,B$\neq \emptyset$ и (A×B) ∪ (B×A)=C×D . Доказать, что A=B=C=D.
5. Доказать, что A×(B \ C)=(A×B) \ (A×C) .
6. Найти $\delta_R, \rho_R, R^{-1}, R \circ R, R \circ R^{-1}, R^{-1} \circ R$ для отношения: $R = \{(x, y) | x, y \in D \text{ и } x + y \leq 0\}$.
7. Доказать, что $\delta_{(R_1 \circ R_2)} = R_1^{-1}(\rho_{R_1} \cap \delta_{R_2})$.
8. Доказать, что если A$\neq \emptyset$, то $\rho_{A\times B} = B$.
9. Доказать, что для любых бинарных отношений имеет место равенство $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$.
10. Пусть A и B – конечные множества, состоящие из m и n элементов соответственно. Сколько имеется 1-1 функций из A в B?
11. Пусть φ: A⟶B – взаимно однозначное соответствие. Доказать, что: $\varphi^{-1} \circ \varphi = i_B$

ВАРИАНТ 4

1. Доказать, что существуют множества A,B и C такие, что: A×(B×C) ≠ (A×B)×C.
2. Найти геометрическую интерпретацию следующего множества: $[a,b]^3$, где [a,b] – отрезок действительной прямой D.
3. Доказать, что если множества A,B,C и D не пусты, то: A=B и C=D⇔A×C=B×D.
4. Доказать, что: (A×B) ∪(C×D) ⊆(A∪ C)×(B $\cup D$) . При каких множествах A,B,C и D получается равенство?
5. Доказать, что: A×B=(A×D) ∩(C×B), где A⊆C и B⊆D.
6. Найти $\delta_R, \rho_R, R^{-1}, R \circ R, R \circ R^{-1}$, $R^{-1} \circ R$ для отношения: $R = \{(x, y) | x, y \in D$ и $x - y \leq 0\}$.
7. Доказать, что $\rho_{(R_1 \circ R_2)} = R_2(\rho_{R_1} \cap \delta_{R_2})$.
8. Доказать, что если A≠ ∅, то $\rho_{A \times B} = B$.
9. Доказать, что для любых бинарных отношений имеет место равенство: $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$.
10. Пусть A и B – конечные множества, состоящие из m и n элементов соответственно. При каких значениях m и n существуют взаимно однозначное соответствие между A и B?
11. Доказать, что объединение двух функций f_1 и f_2 из A в B является функцией из A в B тогда и только тогда, когда $f_1 = f_2$.

ВАРИАНТ 5

1. Доказать, что существуют множества A,B и C такие, что: A×((B×C) ×D) ≠ (A×B)×(C×D).
2. Найти геометрическую интерпретацию следующего множества: [2,4)x[1. 4], где [2, 4) - полуинтервал, а [1, 4] – отрезок действительной прямой D.
3. Доказать равенство ∅×B= A×∅.
4. Доказать, что (A×B) ∩ (C×D) =(A ∩ C)×(B ∩ D).
5. Доказать, что: A×B=(A×D) ∩ (C×B), где A⊆C и B⊆D.

6. Найти δ_R, ρ_R, R^{-1}, $R \circ R$, $R \circ R^{-1}$, $R^{-1} \circ R$ для отношения: $R = \{(x,y) \mid x,y \in D$ и $x \cdot y \leq 0\}$.
7. Доказать, что: $\delta_{R^{-1}} = \rho_R$, $\rho_{R^{-1}} = \delta_R$.
8. В каком случае имеет место равенство $\rho_{A \times B} = B$? Ответ обосновать.
9. Доказать, что для любых бинарных отношений имеет место равенство: $(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_1^{-1} \circ R_2^{-1}$.
10. Пусть A конечное множество. При каких значениях m и n имеет место равенство $A^n = A^m$?
11. Пусть f_1 и f_2 функции из A в B . Доказать, что их пересечение будет функциональным соответствием.

ВАРИАНТ 6

1. Доказать, что существуют множества A,B и C такие, что: $(A\times(B\times C))\times D \neq (A\times B)\times(C\times D)$.
2. Найти геометрическую интерпретацию следующего множества: (2,4]x[1. 4], где (2, 4] - полуинтервал, а [1, 4] – отрезок действительной прямой D.
3. При каких множествах A, B, C выполняется равенство $A\times(B\times C) = (A\times B)\times C$?
4. Доказать, что $(A \setminus C)\times(B \setminus D) \subseteq (A\times B) \setminus (C\times D)$.
5. Доказать, что: $(A \dot{-} B) \times C = (A\times C) \dot{-} (B\times C)$.
6. Найти δ_R, ρ_R, R^{-1}, $R \circ R$, $R \circ R^{-1}$, $R^{-1} \circ R$ для отношения: $R = \{(x,y) \mid x,y \in D$ и $x \cdot y \geq 0\}$.
7. Доказать, что: $\delta_R \neq \emptyset \Leftrightarrow R \neq \emptyset \Leftrightarrow \rho_R \neq \emptyset$.
8. В каком случае имеет место равенство $\delta_{A \times B} = A$? Ответ обосновать.
9. Доказать, что для любых бинарных отношений имеет место равенство: $(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_1^{-1} \circ R_2^{-1}$.
10. Пусть A конечное множество. При каких значениях m и n имеет место равенство $|A|^n = |A|^m$?
11. Пусть f_1 и f_2 функции из A в B . Будет ли их объединение функциональным соответствием?

ВАРИАНТ 7

1. Доказать, что существуют множества A,B и C такие, что: $(A\times(B\times C))\times D \neq A\times(B\times(C\times D))$.
2. Найти геометрическую интерпретацию следующего множества: (2,4)x[3. 4], где (2, 4) - интервал, а [3, 4] – отрезок действительной прямой D.
3. При каких множествах A, B выполняется равенство $A\times B = B\times A$?
4. Доказать, что $(A \dot{-} C)\times(B \dot{-} D) \subseteq (A\times B) \dot{-} (C\times D)$.
5. Доказать, что: $(A \setminus B) \times C = (A\times C) \setminus (B\times C)$.
6. Найти δ_R, ρ_R, R^{-1}, $R\circ R$, $R\circ R^{-1}$, $R^{-1}\circ R$ для отношения: $R = \{(x,y) \mid x,y\in D \text{ и } x-y=0\}$.
7. Существует ли отношение R такое, что $\delta_R \neq \emptyset$ и $\rho_R = \emptyset$?
8. Найти условия на множества A и B, чтобы выполнялось равенство $\delta_{A\times B} = \rho_{A\times B}$.
9. Доказать, что для любых бинарных отношений имеет место равенство $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1})$.
10. Пусть A бесконечное множество. При каких натуральных значениях m и n имеет место равенство $|A|^n = |A|^m$?
11. Доказать, что пересечение двух функций f_1 и f_2 из A в B является функцией из A в B тогда и только тогда, когда $f_1 = f_2$.

ВАРИАНТ 8

1. Доказать, что существуют множества A,B и C такие, что: $(A\times(B\times C))\times D = A\times(B\times(C\times D))$.
2. Найти геометрическую интерпретацию следующего множества: (2,4)x[3. 5), где (2, 4) - интервал, а [3, 5) – полуинтервал действительной прямой D.
3. Доказать, что если множества A,B,C не пусты, то: $A=B$ и $C=D \Leftrightarrow A\times C=B\times D$.
4. Доказать, что $(A\times B) \cap (C\times D) =(A \cap C)\times(B \cap D)$.
5. Найти множество $(A \setminus B) \times C$, если $A = \{2,5\} \cup (3,4]$, $B = [1,3]$ и C=6.

6. Найти δ_R, ρ_R, R^{-1}, $R \circ R$, $R \circ R^{-1}$, $R^{-1} \circ R$ для отношения:
   $R = \{(x,y) \mid x,y \in D$ и $x \cdot y = 0\}$.
7. Существует ли отношение $R \neq \emptyset$ такое, что $\delta_R = \emptyset$ и $\rho_R = \emptyset$?
8. В каком случае имеет место неравенство $\delta_{A \times B} \neq A$? Ответ обосновать.
9. Доказать, что для любых бинарных отношений имеет место равенство: $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$.
10. Пусть A бесконечное множество. При каких натуральных значениях m и n имеет место равенство $A^n = A^m$?
11. Пусть f_1 и f_2 функции из A в B . Будет ли их разность $f_1 \setminus f_2$ функциональным соответствием?

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

ОСНОВНАЯ:

1. Шевелев Ю. П. Дискретная математика. Учебное пособие - Спб.: Изд-во « Лань», 2008.
2. Просветов Г. И. Дискретная математика : задачи и решения: учебное пособие. - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008.
3. Данилов В. Г., Дубнов В. Л., Лакерник А. Р., Райцин А. М. Дискретная математика. Учебное пособие для вузов. - М.: Горячая линия - Телеком, 2008.
4. Андерсон Дж. Дискретная математика и комбинаторика. - М.; Спб., Киев: Вильямс, 2003.
5. Кузнецов О. П. Дискретная математика для инженера. - СПб: Изд-во « Лань», 2005.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ:

1. Ерусалимский Я. М. Дискретная математика. - М.: Вузовская книга, 2000.
2. Белоусов А.И., Ткачев С.Б. Дискретная математика: Учеб. Для вузов/ Под ред. В.С.Зарубина, А.П.Крищенко. - М.: Изд-во МГТ'У им. Н.Э. Баумана, 2001.
3. Хаггарти Р. Дискретная математика для программистов. М.: Техносфера, 2003.
4. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. Спб: Питер, 2001.
5. Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. Элементы дискретной математики. Учебник для втузов. - М.:ИНФРА-М, Новосибирск:: Изд-во НГТУ, 2002.
6. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику: Учебное пособие для вузов/ Под ред. А.А.Садовничего, - М.:Высш.шк.. 2002.
7. Москинова Г.И. Дискретная математика: Учебное пособие. - М.: Логос, 2000.
8. Горбатов В.А Фундаментальные основы дискретной математики. - М., Наука, 2000.

9. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. - М., Наука. 1975.
10. Косточка А.В. Дискретная математика. Ч.2. Новосибирск, НГУ, 1996.
11. Косточка А.В., Соловьева Ф.И. Дискретная математика. Ч.1. Новосибирск, НГУ, 1995.
12. Матросов В.А., Стеценко В.А. Лекции по дискретной математике. - М., МИГУ, 1997.
13. Ежов И.Г.Г, Скороход А.В., Ядренко М.М. Элементы комбинаторики. - М., Наука, 1977.
14. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Сборник задач по дискретной математике. Уч. пособие., - М., Наука. 1977.
15. Гордеев Э.Н., Нурлыбаев А.Н, Задачи по дискретной математике. Алма-Ата, КазГУ, 1986.
16. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Под ред. С.В. Яблонского, О.Б. Лупанова. Т. 1. - М., Наука. 1974.
17. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. - М., Наука, 1969.
18. Виленкин Н.Я. Популярная комбинаторика. - М.. Наука, 1975.
19. Методические разработки по курсу «Элементы дискретной математики». Составитель А.В. Яблонский, МГУ, - М., 1971.
20. Нефедов В. Н., Осипова В. А. Курс дискретной математики: Учебное пособие. - М.: Изд-во МАИ. 1992.