МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра программной инженерии

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_________________ О.Г. Локтионова
«15» 12 _________________ 2017 г.

# БУЛЕВСКИЕ ФУНКЦИИ

Методические указания к лабораторным работам
по дисциплине «Дискретная математика»
09.03.04 «Программная инженерия»,
09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»

Курск 2017

УДК 519.6

Составитель В.В. Свиридов

Рецензент:
кандидат технических наук, доцент кафедры программной инженерии ЮЗГУ *В.В. Апальков*

**Булевские функции**: методические указания к лабораторным работам по дисциплине «Дискретная математика» для студентов 09.03.04 «Программная инженерия», 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника», / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: В.В. Свиридов. Курск, 2017. 29 с.

Изложены алгоритм преобразования произвольного логического выражения к дизъюнктивной нормальной форме, алгоритмы построения совершенной дизъюнктивной и совершенной конъюнктивной нормальных форм булевских функций Рассмотрены примеры выполнения заданий. Приведены варианты заданий, контрольные вопросы к защите лабораторных работ

Методические указания соответствуют требованиям рабочей программы по дисциплине «Дискретная математика».

Материал предназначен для студентов направлений подготовки 09.03.04 «Программная инженерия», 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» очной и заочной форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . Формат 60 x 84 1/16.
Усл. печ. л. . Уч.- изд. л. . Тираж 100 экз. Заказ . Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

## Содержание

# Лабораторная работа. «Построение логического выражения с учетом приоритета операций, дизъюнктивная нормальная форма булевской функции»

## 1. Цель работы

Целью лабораторной работы является получение навыков анализа логического выражения, структура которого основана на приоритете логических операций, построения таблицы истинности для этого выражения. Навыков преобразования произвольного логического выражения к ДНФ.

## 2. Краткие теоретические положения

При построении логических выражений используется следующий приоритет операций:

1) ( );
2) $\neg$;
3) $\wedge$;
4) $\oplus$;
5) $\vee$.
6) $\rightarrow, \leftarrow, \leftrightarrow$;

То есть в первую очередь выполняются операции в скобках. Далее, операция отрицания применяется ранее всех остальных, она обладает наивысшим приоритетом. В последнюю очередь выполняется операция импликации. Если две операции имеют одинаковый приоритет, то первой выполняется операция, записанная ранее. Знак конъюнкции в формулах можно опустить и вместо $x \wedge y$ написать $xy$. Операцию конъюнкции часто называют *логическим умножением*, а операцию дизъюнкции – *логическим сложением*.

С учетом приведенных условий формулу $(x \wedge (y \wedge \bar{z})) \vee ((\overline{x \vee y}) \wedge z)$, например, можно более кратко записать в виде: $xy\bar{z} \vee (\overline{x \vee y})z$.

**Пример 2.1**

Решить логическое уравнение: $xy \vee (z \rightarrow x) \vee \bar{y} = 0$.

**Решение**

Имеем: $f(x, y, z) = xy \vee (z \rightarrow x) \vee \bar{y} = 0.$

Строим таблицу истинности:

| $x$ | $y$ | $z$ | $xy$ | $(z \to x)$ | $xy \vee (z \to x)$ | $\bar{y}$ | $(xy \vee (z \to x)) \vee \bar{y}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |

Решаем уравнение и получаем ответ:

$x_1 = 0, y_1 = 1, z_1 = 1.$

Формулы алгебры логики заданы в дизъюнктивной нормальной форме ДНФ, если они представлены в виде дизъюнкции конъюнкций элементарных высказываний и их отрицаний.

Пример. $f_1 = \bar{x}y \vee z \vee \overline{xy} \vee xyz$ – ДНФ.

Если формула $f$ задана не в виде ДНФ, то тождественными преобразованиями её можно привести к ДНФ. Эти преобразования включают в себя:

1) исключение связок импликации, равносильности и исключающего «или»:

$$x \to y = \bar{x} \vee y,$$

$$x \leftrightarrow y = \bar{x}\bar{y} \vee xy,$$

$$x \leftarrow y = x \vee \bar{y},$$

$$x \oplus y = x\bar{y} \vee \bar{x}y.$$

2) перенос отрицания внутрь скобок к переменным по правилам Де-Моргана: $\overline{(x \vee y)} = \bar{x} \wedge \bar{y}$, $\overline{x \wedge y} = (\bar{x} \vee \bar{y})$;

3) раскрытие скобок по дистрибутивному закону: $x(y \vee z) = xy \vee xz$ – для приведения к ДНФ

**Пример 2.2**

Привести к ДНФ формулу $f = (z \to t)\overline{(x \vee z)}$.

**Решение**

а) (правило 1) $f = (\bar{z} \vee t) \cdot (\overline{x \vee z})$ = (правило 2) = $(\bar{z} \vee t) \cdot (\bar{x} \wedge \bar{z})$ = (правило 3) = $\bar{x}\bar{z}\bar{z} \vee \bar{x}\,t\bar{z}$ = (свойство x·x = x) = $\bar{x}\bar{z} \vee \bar{x}\,t\bar{z} =$

$\bar{x}\bar{z} \vee \bar{x}\,t\bar{z} = \bar{x}\bar{z}$ (закон поглощения) = ДНФ для формулы f.

*Замечание:* В ДНФ после упрощения могут вообще отсутствовать дизъюнктивные члены, тогда $f \equiv 0$.

ДНФ данной функции может после преобразований приобрести форму $f = x \vee \bar{x}$. Воспользовавшись далее законом дополнительности $x \vee \bar{x} = 1$, получаем, что $f \equiv 1$, то есть данная функция является тождественно истинной.

Дизъюнктивная нормальная форма может быть дальше упрощена. При этом мы используем формулы булевой алгебры.

**Пример 2.3**

Упростить формулу: $A = \bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z}$.

**Решение**

$A = \bar{x}yz \vee (x\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z})$ (группировка второго и третьего слагаемого) $= \bar{x}yz \vee x\bar{z}(\bar{y} \vee y)$ (вынесение общего множителя за скобку) = $\bar{x}yz \vee x\bar{z} \vee 1$ = $\bar{x}yz \vee x\bar{z}$ (свойство единицы). Дальнейшее упрощение невозможно.

**Пример 2.4**

Привести к ДНФ формулу $f = (z \to t) \oplus (\overline{x \vee z})$.

**Решение**

1)Исключаем связку $\oplus$

$$f = \overline{(z \to t)}(\overline{x \vee z}) \vee \left(z \to t\right)\overline{\overline{x \vee y}} = (\textit{закон двойного отрицания}) =$$

$$\overline{\left(z \to t\right)}\overline{\left(x \vee z\right)} \vee \left(z \to t\right)\left(x \vee y\right) = (\textit{исключаем} \to) =$$

$$\overline{\bar{z} \vee t}\ \left(\overline{x \vee z}\right) \vee \left(\bar{z} \vee t\right)\left(x \vee y\right) = (\textit{закон Де Моргана}) =$$

$$(\bar{\bar{z}} \wedge \bar{t}\,)\left(\bar{x} \wedge \bar{z}\,\right) + (\bar{z} + t)(x + y) = (\textit{закон двойного отрицания}) =$$

$$(z\bar{t}\,)(\bar{x} \quad \bar{z}\,) + (\bar{z} + t)(x + y) = (\textit{раскрываем скобки по}$$

$$\textit{дистрибутивному закону}) =$$

$$z\bar{t}\bar{x} \quad \bar{z} + \bar{z}x + \bar{z}y + tx + ty = (\textit{правило } x\bar{x} = 0) =$$

$$\bar{z}x + \bar{z}y + tx + ty - \textit{ДНФ}.$$

## Использование ДНФ для решения логических уравнений

Рассмотрим логическое уравнение

$\bigvee\limits_{k\in[1,m]} t_k = 1$, где левая часть является ДНФ формой логической функции, то есть дизъюнкцией контермов, мы записываем далее равносильную *совокупность* уравнений

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = 1 \\ \quad\vdots \\ t_m = 1 \end{array}\right.,$$

для каждого терма $t_i = x_{i_1}^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_k}^{\alpha_k}$ записываем соответствующую систему $\left\{\begin{array}{l} x_{i_1}^{\alpha_1} = 1 \\ \quad\vdots \\ x_{i_k}^{\alpha_k} = 1 \end{array}\right.$

Выписываем ее решение

$$\left\{\begin{array}{c} x_{i_1} = \alpha_1 \\ \vdots \\ x_{i_k} = \alpha_k \\ x_j \in \{0,1\},\ j \notin \{i_1, \cdots i_k\} \end{array}\right.$$

и выполняем объединение этих решений в качестве ответа.

**Пример 2.5**

Дана система трех логических уравнений $\left\{\begin{array}{l} x_1 = x_3 \\ x_2 \to x_1x_3 \\ x_2 \mid x_3 = 0 \end{array}\right.$.

**Решение**

1. Сводим все уравнения системы к виду, когда в их правых частях находятся единицы:

$$\left\{\begin{array}{l} (x_1 = x_3) = 1 \\ (x_2 \to x_1x_3) = 1 \\ x_2 \wedge x_3 = 1 \end{array}\right..$$

2. Формируем логическую функцию, равную конъюнкции левых частей данной системы:

$$f = (x_1 = x_3) \wedge (x_2 \to x_1x_3) \wedge x_2 \wedge x_3 = 1.$$

3. Исключаем в выражении функции $f$ все логические операции, не входящие в стандартный булевский базис:

$$f=(x_1x_3\vee\bar{x}_1\bar{x}_3)\wedge(\bar{x}_2\vee x_1x_3)\wedge x_2\wedge x_3=1.$$

4. Раскрываем скобки, приводим подобные, удаляем термы равные 0, получаем: $x_1x_2x_3=1$,

откуда получаем *единственное решение* $\begin{cases} x_1=1, \\ x_2=1, \\ x_3=1. \end{cases}$

**Пример 2.6**.

Решить логическое уравнение $x_2\to x_1\oplus x_3$.

**Решение**

Эквивалентное уравнение

$\bar{x}_2\vee x_3\bar{x}_1\vee x_1\bar{x}_3=1.$

Совокупность уравнений: $\left[\begin{array}{l} \bar{x}_2=1, \\ x_3\bar{x}_1=1, \\ x_1\bar{x}_3=1. \end{array}\right.$

*Ответ*: Данное уравнение имеет одно из следующих трех решений:

1. $x_2=0$, $x_1,x_3$ – любые;
2. $x_1=0, x_3=1$, $x_2$ – любое,
3. $x_1=1, x_3=0$, $x_2$ – любое.

## 3. Индивидуальные задания

1. Привести к ДНФ логическую формулу и максимально упростить и решить логическое уравнение

| № варианта | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | $\bar{x}\vee\bar{z}\to\overline{x\,t}\,\bar{z}$=1 | $\bar{x}\vee\bar{z}\leftrightarrow\overline{x\,t}\,\bar{z}$=1 |
| 2 | $\bar{x}\bar{z}\to x\oplus t\bar{z}$=0 | $\bar{x}\bar{z}\oplus x\to t\bar{z}$=0 |
| 3 | $\bar{x}\wedge z\vee x\to t\bar{z}$=1 | $\bar{x}\to zx\wedge t\bar{z}$=1 |
| 4 | $\bar{x}+z\to x\vee t\bar{z}$=0 | $\bar{x}y+z\leftarrow x+t\bar{z}$=0 |
| 5 | $\bar{x}\wedge z\to(x\vee t)(x\leftarrow z)$=1 | $\bar{x}\leftarrow zxt\wedge(x\leftarrow z)$=1 |
| 6 | $\bar{x}\vee z\to x\vee t\wedge(x\leftarrow z)$=0 | $\bar{x}\vee z\to x+t\wedge(x\to z)$=0 |
| 7 | $\bar{x}\vee z\to x\vee t\oplus(x\leftarrow z)$=1 | $\bar{x}\vee z\to xt\oplus(x\leftarrow z)$=1 |

| № варианта | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 8 | $\bar{x} \wedge z \leftrightarrow x \vee t\bar{z}$ =0 | $\bar{x} \wedge z \leftrightarrow (x \vee t)\bar{z}$ =0 |
| 9 | $\bar{x}\bar{z} \leftarrow x \rightarrow t\bar{z}$ =1 | $\bar{x}\bar{z} \leftarrow (x \rightarrow t)\bar{z}$ =1 |
| 10 | $\bar{x} \oplus \bar{z} \rightarrow x \vee t\bar{z}$ =0 | $\bar{x} \wedge \bar{z} \rightarrow (x \vee t)\bar{z}$ =0 |
| 11 | $\bar{x} \vee z \rightarrow x \leftarrow t \wedge (x \leftarrow z)$ =0 | $\bar{x} \vee z \rightarrow (x \leftarrow t) \wedge (x \leftarrow z)$ =0 |
| 12 | $\bar{x} \rightarrow \bar{t} \rightarrow \overline{x}\, t\bar{z}$ =1 | $\bar{x} \rightarrow (\bar{t} \rightarrow \overline{x})t\bar{z}$ =1 |
| 13 | $\bar{x}\bar{z}t \oplus x \wedge z$ =0 | $\bar{x}\bar{z}t \oplus x + z$ =0 |
| 14 | $\bar{x} \oplus z \rightarrow x \rightarrow t\bar{z}$ =1 | $\bar{x} \oplus z \rightarrow (x \rightarrow t)\overline{z}$ =1 |
| 15 | $\bar{x} \wedge z \rightarrow xt\bar{z}$ =0 | $\bar{x} \wedge z \rightarrow x + t\bar{z}$ =0 |
| 16 | $\bar{x} \wedge z \rightarrow x \vee t \wedge (x \oplus z)$ =1 | $\bar{x} \wedge z + x \vee t \wedge (x \oplus z)$ =1 |
| 17 | $\bar{x} \leftrightarrow z \rightarrow x \vee t \wedge (x \leftarrow z)$ =0 | $\bar{x} \leftrightarrow zx \vee t \wedge (x \leftarrow z)$ =0 |
| 18 | $\bar{x} \vee z \rightarrow x \vee t \oplus (x \leftarrow z)$ =1 | $\bar{x} \vee z \rightarrow (x \vee t) \oplus (x \leftarrow z)$ =1 |
| 19 | $\bar{x} \wedge z \leftrightarrow x \leftrightarrow t\bar{z}$ =0 | $\bar{x} \wedge (z \leftrightarrow x) \leftrightarrow t\bar{z}$ =0 |
| 20 | $\bar{x}\bar{z} \leftarrow (x \vee t) \rightarrow t\bar{z}$ =1 | $\bar{x}\bar{z} \leftarrow ((x \vee t) \rightarrow t)\bar{z}$ =1 |
| 21 | $\bar{x} \wedge (\bar{z} \rightarrow x) \vee t\bar{z}$ =0 | $\bar{x} \wedge (\bar{z} \rightarrow x) \wedge t\bar{z}$ =0 |
| 22 | $\bar{x} \vee (z \rightarrow x \leftarrow t) \wedge (x \leftarrow z)$ =1 | $\bar{x} \vee (z \rightarrow xt) \wedge (x \leftarrow z)$ =1 |
| 23 | $(\bar{x} \vee z) \rightarrow x \leftarrow t \wedge (x \leftarrow z)$ =0 | $(\bar{x}z) \rightarrow x \leftarrow t \wedge (x \leftarrow z)$ =0 |
| 24 | $\bar{x} \rightarrow (\bar{t} \rightarrow \overline{x})t\bar{z}$ =1 | $\bar{x} \rightarrow (\bar{t} \rightarrow \overline{x}) \rightarrow t\bar{z}$ =1 |
| 25 | $\bar{x}\bar{z} \vee t \oplus x \rightarrow z$ =0 | $\bar{x}\overline{z}(t \oplus x) \rightarrow z$ =0 |

## 4. Контрольные вопросы

1. Как задается приоритет логических операций?
2. Что такое ДНФ?
3. Каков алгоритм приведения произвольной логической функции к виду ДНФ?
4. Как решается логическое уравнение с помощью ДНФ?

# Лабораторная работа. «Таблицы истинности булевских функций, совершенная дизъюнктивная и совершенная конъюнктивная нормальные формы булевских функций»

## 1. Цель работы

Целью лабораторной работы является изучение булевских формул, таблиц истинности булевских функций.

## 2. Краткие теоретические положения

Булевской функцией от $n$ переменных называется отображение $f: B_n \to B_1$ $n$-мерного булевского куба в одномерный.

Таким образом, это функция, определенная на двоичных наборах и принимающая значения 0 и 1.

Булевская функция может быть задана своей таблицей значений $T(f)$ вида:

| $x_1$ | ..... | $x_n$ | $f(x_1, ..., x_n)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | ..... | 0 | $f(0, 0, \ldots, 0)$ |
| 0 | ..... | 1 | $f(0, 0, \ldots, 1)$ |
| ..... | ..... | ..... | ..... |
| 1 | ..... | 1 | $f(1, 1, \ldots, 1)$ |

В данной таблице указываются все возможные двоичные наборы $(x_1, ..., x_n)$ и соответствующие значения $f(x_1, ..., x_n)$.

Имеется 16 элементарных булевских функций от двух переменных. Они имеют следующие названия и обозначения.

$f_1 = x_1 x_2$ – конъюнкция;

$f_2 = x_1 \vee x_2$ – дизъюнкция

$f_3 = x_1 \to x_2$ – импликация $x_1$ в $x_2$

$f_4 = x_1 \leftarrow x_2$ – импликация $x_2$ в $x_1$

$f_5 = x_1 \sim x_2$ – равнозначность (эквивалентность)

$f_6 = x_1 \oplus x_2$ – неравнозначность (сложение по mod 2)

$f_7 = x_1 \mid x_2$ – функция Шеффера

$f_8 = x_1 \downarrow x_2$ – функция Вебба (стрелка Вебба)

$f_9 = \overline{x_1 \rightarrow x_2}$ – функция запрета $x_2$

$f_{10} = \overline{x_2 \rightarrow x_1}$ – функция запрета $x_1$

$f_{11} = x_1$ – повтор $x_1$

$f_{12} = \bar{x}_1$ – инверсия $x_1$

$f_{13} = x_2$ – повтор $x_2$

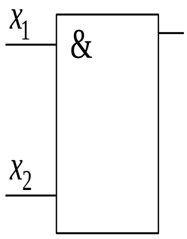
$f_{14} = \bar{x}_2$ – инверсия $x_2$

$f_{15} = 1$ – константа 1

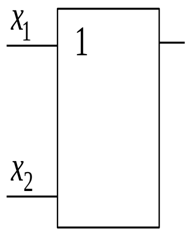
$f_{16} = 0$ – константа 0

Для этих булевских функций используются следующие схематические обозначения в виде элементарных блоков.

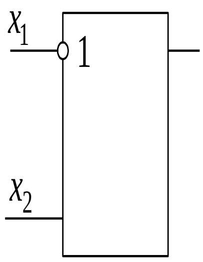
1) $f_1 = x_1 \wedge x_2$ – конъюнкция



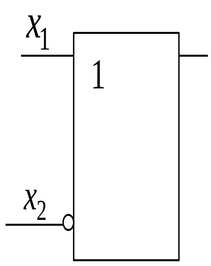

2) $f_2 = x_1 \vee x_2$ – дизъюнкция



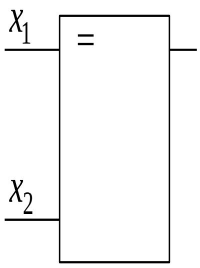

3) $f_3 = x_1 \rightarrow x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2$ импликация $x_1$ в $x_2$



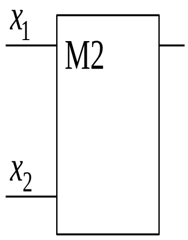

4) $f_4 = x_1 \leftarrow x_2$ – импликация $x_2$ в $x_1$



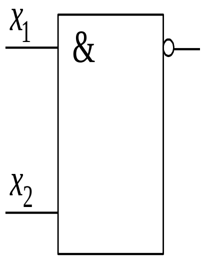
5) $f_5 = x_1 \sim x_2$ – равнозначность (эквивалентность)



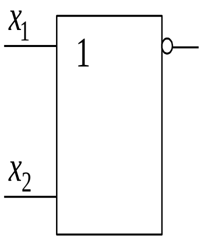

6) $f_6 = x_1 \oplus x_2$ – неравнозначность (сумм по модулю 2



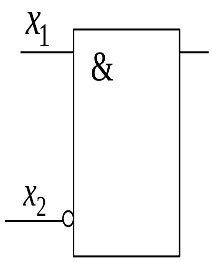

7) $f_7 = x_1 \mid x_2 = \overline{x_1 x_2}$ – функция Шеффера



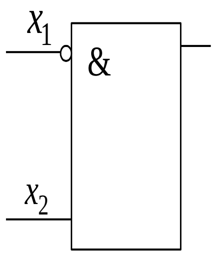

8) $f_8 = x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2}$ – функция Вебба



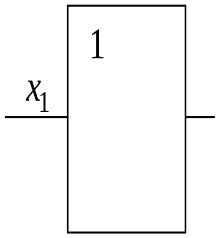

9) $f_9 = \overline{x_1 \to x_2} = x_1 \wedge \bar{x}_2$ – функция запрета $x_1$



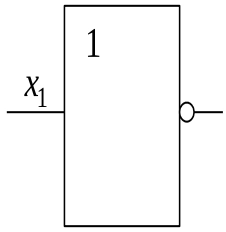

10) $f_{10} = \overline{x_1 \leftarrow x_2} = \bar{x}_1 \wedge x_2$ – функция запрета $x_2$



11) $f_{11} = x_1$ – повтор x1




12) $f_{12} = \bar{x}_1$ – инверсия x1




Эти элементарные функции характеризуются следующей таблицей истинности

| $x_1$ | $x_2$ | $x_1 \wedge x_2$ | $x_1 \vee x_2$ | $x_1 \to x_2$ | $x_2 \to x_1$ | $x_2 = x_1$ | $x_2 \oplus x_1$ | $x_2 \mid x_1$ | $x_2 \downarrow x_1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

**Пример 2.1**.

Булевская функция от 4-х переменных задается формулой $f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \left(x_1 \to x_3\right) \downarrow \left(x_2 \oplus x_4\right)$. Построить таблицу истинности данной функции.

**Решение.**

Таблицу истинности строим по столбцам путем последовательного построения подформул данной формулы.

| $i$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_1 \to x_3$ | $x_2 \oplus x_4$ | $\left(x_1 \to x_3\right) \downarrow \left(x_2 \oplus x_4\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 5 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 7 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

| $i$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_1 \to x_3$ | $x_2 \oplus x_4$ | $(x_1 \to x_3)\downarrow(x_2 \oplus x_4)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 9 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 10 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 11 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 12 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 13 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 14 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 15 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

***Картой Карно*** булевской функции $f \in \widetilde{B}_4$ называется таблица вида:

| $x_1x_2$ / $x_3x_4$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | $f(0000)$ | $f(0100)$ | $f(1100)$ | $f(1000)$ |
| 01 | $f(0001)$ | $f(0101)$ | $f(1101)$ | $f(1001)$ |
| 11 | $f(0011)$ | $f(0111)$ | $f(1111)$ | $f(1011)$ |
| 10 | $f(0010)$ | $f(0110)$ | $f(1110)$ | $f(1010)$ |

**Пример 2.2.** Построить карту Карно булевской функции из примера 2.1.

**Решение**

| $x_1x_2$ / $x_3x_4$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 01 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 |

**Определение.** ***Совершенной конъюнктивной нормальной формой*** булевской функции(СКНФ) называется ее разложение в конъюнкцию элементарных дизъюнкций максимального ранга. Эта форма имеет вид:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \prod_{a_1,...,a_n)\in B_n} \left( f(\alpha_1, ..., \alpha_n) \vee x_1^{\overline{\alpha}_1} \vee ... \vee x_n^{\overline{\alpha}_n} \right) =$$

$$\prod_{a_1,...,a_n)\in B_n : f\left(x_1^{\overline{\alpha}_1} \vee ... \vee x_n^{\overline{\alpha}_n}\right)=0} x_1^{\overline{\alpha}_1} \vee ... \vee x_n^{\overline{\alpha}_n}.$$

Данную формулу можно записать в виде:

$$f(x) = \bigwedge_{\alpha\in D_0(f)} M_{\overline{\alpha}}$$

То есть в виде конъюнкции макстермов, соответствующих нулевому множеству данной функции с инверсией показателей $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ этих макстермов.

***Совершенной дизъюнктивной нормальной*** (СДНФ) формой булевской функции(СДНФ) называется ее разложение в дизъюнкцию элементарных конъюнкций максимального ранга. Эта форма имеет вид:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigcup_{(a_1,...,a_n)\in B_n : f(a_1,...,a_n)=1} \left( f(\alpha_1, ..., \alpha_n) \wedge x_1^{\alpha_1} \wedge ... \wedge x_n^{\alpha_n} \right) =$$

$$= \bigcup_{(a_1,...,a_n)\in B_n : f(a_1,...,a_n)=1} x_1^{\alpha_1} \wedge ... \wedge x_n^{\alpha_n}$$

И ее можно записать в виде: $f(x) = \bigvee_{\alpha\in D_1(f)} m_\alpha$

То есть в виде дизъюнкции минтермов полного ранга, соответствующих единичному множеству данной функции.

**Пример 2.3**.

Построить СДНФ и СКНФ булевской функции из примера 2.1.

**Решение**

Воспользуемся таблицей истинности этой функции, полученной в примере 2.1:

| $i$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_1 \to x_3$ | $x_2 \oplus x_4$ | $(x_1 \to x_3) \downarrow (x_2 \oplus x_4)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |

| $i$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_1 \to x_3$ | $x_2 \oplus x_4$ | $(x_1 \to x_3) \downarrow (x_2 \oplus x_4)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 5 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 7 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 8 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 9 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 10 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 11 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 12 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 13 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 14 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 15 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

При построении СДНФ используем единичные наборы данной функции

| $i$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_1 \to x_3$ | $x_2 \oplus x_4$ | $(x_1 \to x_3) \downarrow (x_2 \oplus x_4)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 13 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |

По формуле

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigcup_{(a_1,\ldots,a_n) \in B_n : f(a_1,\ldots,a_n)=1} x_1^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge x_n^{\alpha_n}$$

Получаем выражение СДНФ:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bigcup_{(a_1,\ldots,a_n) \in B_n : f(a_1,\ldots,a_n)=1} x_1^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge x_4^{\alpha_n} =$$

$$= x_1^1 x_2^0 x_3^0 x_4^0 \vee x_1^1 x_2^1 x_3^0 x_4^1 = x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 .$$

При построении СКНФ используем нулевые наборы данной функции:

| $i$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_1 \to x_3$ | $x_2 \oplus x_4$ | $(x_1 \to x_3) \downarrow (x_2 \oplus x_4)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 5 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 7 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 9 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 10 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 11 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 12 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 14 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 15 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

По формуле

$$f(x_1, x_2, .., x_n) = \prod_{a_1, \ldots, a_n) \in B_n : f\left(x_1^{\bar{\alpha}_1} \vee \ldots \vee x_n^{\bar{\alpha}_n}\right) = 0} x_1^{\bar{\alpha}_1} \vee \ldots \vee x_n^{\bar{\alpha}_n}$$

Получаем выражение СКНФ данной функции:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\left(x_1^{\bar{0}}\vee x_2^{\bar{0}}\vee x_3^{\bar{0}}\vee x_4^{\bar{0}}\right)\wedge\left(x_1^{\bar{0}}\vee x_2^{\bar{0}}\vee x_3^{\bar{0}}\vee x_4^{\bar{1}}\right)\wedge$$

$$\wedge\left(x_1^{\bar{0}}\vee x_2^{\bar{0}}\vee x_3^{\bar{1}}\vee x_4^{\bar{0}}\right)\wedge\left(x_1^{\bar{0}}\vee x_2^{\bar{0}}\vee x_3^{\bar{1}}\vee x_4^{\bar{1}}\right)\wedge\left(x_1^{\bar{0}}\vee x_2^{\bar{1}}\vee x_3^{\bar{0}}\vee x_4^{\bar{0}}\right)\wedge$$

$$\wedge\left(x_1^{\bar{0}}\vee x_2^{\bar{1}}\vee x_3^{\bar{0}}\vee x_4^{\bar{1}}\right)\wedge\left(x_1^{\bar{0}}\vee x_2^{\bar{1}}\vee x_3^{\bar{1}}\vee x_4^{\bar{0}}\right)\wedge$$

$$\wedge\left(x_1^{\bar{0}}\vee x_2^{\bar{1}}\vee x_3^{\bar{1}}\vee x_4^{\bar{1}}\right)\wedge\left(x_1^{\bar{1}}\vee x_2^{\bar{0}}\vee x_3^{\bar{0}}\vee x_4^{\bar{1}}\right)\wedge\left(x_1^{\bar{1}}\vee x_2^{\bar{0}}\vee x_3^{\bar{1}}\vee x_4^{\bar{0}}\right)\wedge$$

$$\wedge\left(x_1^{\bar{1}}\vee x_2^{\bar{0}}\vee x_3^{\bar{1}}\vee x_4^{\bar{1}}\right)\wedge\left(x_1^{\bar{1}}\vee x_2^{\bar{1}}\vee x_3^{\bar{0}}\vee x_4^{\bar{0}}\right)\wedge\left(x_1^{\bar{1}}\vee x_2^{\bar{1}}\vee x_3^{\bar{1}}\vee x_4^{\bar{0}}\right)\wedge$$

$$\wedge\left(x_1^{\bar{1}}\vee x_2^{\bar{1}}\vee x_3^{\bar{1}}\vee x_4^{\bar{1}}\right)=$$

$$=\left(x_1^{1}\vee x_2^{1}\vee x_3^{1}\vee x_4^{1}\right)\wedge\left(x_1^{1}\vee x_2^{1}\vee x_3^{1}\vee x_4^{0}\right)\wedge\left(x_1^{1}\vee x_2^{1}\vee x_3^{0}\vee x_4^{1}\right)\wedge$$

$$\wedge\left(x_1^{1}\vee x_2^{1}\vee x_3^{0}\vee x_4^{0}\right)\wedge\left(x_1^{1}\vee x_2^{0}\vee x_3^{1}\vee x_4^{1}\right)\wedge\left(x_1^{1}\vee x_2^{0}\vee x_3^{1}\vee x_4^{0}\right)\wedge$$

$$\wedge\left(x_1^{1}\vee x_2^{0}\vee x_3^{0}\vee x_4^{1}\right)\wedge\left(x_1^{1}\vee x_2^{0}\vee x_3^{0}\vee x_4^{0}\right)\wedge\left(x_1^{0}\vee x_2^{1}\vee x_3^{1}\vee x_4^{0}\right)\wedge$$

$$\wedge\left(x_1^{0}\vee x_2^{1}\vee x_3^{0}\vee x_4^{1}\right)\wedge\left(x_1^{0}\vee x_2^{1}\vee x_3^{0}\vee x_4^{0}\right)\wedge\left(x_1^{0}\vee x_2^{0}\vee x_3^{1}\vee x_4^{1}\right)\wedge$$

$$\wedge\left(x_1^{0}\vee x_2^{0}\vee x_3^{0}\vee x_4^{1}\right)\wedge\left(x_1^{0}\vee x_2^{0}\vee x_3^{0}\vee x_4^{0}\right)=$$

$$=\left(x_1\vee x_2\vee x_3\vee x_4\right)\left(x_1\vee x_2\vee x_3\vee \bar{x}_4\right)\wedge\left(x_1\vee x_2\vee \bar{x}_3\vee x_4\right)\wedge$$

$$\wedge\left(x_1\vee x_2\vee \bar{x}_3\vee \bar{x}_4\right)\wedge\left(x_1\vee \bar{x}_2\vee x_3\vee x_4\right)\wedge\left(x_1\vee \bar{x}_2\vee x_3\vee \bar{x}_4\right)\wedge$$

$$\wedge\left(x_1\vee \bar{x}_2\vee \bar{x}_3\vee x_4\right)\wedge\left(x_1\vee \bar{x}_2\vee \bar{x}_3\vee \bar{x}_4\right)\wedge\left(\bar{x}_1\vee x_2\vee x_3\vee \bar{x}_4\right)\wedge$$

$$\wedge\left(\bar{x}_1\vee x_2\vee \bar{x}_3\vee x_4\right)\wedge\left(\bar{x}_1\vee x_2\vee \bar{x}_3\vee \bar{x}_4\right)\wedge\left(\bar{x}_1\vee \bar{x}_2\vee x_3\vee x_4\right)\wedge$$

$$\wedge\left(\bar{x}_1\vee \bar{x}_2\vee \bar{x}_3\vee x_4\right)\wedge\left(\bar{x}_1\vee \bar{x}_2\vee \bar{x}_3\vee \bar{x}_4\right)$$

**3. Задание**

Булевская функция от 4-х переменных дана формулой. Получить таблицу истинности этой функции, выписать для нее СДНФ и СКНФ, изобразить соответствующие логические схемы.

**Индивидуальные задания**

| № вар. | $f$ | № вар. | $f$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $(x_1 \oplus x_3) \downarrow (x_2 \oplus x_4)$ | 2 | $(x_1 \to x_3) \downarrow (x_2 \oplus x_4)$ |
| 3 | $(x_1 \to x_3) \downarrow (x_2 \mid x_4)$ | 4 | $(x_1 \to x_3) \downarrow (x_2 \to x_4)$ |
| 5 | $(x_1 \to x_3) \oplus (x_2 \to x_4)$ | 6 | $(x_1 \to x_3) \oplus (x_2 \mid x_4)$ |
| 7 | $(x_1 \downarrow x_3) \oplus (x_2 \mid x_4)$ | 8 | $(x_1 \downarrow x_3) \oplus (x_2 \downarrow x_4)$ |
| 9 | $(x_1 \leftarrow x_3) \oplus (x_2 \downarrow x_4)$ | 10 | $(x_1 \leftarrow x_3) \oplus (x_2 \leftarrow x_4)$ |
| 11 | $(x_1 \leftarrow x_3) \mid (x_2 \leftarrow x_4)$ | 12 | $(x_1 \mid x_3) \mid (x_2 \leftarrow x_4)$ |
| 13 | $(x_1 \leftarrow x_3) \mid (x_2 \oplus x_4)$ | 14 | $(x_1 \oplus x_3) \mid (x_2 \oplus x_4)$ |
| 15 | $(x_1 \oplus x_3) \mid (x_2 \downarrow x_4)$ | 16 | $(x_1 \downarrow x_3) \mid (x_2 \downarrow x_4)$ |
| 17 | $(x_1 \wedge x_3) \mid (x_2 \downarrow x_4)$ | 18 | $(x_1 \wedge x_3) \mid (x_2 \vee x_4)$ |
| 19 | $(x_1 \wedge x_3) \oplus (x_2 \vee x_4)$ | 20 | $(x_1 \wedge x_3) \downarrow (x_2 \vee x_4)$ |
| 21 | $(x_1 \vee x_3) \mid (x_2 \downarrow x_4)$ | 22 | $(x_1 \to x_3) \oplus (x_2 \vee x_4)$ |
| 23 | $(x_1 \to x_3) \oplus (x_2 \vee x_4)$ | 24 | $(x_1 \downarrow x_3) \oplus (x_2 \oplus x_4)$ |
| 25 | $(x_1 \mid x_3) \mid (x_2 \wedge x_4)$ | 26 | $(x_1 \vee x_3) \oplus (x_2 \mid x_4)$ |

## 4. Контрольные вопросы

1. Дать определение булевской функции.
2. Перечислить элементарные булевские функции.
3. Что называется ДНФ, КНФ, СДНФ, СКНФ?
4. Что такое таблица истинности булевской функции?.
5. Как по таблице истинности булевской функции выписывается ее СДНФ, СКНФ?

# Лабораторная работа «Метод Квайна»

## 1. Цель работы

Целью лабораторной работы является изучение метода Квайна.

## 2. Краткие теоретические положения

Одномерный булевский куб $B=\{0,1\}$ – это множество, состоящее из двух значений: 0 – ложь и 1 – истина.

Многомерный ($n$-мерный) булевский куб $B^{\,n} = B^1 \times \ldots \times B^1 = \left\{\left(x_1,\ x_2, \ldots ,\ x_n\right),\ \ x_i \in \{0,1\}, i=1, \ldots , n\right\}$ – это декартово $n$ одномерных булевских кубов или, что тоже самое, множество $n$-мерных векторов с булевскими компонентами.

Булевская функция от $n$ переменных – это функция вида $f : B^n \to B^1$, То есть функция $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ от $n$ булевских переменных $x_i \in \{0,1\},\ i=1, \ldots , n$ и принимающая булевские значения $f\left(x_1, \ldots , x_n\right) \in B = \{0,1\}$.

Булевская функция задается таблицей истинности.

**Пример 2.1.**. Булевская функция $f : B^3 \to B$ задана таблицей истинности:

| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $f\left(x_1,x_2,x_3\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 0 | | | 1 |
| | | 0 | | | 0 |
| | | 1 | | | 0 |
| | | 1 | | | 1 |
| | | 0 | | | 1 |
| | | 0 | | | 0 |
| | | 1 | | | 1 |
| | | 1 | | | 1 |

Найти значение $f\left(0, 0, 1\right)$.

**Решение**.

По таблице находим $f\left(0, 0, 1\right) = 0$.

Базисными логическим функциями являются:

1) Отрицание $f_1(x) = \bar{x}$. Это функция от одной логической переменной характеризуется следующей таблицей истинности:

| $x$ | $\bar{x}$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

2)Дизъюнкция $f_2(x) = x \vee y$. Это функция от двух логических переменных характеризуется следующей таблицей истинности:

| $x$ | $y$ | $x \vee y$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

То есть дизъюнкция равна 1, когда хотя бы один из ее аргументов равен 1.

3)Конъюнкция $f_3(x) = x \wedge y$. Это функция от двух логических переменных характеризуется следующей таблицей истинности:

| $x$ | $y$ | $x \vee y$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

То есть дизъюнкция равна 1. когда оба ее аргументы равны 1.

Базисные логические функции обладают замечательными свойствами, которые в совокупности образуют систему законов булевской алгебры.

Это свойства:

1. Коммутативность законов дизъюнкции и конъюнкции:

$$x \vee y = y \vee x,$$

$$x \wedge y = y \wedge x$$

2. Ассоциативность законов дизъюнкции и конъюнкции:

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z = x \vee y \vee z,$$

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z = x \wedge y \wedge z$$

Эти законы означают независимость результата операции при трех операндах от порядка расстановки скобок.

3. Дистрибутивность законов дизъюнкции и конъюнкции относительно друг друга:

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$$
$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

4. Законы идемпотентности для операций:
$$x \vee x = x,$$
$$x \wedge x = x.$$
5. Свойства действий с 0 и 1:
$$x \vee 0 = x,$$
$$x \wedge 0 = 0,$$
$$x \vee 1 = 1,$$
$$x \wedge 1 = x.$$
6. Свойства отрицания:
   6.1. $\overline{\overline{x}} = x$ – закон двойного отрицания;
   6.2. $\overline{x} \wedge x = 0$, $\overline{x} \vee x = 1$ – свойства дополнительности;
   6.3. $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$, $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$ – законы Де Моргана;
   6.4. $\overline{0} = 1$, $\overline{1} = 0$ – отрицание 0 и 1;

Правило склеивания имеет вид: $(x \wedge B) \vee (\overline{x} \wedge B) = B$, то есть при склеивании двух конъюнкций, отличающихся только по некоторому сомножителю $x$, это сомножитель уходит, а два перемножаемых терма склеиваются в один.

**Пример 2.1.** Упростить $xyz \vee x\overline{y}z = xz(y \vee \overline{y}) = xz1 = xz$

**Решение**

Применяем правило поглощения.

$xB \vee B = B$

То есть при дизъюнкции терм вида $B$ поглощает терм вида $xB$

**Пример 2.2.** Упростить выражение $xyz \vee xz$.

**Решение**

Применяем правило поглощения. Получаем $xyz \vee xz = xz$

Символом $\widetilde{B}_n$ обозначается множество всех булевых функций от $n$ переменных.

Единичным множеством функции $f \in \widetilde{B}_n$ называется множество $D_1(f) \subset B_n$ всех двоичных наборов, на которых функция равна 1.

*Нулевым множ*еством $D_0(f)$ называется множество всех наборов, на которых функция равна 0.

Имеет место дизъюнктное объединение: $D_1(f) \cup D_0(f) = B_n$, поэтому для заданной функции достаточно задавать $D_1(f)$ или $D_0(f)$в отдельности, так как второе множество однозначно строится по первому и наоборот.

Функция $g \in \widetilde{B}_n$ называется *импликантой* функции $f \in \widetilde{B}_n$ и это записывается в виде $g \le f$, если $D_1(g) \subseteq D_1(f)$, то есть единичное множество функции $g$ включено в единичное множество функции $f$. В этом случае импликация $g \to f$ является тождественно истинной.

Пусть $\alpha, \beta \in B_n$ – двоичные наборы, обозначение $\alpha \le \beta$ означает что для $\forall i \in \overline{1,n}$ выполняется неравенство $\alpha_i \le \beta_i$.

*Интервалом* $I(\alpha, \beta)$ в булевском кубе $B_n$ с концами α и β называется множество всех двоичных наборов $\overline{x} \in B_n$, удовлетворяющих неравенству $\alpha \le \overline{x} \le \beta$.

*Размерностью* интервала $\dim(I(\alpha, \rho))$ называется число, равное $\rho(\alpha, \beta)$, то есть расстоянию Хэмминга между его конечными точками, или, что то же самое, числу различий двоичных наборов α и β.

Количество двоичных векторов, принадлежащих интервалу $I(\alpha, \beta)$, рассчитывается по формуле: $\left|I(\alpha,\beta)\right| = 2^{\dim I} = 2^{\rho(\alpha,\beta)}$.

**Пример 2.3**

Пусть $\alpha = (0, 1, 1, 0)$, $\beta = (1, 1, 1, 1) \in B_4$ концы булевского интервала в четырехмерном кубе. Записать состав интервала $I(\alpha, \beta)$.

**Решение**: $I(\alpha,\beta) = (-, 1, 1, -)$ .

Здесь $'-' = \{0, 1\}$ и называется «любое», так как $\{x \mid 0 \le x \le 1\} = \{0,1\}$.

Пусть $M \subset B_n$ – некоторое подмножество булевского куба. Интервал $I \subset M$ называется *максимальным* в $M$, если нет интервала $I_1$, такого, что $I \subset I_1 \subset M, I_1 \ne I$.

Всякое множество $M$ можно представить в виде объединения некоторого числа его максимальных интервалов. Булевскую функцию можно описать более компактно, представив ее единичное множество $D_1(f)$ в виде объединения его максимальных интервалов.

Функции вида $x_{i1}^{\alpha 1} x_{i2}^{\alpha 2} \ldots x_{ir}^{\alpha r}$ и $x_{i1}^{\alpha 1} \vee \ldots \vee x_{i1}^{\alpha 1}$, где, $a_i \subset B_1$. называются соответственно *элементарной* конъюнкцией и элементарной дизъюнкцией (По определению $x^1 = x, x^0 = \bar{x}$ ).

Число $r$ называется *рангом элементарной конъюнкции* (дизъюнкции). Ранг элементарной конъюнкции $t$ обозначается через $rg(t)$. Переменные и их отрицания, входящие в состав элементарных термов, называются буквами.

Например, $x_i \bar{x}_j x_k$, $x_1 \bar{x}_2 x_4$ – элементарные конъюнкции ранга 3.

Если $t = x_{i1}^{\alpha 1} x_{i2}^{\alpha 2} \ldots x_{ir}^{\alpha r}$ – элементарная конъюнкция, то

$t = 1 \Leftrightarrow x_{i1} = \alpha_1, \ldots, x_{ir} = \alpha_r$.

Пусть $t' = x_{j1}^{b1} x_{j2}^{b2} \ldots x_{jl}^{bl}$ и $t = x_{i1}^{\alpha 1} x_{i2}^{\alpha 2} \ldots x_{ir}^{\alpha r}$ – два контерма. Тогда $t \le t'$ тогда и только тогда, когда все буквы, входящие в $t'$, входят и в $t$. В этом случае говорят, что $t'$ поглощает $t$ и имеет место тождество $t \vee t' = t'$.

**Пример 2.4**.

Имеет место $xy\bar{z} \le x\bar{z}$ и, следовательно, $xy\bar{z} \vee x\bar{z} = x\bar{z}$

Для элементарной конъюнкции $t = x_{i1}^{\alpha 1} x_{i2}^{\alpha 2} \ldots x_{ir}^{\alpha r}$ через $I(t)$ обозначается интервал, порожденный этой конъюнкцией, при этом имеет мето равенство $I(t) = D_1(t)$, то есть всякий интервал $I \subseteq B^n$ является единичным множеством некоторой единичной конъюнкции, эта конъюнкция определется однозначно и записывается в виде $t_I$.

**Пример 2.5**.

Пусть дан интервал $I = (--1-0) \subseteq B^5$. Выписать соответствующую элементарную конъюнкцию $t_I \in \tilde{B}^5$.

**Решение**

$t_I = x_3\bar{x}_5$. Элементарная конъюнкция $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}...x_n^{\alpha_n}$ ранга $n$ и элементарная дизъюнкция $x_1^{\alpha_1} \vee ... \vee x_n^{\alpha_n}$ называются соответственно *минимальной конъюнкцией* и *максимальной дизъюнкцией* и обозначаются как $m_{\bar{a}}(x_1, x_2,...,x_n)$ и $M_{\bar{a}}(x_1, x_2,...,x_n)$ соответственно.

Элементарная конъюнкция $x_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}$ равна 1 только на одном наборе $\bar{x} = (\alpha_1,...,\alpha_n)$, на остальных она равняется 0.

Пусть $t_1, t_2,..., t_n$ – элементарные конъюнкции.

Выражение $t_1 \vee t_2 \vee ... \vee t_n$ называется *дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) с элементарными конъюнкциями*.

Если $n = 0$, то есть формула не содержит ни одой элементарной конъюнкции, она называется нулевой и обозначается через 0.

Аналогично, если $s_1, s_2,..., s_m$ – элементарные дизъюнкции, то выражение $s_1 \wedge s_2 \wedge ... \wedge s_m$ называется *конъюнктивной нормальной формой (КНФ) с элементарными дизъюнкциями* $s_1, s_2,..., s_m$. Если $m = 0$, то конъюнктивная нормальная форма называется единичной и обозначается через 1.

Для произвольной функции $f \in \tilde{B}_n$ существует дизъюнктивная и конъюнктивная нормальная формы, представляющие $f$.

Имеет место следующее разложение произвольной булевской функции $n$ переменных $f \in \tilde{B}_n$ по ее единичным элементарным конъюнкциям: $f(\bar{x}) = \sum\limits_{f(\bar{\alpha})=1} m_{\bar{\alpha}}(\bar{x})$.

Разложение в СДНФ можно непосредственно получить из таблицы истинности булевой функции.

**Пример 2.6**.

Получить совершенную ДНФ для булевой функции $f \in \tilde{B}_3$, заданной следующей таблицей истинности:

| $i$ | $x1$ | x2 | $x3$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 0 |

Имеем: $f(0) = f(4) = f(5) = 1$, для остальных наборов функция равна 0.

Поэтому

$$f(x) = m_0(x) \vee m_4(x) \vee m_5(x) = x_1^0 x_2^0 x_3^0 \vee x_1^1 x_2^0 x_3^0 \vee x_1^1 x_2^0 x_3^1$$

$$= x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2} x_3$$

– искомое разложение

**Алгоритм Квайна**

Производим склеивания элементарных единичных конъюнкций данной функции, предварительно разбив их по поясам.

*Поясом* называется множество конъюнкций определенного веса, где *вес* конъюнкции – это число не инвертированных переменных в ее представлении.

Склеиваются между собой только элементарные конъюнкции, имеющие одинаковый состав переменных и отличающиеся ровно по одной переменной, то есть в одну конъюнкцию переменная входит без отрицания, а в другую с отрицанием.

Склеиваются между собой только конъюнкции из соседних поясов. Нужно произвести все возможные такие склеивания, причем, если склеивание было успешным, то элементарные конъюнкции, вошедшие в состав элементарной конъюнкции более высокого ранга помечаются и в дальнейшем удаляются.

Когда дальнейшие склеивания уже невозможны, все непомеченные термы (элементарные конъюнкции) образуют так называемую *сокращенную ДНФ* – СДНФ($f$).

Эти термы, вошедшие в состав СДНФ($f$) называются также *простыми импликантами* данной функции $f$.

**Пример склеивания**.

$y\bar{z} \vee yz = (-10) \vee (-11) = (-1-) = y$

**Задание**.

Булевская функция $f \in B^4$ дана своим столбцом значений. Методом Квайна получить сокращенную ДНФ, то есть СДНФ(*f*) и проверить результат по карте Карно. Все простые импликанты данной функции, полученные по методу Квайна, должны соответствовать некоторым максимальным кубам на карте Карно и обратно.

**Пример выполнения**

Получить МДНФ для функции $f \in \widetilde{B}^4,\ f = (1100\ 0111\ 0000\ 1101)$.

1) Таблица истинности данной функции

| $i$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 6 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 8 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 10 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 11 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 12 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 13 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 14 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 15 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

2) Таблица Квайна склеивания единичных термов

| Ранг | Вес | № | Терм | Метка |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 0 | 1) | 0000 | ! |
| | 1 | 2) | 0001 | ! |
| | 2 | 3) | 0101 | ! |
| | | 4) | 0110 | ! |
| | | 5) | 1100 | ! |
| | 3 | 6) | 0111 | ! |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 7) | 1101 | ! |
| | 4 | 8) | 1111 | ! |
| 3 | 0 | 9) | 000- | 1+2 |
| | 1 | 10) | 0-01 | 2+3 |
| | 2 | 11) | 01-1 | 3+6 ! |
| | | 12) | -101 | 3+7 ! |
| | | 13) | 011- | 4+6 |
| | | 14) | 110- | 5+7 |
| | 3 | 15) | -111 | 6+8 ! |
| | | 16) | 11-1 | 7+8 ! |
| 2 | 2 | 17) | -1-1 | 11+16, 12+15 |

3) Выписываем сокращенную ДНФ по не вычеркнутым термам.

$$\text{Сокр.ДНФ}(f)=(000-)\vee(0-01)\vee(011-)\vee(110-)\vee(-1-1)=$$

$$=\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\vee\bar{x}_1\bar{x}_3x_4\vee\bar{x}_1x_2x_3\vee x_1x_2\bar{x}_3\vee x_2x_4$$

4) Проверяем расчет по карте Карно.

Проверим по Карте Карно.

| 34 12 | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 01 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 11 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 10 | 0 | 1 | 0 | 0 |

Таким образом, по методу Квайна найдено 5 простых импликант и все они соответствуют некоторым максимальным кубам на карте Карно, что показано нумерацией этих кубов.

## 3. Задание

Построить СДНФ данной функции методом Квайна.

**Индивидуальные задания**

| № вар. | f | № вар | f |
|---|---|---|---|
| 1 | (0001 1101 1001 0011) | 14 | (1010 1101 1101 1101) |
| 2 | (1001 1101 1001 0011) | 15 | (1010 1101 1101 0101) |
| 3 | (1001 1101 0001 0011) | 16 | (1000 1101 1101 0101) |

| № вар. | *f* | № вар | *f* |
|---|---|---|---|
| 4 | (1001 1101 0001 1011) | 17 | (1000 1101 1101 1101) |
| 5 | (1101 1101 0001 1011) | 18 | (1100 1101 1101 1101) |
| 6 | (1101 1101 0001 1001) | 19 | (1100 1101 1101 1001) |
| 7 | (1101 0101 0001 1001) | 20 | (1100 1101 1101 1000) |
| 8 | (1001 0101 0001 1001) | 21 | (1101 1101 1101 1000) |
| 9 | (1001 0101 0101 1001) | 22 | (1101 1101 0101 1000) |
| 10 | (1001 1101 0101 1001) | 23 | (1101 0101 0101 1000) |
| 11 | (1011 1101 0101 1001) | 24 | (0101 0101 0101 1000) |
| 12 | (1011 1101 0101 1101) | 25 | (0101 0101 0001 1000) |
| 13 | (1011 1101 1101 1101) | 26 | (0101 0101 0101 1010) |

## 4. Контрольные вопросы

1. Что такое импликанта функции?
2. Дать определение элементарной конъюнкции, ее ранга.
3. Что такое интервал в булевском кубе?
4. Как записывается СДНФ(*f*), то есть совершенная дизъюнктивная нормальная форма данной функции?
5. Что такое простая импликанта, СДНФ(*f*), то есть сокращенная дизъюнктивная нормальная форма данной функции?