

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна

Должность: проректор по учебной работе

Дата подписания: 10.11.2023 03:12:02

Уникальный программный ключ:

0b817ca911e6668a0b1345d426d59e5f1c11eab075e945d14a4851da56d089

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

**Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)**

Кафедра высшей математики



Функциональные ряды

Методические указания и индивидуальные задания

Курск 2018

УДК 510 (083)

Составители Е.В.Журавлева, Н.А.Конорева

Рецензент

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры
высшей математики *В.И.Дмитриев*

Функциональные ряды: методические указания и индивидуальные задания к М-8 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Е.В.Журавлева, Н.А.Конорева. Курск, 2018. 30 с. табл. 6. Библиогр.: с. 30

Излагаются методические рекомендации по выполнению модулю 12, в том числе и с использованием программного продукта MATHCAD, приведены индивидуальные задания для студентов.

Работа предназначена для студентов технических и экономических специальностей.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 16.05.18. Формат 60x84 1/16.

Усл. печ. л. 1,7. Уч.-изд. л. 1,6. Тираж 100 экз. Заказ 1989. Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.

305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

Содержание

Введение	4
1. Индивидуальные задания	5
1.1. Теоретические упражнения	5
1.2. Практические задания	6
1.2.1. Задание 1	6
1.2.2. Задание 2	10
1.2.3. Задание 3	14
1.2.4. Задание 4	16
1.2.5. Задание 5	17
1.2.6. Задание 6	21
2. Примеры выполнения заданий	24
2.1. Пример 1	24
2.2. Пример 2	26
2.3. Пример 3	28
3. Контрольные вопросы	29
Библиографический список	30

Введение

Данная работа предназначена для студентов, изучающих высшую математику, содержит теоретические упражнения, контрольные вопросы, расчетные задания и примеры выполнения заданий к модулю 12 «Функциональные ряды».

Теоретический материал, необходимый для выполнения заданий, можно найти в книгах, указанных в библиографическом списке.

При выполнении модуля каждый студент получает свой номер варианта N у преподавателя.

При комплектации индивидуальных заданий для каждого варианта используется трехуровневая система. Каждый уровень предлагает студенту свой набор задач. Их решение требует удовлетворительного, хорошего и отличного знания материала соответственно.

Каждый студент, в зависимости от степени своей подготовленности, должен:

- 1) выбрать определенный уровень;
- 2) выполнить задания этого уровня.

Что необходимо сделать? Выполнить теоретическое упражнение и следующие практические задания:

для первого уровня – решить задания 1,3,4,6;

для второго уровня – решить задания 1,2,3,5,6;

для третьего уровня – решить задания 1-6.

1. Индивидуальные задания

1.1. Теоретические упражнения

1. Дайте определение функционального ряда. Сформулируйте и докажите теорему об интегрировании функционального ряда.
2. Дайте определение функционального ряда. Сформулируйте и докажите теорему о дифференцировании функционального ряда.
3. Дайте определение степенного ряда. Сформулируйте теорему Абеля об области сходимости степенного ряда.
4. Докажите теорему Абеля об области сходимости степенного ряда.
5. Сформулируйте и докажите теорему об интервале сходимости степенного ряда.
6. Дайте определение радиуса сходимости степенного ряда. Укажите способ определения радиуса сходимости. Приведите формулу для вычисления радиуса сходимости с использованием признака Даламбера.
7. Дайте определение радиуса сходимости степенного ряда. Укажите способ определения радиуса сходимости. Приведите формулу для вычисления радиуса сходимости с использованием признака Коши.
8. Приведите формулу для ряда Тейлора. Сформулируйте и докажите условие, при котором этот ряд сходится и равен самой функции.
9. Сформулируйте и докажите теорему о дифференцировании степенного ряда.
10. Вывести формулу разложения в ряд функции $y = e^x$.
11. Вывести формулу разложения в ряд функции $y = \sin x$.
12. Вывести формулу разложения в ряд функции $y = \cos x$.
13. Вывести формулу разложения в ряд $(1 + x)^m$.
14. Вывести формулу разложения в ряд функции $y = \ln(1 + x)$.

1.2. Практические задания

1.2.1.Задание 1

Найти область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Таблица 1.1

Индивидуальные задачи к заданию 1

№ вар.	$f_n(x)$	№ вар.	$f_n(x)$
1	2	3	4
1	$\frac{(x+1)^n}{\sqrt{n}}$	2	$\frac{n^4 + 1}{2^n (x-2)^n}$
3	$\frac{(n+1)^5}{2n+3} (x+2)^n$	4	$\frac{(x-2)^{2n}}{(3n+1) \cdot 9^n}$
5	$\frac{(x+5)^{2n+1}}{4^n (n+2)^6}$	6	$\frac{(x-2)^n}{n \cdot 8^n}$
7	$\frac{n^4}{(n+1)!} \cdot (x+1)^{2n}$	8	$\frac{(x-2)^n \cdot 2^n}{n^{n+1}}$
9	$\frac{(x+3)^n}{2^n \cdot n^2}$	10	$\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1) \cdot \ln(n+1) \cdot (x-3)^n}$
11	$\frac{(-1)^n}{n^n} (x+1)^n$	12	$\frac{(x-1)^{2n}}{(n+1) \cdot 9^n}$
13	$\frac{n(n+1)}{n-3} (x-1)^n$	14	$\frac{3n+8}{n^2+4} (x-2)^n$
15	$\frac{(x-5)^n}{(n+4) \cdot \ln(n+4)}$	16	$\frac{\sqrt{2n+1}}{2^n \cdot (x+2)^n}$
17	$\frac{(-1)^n (x-2)^n}{(n+1) \cdot \ln(n+1)}$	18	$\frac{(-1)^n (x-3)^{2n}}{(2n+1) \cdot 16^n}$
19	$\frac{3n+2}{(n^2+9n+1)(x+2)^n}$	20	$\frac{n^2 \cdot x^n}{n!}$
21	$\frac{n^2+1}{3^n \cdot (x+4)^n}$	22	$\frac{(-1)^n (x+1)^n}{n \cdot 2^n \cdot \ln(n+1)}$
23	$\frac{n^3+1}{n!} (x+1)^{2n+1}$	24	$\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1} \cdot (x-2)^n$

Продолжение табл.1.1

№ вар.	$f_n(x)$	№ вар.	$f_n(x)$
25	$\frac{n^2 \cdot (x-1)^n}{(n^3+1)^3}$	26	$\frac{n!}{n^n(x+3)^n}$
27	$\frac{\sqrt{n+1}}{2^n \cdot (x+3)^n}$	28	$\frac{(x+2)^n}{\sqrt{n+1} \cdot 3^n}$
29	$\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \left(\frac{x}{2}\right)^n$	30	$\frac{(2n+3)}{(n+2)^5} \cdot (x+3)^n$
31	$\frac{n!}{(x-1)^n}$	32	$\frac{n^5+2}{n^3+3n} (x-4)^n$
33	$\frac{x^{2n}}{n^{n+1}}$	34	$\frac{n^2+5n+1}{3^n(x-2)^n}$
35	$\frac{(3n+1)^n}{(2n+3)(x+2)^{n+1}}$	36	$\frac{1}{2^n \cdot n^2(x+1)^{n+1}}$
37	$\frac{(x+1)^{2n}}{(n+1)^2 \cdot 4^n}$	38	$\frac{n^3}{n^4+1} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^n$
39	$\frac{x^{n^2}}{n^2 \cdot 3^{n^2}}$	40	$\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)^{2n-1} \cdot (x+3)^n$
41	$\frac{x^{2n}(n+3)^6}{(n^2+1)^3}$	42	$\frac{(-1)^{n+1} \cdot n^3}{3^n \cdot (x+2)^n}$
43	$\frac{(-1)^{n+1}(x+3)^n}{(n+2)\ln(n+2)}$	44	$\frac{(n+2)^5}{(x+2)^n}$
45	$\frac{x^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n} \ln \sqrt{n}}$	46	$\frac{2n+1}{(n^2+3n+3)^2} (x+2)^n$
47	$\frac{(-1)^n(x-3)^n}{(n+1) \cdot 5^n}$	48	$\frac{(x-4)^n}{n^{n+1}}$
49	$\frac{2n+3}{(n+1)(x-2)^n}$	50	$\frac{n!}{(n+1)^3} (x-2)^{2n}$
51	$\frac{n+1}{(2n+3)^6 \cdot x^{2n}}$	52	$(-1)^n(2n+1)^2 x^n$

Продолжение табл.1.1

№ вар.	$f_n(x)$	№ вар.	$f_n(x)$
53	$\frac{(x-1)^{2n+1}}{(n+1) \cdot 4^n}$	54	$\frac{(x-1)^{2n}}{n \cdot 4^n}$
55	$\frac{x^n}{(n+1)!}$	56	$\frac{(x-7)^{2n-1}}{(2n^2+5n) \cdot 4^n}$
57	$\frac{3^n \cdot n \cdot x^n}{(2n-1)(n+1)^2}$	58	$\frac{(x-5)^{2n+1}}{3n+8}$
59	$\frac{(-1)^n (x-3)^n}{(n+5) \ln(n+5)}$	60	$(-1)^{n-1} \frac{(x-2)^{2n}}{2n}$
61	$\frac{4^n}{n} (x+1)^n$	62	$\frac{x^{n+1} (n+1)!}{n^{n+1}}$
63	$\frac{4^n \cdot n^2}{(n+1)!} (x+3)^{2n+1}$	64	$\frac{2n+1}{(n+1)^2} (x+2)^n$
65	$\frac{1}{n \cdot 9^n (x+2)^n}$	66	$\frac{6n \cdot (2n-8)}{(x-1)^{2n+1}}$
67	$\frac{n^2+4}{3^n \cdot (n+1)} (x+1)^n$	68	$(-2)^n x^{2n}$
69	$\frac{(x+2)^n}{(n+3) \ln(n+3)}$	70	$\frac{(n+1)x^n}{2^n (n^2+1)}$
71	$\frac{(x-1)^{n+1} (-1)^{n+1}}{(n+1) \ln(n+1) \ln \ln(n+1)}$	72	$(-1)^{n+1} \frac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1}$
73	$\frac{(n+1)^5}{n^3} (x-2)^{2n-1}$	74	$\frac{(n-1)(x+3)^n}{3^{n+1}}$
75	$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n \cdot x^n$	76	$\frac{x^{3n}}{8^n}$
77	$\left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^3 \cdot \left(\frac{x-1}{2}\right)^n$	78	$(-1)^n \frac{n(x-5)^n}{(n+1)!}$
79	$\frac{2^n (n^3+2)}{(n+1)!} (x+2)^{2n+1}$	80	$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n x^n$
81	$\frac{(n+5)^2}{n^3 (5n+3)} (x-1)^n$	82	$\frac{x^{2n-1}}{3^n}$

Продолжение табл.1.1

N вар.	$f_n(x)$	N вар.	$f_n(x)$
83	$\frac{2n+1}{(x-3)^n}$	84	$\frac{n^2}{n+1}x^n$
85	$\frac{(x-3)^{2n-1}}{(3n+8)^2}$	86	$\frac{(n+1)^2}{2^n}x^n$
87	$\frac{2^n \cdot n \cdot (x-2)^{n+1}}{3^{n+1} \cdot (n^2+3)}$	88	$\frac{n^5 x^n}{(n+1)^n}$
89	$\frac{n(n+2)}{5^n(x+1)^n}$	90	$\frac{x^n}{\sqrt{n^2+1}}$
91	$\frac{n^2+8}{3n^2+5}(x-1)^n$	92	$\frac{x^n}{1+2^n}$
93	$\frac{x^{n^2}}{4n^2 \cdot 3^{n^2}}$	94	$\left(\frac{2n+3}{n+6}\right)^n x^n$
95	$\frac{\sqrt{n} \cdot x^n}{n!}$	96	$\frac{(x-2)^n}{(2n-1) \cdot 2n}$
97	$\frac{(x+2)^n}{n(5^n+1)}$	98	$\frac{(x-2)^n}{n\sqrt{n+1}}$
99	$\frac{x^n}{n \ln(n+1)}$	100	$\frac{n+1}{(x-2)^n(n^2+2n+1)\ln(n+1)}$

1.2.2. Задание 2

Найти область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Таблица 2.1

Индивидуальные задачи к заданию 2

№ вар.	$f_n(x)$	№ вар.	$f_n(x)$
1	2	3	4
1	$\frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{(x^2+x+1)^n}$	2	$\frac{n^3+1}{n^2+2n-3} \cdot \frac{1}{(5x^2+5x+2)^n}$
3	$\frac{n^2}{n+1} \cdot \frac{1}{(2x^2+x+1)^n}$	4	$\frac{n(5x^2+6x+4)^n}{(6n^3+18n+1)3^n}$
5	$\frac{(x^2-2x+3)^n}{3^n}$	6	$\frac{(4x^2+3x+1)^n}{2^n(n+1)^2}$
7	$\frac{1}{n} \cdot \frac{2^n}{(x^2+x+2)^n}$	8	$\frac{n+8}{2n^2+1} \cdot (3x^2-x+1)^n$
9	$\frac{n^2}{n+1} \cdot \frac{(2x^2+3x+2)^n}{2^n}$	10	$\frac{2n^2}{n^3+8} \cdot (2x^2+5x+3)^n$
11	$\frac{n^3}{n^2+2} \cdot \frac{2^n}{(2x^2-x+3)^n}$	12	$\frac{n^3}{(n+1)3^n} \cdot (x^2+4x+6)^n$
13	$\frac{3^n}{n^3+1} \cdot \frac{1}{(x^2-5x+7)^n}$	14	$\frac{3^n}{n^4+1} \cdot \frac{1}{(3x^2+2x+1)^n}$
15	$\frac{n^3}{n^4+1} \cdot \frac{1}{(x^2+2x+2)^n}$	16	$\frac{(n+1)^4}{n+2} \cdot \frac{3^n}{(x^2+3x+3)^n}$
17	$\frac{n^2}{5^n(n+1)} \cdot (3x^2-4x+1)^n$	18	$\frac{n^2+1}{n^2+n+1} \cdot (2x^2-5x+3)^n$
19	$\frac{n \cdot 5^n}{n+9} \cdot \frac{1}{(2x^2+4x+5)^n}$	20	$\frac{3^n}{n^4+n^2+1} \cdot \frac{1}{(2x^2+3x+3)^n}$
21	$\frac{(0,5)^n}{n^4+2} \cdot (6x^2+4x+1)^n$	22	$\frac{(n+1)^4}{n^8+2} \cdot \frac{1}{(x^2-3x+3)^n}$
23	$\frac{n^2}{n^4+3} \cdot \frac{1}{(4x^2+6x+3)^n}$	24	$\frac{n^4+n^3+1}{2^n \cdot n^2} \cdot (x^2-3x+4)^n$

Продолжение табл.1.2

№ вар.	$f_n(x)$	№ вар.	$f_n(x)$
25	$\frac{(4x^2 + 2x + 3)^n}{5^n \cdot n^2}$	26	$\frac{1}{(n+1)^4} \cdot \frac{(2x^2 + 5x + 5)^n}{2^n}$
27	$\frac{(3x^2 + 5x + 3)^n}{n(n+1)(n+2)}$	28	$\frac{n^2 + n}{(n+1)^5} \cdot \frac{(x^2 + 4x + 5)^n}{2^n}$
29	$\frac{1}{n^3 + 3} \cdot \frac{(3x^2 - 2x + 6)^n}{6^n}$	30	$\frac{n+8}{n+7} \cdot \frac{7^n}{(3x^2 + x + 5)^n}$
31	$\frac{n^2 + 1}{n^3 + 8} \cdot \frac{1}{(2x^2 - 5x + 4)^n}$	32	$\frac{4n^2}{n^3 + n^2 + 1} \cdot \frac{1}{(3x^2 + x + 1)^n}$
33	$\frac{2n^3}{n+1} \cdot \frac{1}{(6x^2 + x + 1)^n}$	34	$\frac{1}{5(n+1)^2} \cdot \frac{3^n}{(3x^2 - 2x + 2)^n}$
35	$\frac{(n+1)^3}{n^2 \cdot 3^n} \cdot (8x^2 - 2x + 2)^n$	36	$\frac{(3x^2 + 7x + 5)^n}{5^n} \cdot (n+2)^3$
37	$\frac{(n+1)^3}{n^6} \cdot \frac{2^n}{(7x^2 + 6x + 1)^n}$	38	$\frac{1}{3^n \cdot (n+4)^2} \cdot (2x^2 + 2x + 1)^n$
39	$\frac{(n+5)^6}{9^n} \cdot (x^2 + 2x + 5)^n$	40	$\frac{(n+2)^2}{(n+3)^3} \cdot (4x^2 - x + 1)^n$
41	$\frac{1}{n^8 + 2} \cdot \frac{(x^2 + 2x + 4)^n}{12^n}$	42	$\frac{1}{5n^2 + 6} \cdot \frac{(-5x^2 + 6x - 2)^n}{3^n}$
43	$\frac{(n+1)(n^2 + 5)}{2^n \cdot (n+6)} \cdot (3x^2 + 6x + 4)^n$	44	$\frac{(n+1)^2}{n^3 + 1} \cdot (-2x^2 - 3x + 2)^n$
45	$\frac{n^3}{(n+8)^4} \cdot \frac{1}{(6x^2 + 2x + 1)^n}$	46	$\frac{(n+5)^2}{(n+6)^2} \cdot \frac{1}{(3x^2 - 7x + 5)^n}$
47	$\frac{(n+1)^3}{n^3} \cdot \frac{5^n}{(3x^2 + 4x + 6)^n}$	48	$\frac{n^4 + 2n^2}{3^n} \cdot (5x^2 + 2x + 1)^n$
49	$\frac{2^n}{(n+3)^3} \cdot \frac{1}{(2x^2 + 5x + 4)^n}$	50	$\frac{(4x^2 + 7x + 4)^n}{4^n(n+1)}$
51	$\frac{n^2 + n}{n^4 + 1} \cdot (4x^2 + 5x + 2)^n$	52	$\frac{(-1)^n}{(x+n)^{-1/3}}$

Продолжение табл.1.2

№ вар.	$f_n(x)$	№ вар.	$f_n(x)$
53	$\frac{n}{2n^2 + 3} \cdot \frac{1}{(-5x^2 + 3x - 1)^n}$	54	$\frac{n}{n+1} \cdot \left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$
55	$\frac{4^n}{(n+1)^6} \cdot \frac{1}{(5x^2 + 2x + 1)^n}$	56	$\frac{(x(x+n))^n}{n^n}$
57	$\frac{n^2 + 3n^3}{4^n} \cdot (3x^2 - 3x + 1)^n$	58	$\frac{(-1)^n}{(x+n)^3}$
59	$\frac{(n+1)^3}{(n+5)^2 n^2} \cdot \frac{1}{(-2x^2 + 5x - 4)^n}$	60	$\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2) \cdot \dots \cdot (1+x^n)}$
61	$\frac{2^{3n}}{(n+5)^2} \cdot \frac{1}{(5x^2 + 2x + 5)^n}$	62	$\frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$
63	$\frac{n^3}{(n+1)^4} \cdot (-6x^2 + 3x + 1)^n$	64	$\frac{(-1)^n}{(x+n)^{-1/2}}$
65	$\frac{2n^4 + 1}{3^n(n^2 + 2n)} \cdot (x^2 + 5x + 7)^n$	66	$\frac{n \cdot 3^n}{2^n} \cdot x^n \cdot (1-x)^n$
67	$\frac{n^5 + 3n}{n^4 + 3n^6} \cdot (2x^2 + 7x + 7)^n$	68	$\frac{n+2}{n+3} \cdot \left(\frac{x}{1+3x}\right)^n$
69	$\frac{2^n + 5}{n^2 + 3} \cdot \frac{1}{(x^2 - 6x + 10)^n}$	70	$\frac{(-1)^n}{(x+n)^4}$
71	$\frac{1}{1+x^n}$	72	$\frac{2n-1}{2n+1} \cdot \left(\frac{x}{4x+2}\right)^n$
73	x^{n^2}	74	$\frac{n \cdot 5^n}{2^n} \cdot x^n \cdot (1-x)^n$
75	$\frac{(-1)^n}{(x+n)^{-1/4}}$	76	$\frac{(-1)^n}{(x+n)^{1/5}}$
77	$\frac{n}{n+3} \cdot \left(\frac{x}{2+3x}\right)^n$	78	$\frac{(-1)^n}{x+3^n}$
79	$\frac{n \cdot 4^n}{3^n} \cdot x^n \cdot (1-x)^n$	80	$\frac{nx}{1+n^5 x^2}$

Продолжение табл.1.2

N вар.	$f_n(x)$	N вар.	$f_n(x)$
81	$\frac{(-1)^n}{(x+n)^{1/3}}$	82	$\frac{(-1)^n}{(x+n)^{-4}}$
83	$\frac{x^n}{1+x^{2n}}$	84	$\frac{2n-1}{3n+1} \cdot \left(\frac{x}{4x+3}\right)^n$
85	$\frac{1}{x^2+n^2}$	86	$\frac{n \cdot 5^n}{3^n} \cdot x^n \cdot (1-x)^n$
87	$\frac{(-1)^n}{(x+n)^{-2}}$	88	$\frac{(-1)^n}{(x+n)^{-1/5}}$
89	$\frac{n+1}{n+2} \cdot \left(\frac{x}{4x+1}\right)^n$	90	$\frac{(-1)^n}{x+4^n}$
91	$\frac{n \cdot 7^n}{3^n} \cdot x^n \cdot (1-x)^n$	92	$\frac{x}{1+n^3 x^2}$
93	$\frac{(-1)^n}{(x+n)^{1/2}}$	94	$\frac{(-1)^n}{(x+n)^6}$
95	$\frac{(-1)^n}{x+2^n}$	96	$\frac{3n+1}{3n+2} \cdot \left(\frac{x}{2x+3}\right)^n$
97	$\frac{x}{1+n^4 x^2}$	98	$\frac{n \cdot 9^n}{2^n} \cdot x^n \cdot (1-x)^n$
99	$\frac{(-1)^n}{(x+n)^{-3}}$	100	$\frac{(-1)^n}{(x+n)^{-6}}$

1.2.3 Задание 3

Разложить функцию $f(x)$ в ряд по степеням $x - x_0$.

Таблица 1.3

Индивидуальные задачи к заданию 3

№ вар	$f(x)$	x_0	№ вар	$f(x)$	x_0
1	2	3	4	5	6
1	$\sin(x+3)$	0	2	$\frac{-3}{x^2 + x - 2}$	0
2	$\ln(10x-3)$	1	4	$\sqrt{2x+7}$	1
5	$\frac{1}{x^2 - 3x + 2}$	0	6	$\ln(3x+2)$	1
7	e^{3x+2}	1	8	e^x	3
9	$\frac{2}{x^2 - 4x + 3}$	0	10	$x^2 \cos(x+1)$	0
11	$\cos(x-2)$	0	12	$\frac{2x+2}{3x^2 - 2x - 1}$	0
13	$\sqrt[3]{1+x^2}$	0	14	$x \cdot \sin(2x+1)$	0
15	$\ln(x+2)$	0	16	$\frac{\operatorname{sh} x}{x} + \cos x$	0
17	e^{2x+1}	2	18	$\sqrt[3]{1+x}$	7
19	$\frac{x+1}{2x^2 + 3x - 2}$	0	20	$\ln(3x+1)$	0,2
21	$\sin \frac{\pi x}{4}$	2	22	$\frac{2x-1}{3x^2 + 5x - 2}$	-1
23	$\sqrt{1+x}$	3	24	$x \operatorname{arctg} x$	0
25	$\operatorname{ch} \frac{x}{3}$	0	26	$\ln(1+6x+8x^2)$	0
27	$\ln(2x+5)$	0	28	$(3+e^{-x})^2$	0
29	$\frac{7}{x^2 - 3x - 10}$	0	30	$x \sin(x+2)$	-2
31	$\sin \frac{x}{3}$	1	32	$\frac{x-2}{6x^2 + x - 1}$	0
33	e^{3x-1}	1	34	$x - \ln(2x+1)$	0
35	$\sqrt[3]{7+x}$	1	36	$\sqrt{4+x^2}$	0
37	$\cos(3x-1)$	1	38	$x \cos(x-2)$	2

Продолжение табл.1.3

N вар	f(x)	x₀	N вар	f(x)	x₀
39	$\ln(2x^2 + 3x + 1)$	0	40	e^{5x-3}	1
41	$\frac{x-2}{2x^2+x-1}$	1	42	$(x-1)\cos x$	1
43	$\frac{x}{3}\sin 3x - x^2$	0	44	$\frac{\operatorname{sh} 2x}{x} + \operatorname{ch} x$	0
45	$x \operatorname{sh} 2x$	0	46	$\ln(3x+4)$	-1
47	\sqrt{x}	4	48	$\frac{1}{2x^2-3x+1}$	-1
49	$\ln(5x+3)$	1	50	$\frac{1}{\sqrt{1+x}}$	0
51	$\frac{x+2}{6x^2-x-1}$	0	52	$x \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$	0
53	$(x - \operatorname{tg} x) \cos x$	0	54	e^{2-3x}	1
55	$\ln(3x^2 + 4x + 1)$	0	56	$(x-1)\sin x$	1
57	$\sqrt{2x+2}$	1	58	$\frac{2}{3x^2+4x+1}$	1
59	$\frac{x+1}{6x^2+7x+2}$	1	60	$\ln(2x-3)$	2
61	e^{2x+3}	0	62	$\frac{1}{\sqrt{4x+16}}$	0
63	$\cos(x^2 + 1)$	0	64	$\frac{\operatorname{arcsin} x}{x} - \cos x$	0
65	e^{2x+1}	3	66	e^{3-2x}	1
67	$(1+x)^5$	2	68	$\frac{5}{6x^2+x-1}$	1
69	$\frac{\sin x}{x} - \cos x$	0	70	$\ln(5x^2 + 6x + 1)$	0
71	$\frac{2x+1}{3x^2+5x+2}$	1	72	$\sin(2x+3)$	-1
73	$\ln(2x+3)$	-1	74	$\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^2}}$	0
75	$\sin(x^2 + 1)$	0	76	e^{4x+1}	1
77	$(x-1)^6$	2	78	$(3 - e^x)^2$	0
79	$\frac{\operatorname{sh} x}{x} - \operatorname{ch} x$	0	80	$\frac{x-7}{2x^2+17x+8}$	-1

Продолжение табл.1.3

N вар	f(x)	x₀	N вар	f(x)	x₀
81	$\frac{1}{2x^2 + 3x + 1}$	1	82	$\frac{\cos x - 1}{x^2} + 1$	0
83	$\ln(12x^2 + 7x + 1)$	0	84	e^{6x-1}	1
85	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	0	86	$\frac{5}{2x^2 - x - 3}$	2
87	$\frac{7}{6x^2 + 11x + 3}$	1	88	$\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$	7
89	$\ln(6x^2 + 5x + 1)$	0	90	$\frac{5}{x^2 + x - 6}$	1
91	$\frac{8}{3x^2 + 10x + 3}$	1	92	$\sin \frac{\pi x}{2}$	1
93	$\cos(2x + 1)$	0	94	$\ln(10x^2 + 7x + 1)$	0
95	$(1 + 2x)^5$	1	96	$(2 + 3x)^5$	1
97	e^{2-5x}	2	98	$(\operatorname{sh} x - x) \cdot 6 - x^3$	0
99	$x^3 \ln x$	1	100	$\sin(2x + 1)$	1

1.2.4. Задание 4

Вычислить значение функции $f(x)$ в заданной точке x_0 ($f(x_0)$) с точностью до 0,001.

Таблица 1.4

Индивидуальные задачи к заданию 4

N вар	f(x₀)						
1	$\sqrt[3]{7}$	2	$\sqrt[3]{1,06}$	3	$\sin 0,4$	4	$\sqrt[6]{68}$
5	$\sin 0,21$	6	$1/\sqrt[4]{e}$	7	$1/\sqrt[3]{e}$	8	$\sin 15^\circ$
9	$\sqrt[3]{9}$	10	$\sqrt[3]{145}$	11	$\cos 0,31$	12	$\cos 0,26$
13	$\cos 0,22$	14	$\cos 0,24$	15	$\sqrt{27}$	16	$\ln 2,26$
17	$1/\sqrt{e}$	18	$\sqrt[5]{246}$	19	$\sqrt[4]{17}$	20	$\sqrt[4]{18}$
21	$\ln 1,1$	22	$\ln 1,05$	23	$\ln 3,03$	24	$\cos 18^\circ$
25	$\cos 0,4$	26	$\cos 0,25$	27	$\cos 10^\circ$	28	$\sqrt[6]{556}$
29	$\sqrt[3]{10}$	30	$\sqrt[3]{72}$	31	$\cos 0,21$	32	$e^{-1/6}$
33	$\ln 1,2$	34	$\ln 1,5$	35	$e^{-0,3}$	36	$e^{-0,15}$

Продолжение табл.1.4

N вар	f(x₀)						
37	Sin 9°	38	e ^{-0,1}	39	Sin 0,22	40	Ln 1,03
41	Ln 1,3	42	Sin 36°	43	Cos 9°	44	Sin 0,25
45	Sin 10°	46	Cos 15°	47	Ln 2,04	48	$\sqrt[5]{252}$
49	$\sqrt[5]{36}$	50	$\sqrt[3]{130}$	51	Ln 1,12	52	Cos 36°
53	Sin 18°	54	Ln 1,08	55	e ^{-0,4}	56	$\sqrt[3]{66}$
57	Ln 2,08	58	Ln 1,125	59	Ln 5,625	60	Ln 2,25
61	Ln 5,25	62	$\sqrt[3]{36}$	63	$\sqrt[8]{272}$	64	$\sqrt[5]{270}$
65	Sin 12°	66	Ln 1,325	67	$\sqrt[4]{89}$	68	cos 0,32
69	Sin 0,3	70	e ^{-0,325}	71	e ^{-0,2}	72	$\sqrt[6]{62}$
73	Cos 20°	74	e ^{-2/7}	75	Cos 0,3	76	sin 0,32
77	$1/\sqrt[5]{e}$	78	Cos 12°	79	Cos 0,23	80	e ^{-2/9}
81	e ^{-0,25}	82	Sin 6°	83	Sin 0,31	84	$\sqrt[5]{30}$
85	$\sqrt[5]{40}$	86	e ^{-1/7}	87	Ln 3,324	88	$\sqrt[4]{72}$
89	Sin 20°	90	Cos 5°	91	e ^{-1/8}	92	ln 2,75
93	Ln 5,125	94	Sin 5°	95	e ^{-1/9}	96	sin 0,125
97	Cos 6°	98	Ln 1,625	99	Sin 0,23	100	cos 0,125

1.2.5. Задание 5

Вычислить определенный интеграл $\int_0^b f(x) dx$ с точностью до 0,001.

Таблица 1.5

Индивидуальные задачи к заданию 5

N вар	f(x)	b	N вар	f(x)	b
1	2	3	4	5	6
1	cos x ³	1	2	$\sqrt[4]{1+x^3}$	0,5
3	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	0,5	4	$\frac{\ln(1+x/2)}{x}$	1
5	$\frac{\sin x}{x} - 1$	0,5	6	$\frac{e^{2x^2} - 1}{x}$	0,1

Продолжение табл.1.5

N вар	f(x)	b	N вар	f(x)	b
7	$\frac{\sin 2x}{2} - x$	0,5	8	$\frac{\ln(1+3x)}{x}$	0,1
9	$\frac{\ln(1+x^2)}{x}$	0,8	10	$\sin \sqrt{\frac{x}{2}}$	0,5
11	e^{-2x^2}	0,2	12	$\frac{1}{\sqrt[3]{8+x^3}}$	1
13	$\frac{\operatorname{sh} x}{x} - \operatorname{ch} x$	1	14	$\frac{1}{x} \cdot \operatorname{arctg} x$	0,5
15	$\cos \sqrt{x}$	1	16	$x \ln(1+x^3)$	0,4
17	$\cos(10x^2)$	0,1	18	$\frac{e^{x^2} - 1}{x}$	1
19	e^{-7x^2}	0,5	20	$\operatorname{arctg} \sqrt{x}$	0,36
21	$\arcsin \frac{x}{2}$	0,1	22	$\frac{\sin \sqrt{x}}{x}$	1
23	$\frac{1}{1+x^3}$	0,2	24	$\frac{\ln(1+x/3)}{x}$	1
25	$\sin \frac{x}{3}$	1	26	$e^{-\frac{3x^2}{5}}$	1
27	$\frac{e^{4x} - 1}{4x}$	1	28	$\frac{\cos x^2}{\sqrt[3]{x}} + 1$	1
29	$\frac{\cos(x/2) - 1}{x^2}$	0,1	30	$\sqrt[5]{32+x^5}$	1
31	$\frac{\ln(1+5x)}{x}$	0,1	32	$\frac{\ln(1+x/2)}{\sqrt{x}}$	1
33	$\frac{\ln(1+x/4)}{x}$	1	34	$\frac{\sin 3x}{x} - x^3$	1
35	$\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}$	0,5	36	$\frac{\operatorname{sh} x}{x} - 1$	1
37	$\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}}$	1	38	$x \cdot \sin x^2$	1
39	$\frac{\cos x}{\sqrt[5]{x^2}}$	1	40	$\frac{\operatorname{ch} \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}$	1
41	$\sin 4x^2$	0,5	42	$x^3 \cdot \sin x$	1

Продолжение табл.1.5

№ вар	f(x)	b	№ вар	f(x)	b
43	$\frac{1}{\sqrt{4+x^2}}$	1	44	$\frac{1-e^{3x^2}}{x}$	0,5
45	$\frac{\arcsin x}{x}$	0,1	46	$\frac{\ln 3 - \ln(3+5x)}{x}$	0,2
47	$\frac{x^2}{e^2}$	1	48	$\cos \frac{x^3}{3}$	1
49	$x \cdot \cos \sqrt{x}$	0,25	50	$\cos x^2$	1
51	$\frac{\ln(2+4x) - \ln 2}{x}$	0,2	52	$\frac{1}{\sqrt[5]{32+x^5}}$	1
53	$\frac{1}{(1+x^2)^{0,2}}$	0,5	54	$\sin 9x^2$	$\frac{1}{3}$
55	e^{-5x^2+1}	0,2	56	$\frac{1-e^{2x^2}}{x}$	0,2
57	$\frac{\ln(1-x/2)}{x}$	0,5	58	$\frac{1}{\sqrt[5]{32x^5+1}}$	0,2
59	$\operatorname{sh} \sqrt{\frac{x}{2}}$	0,5	60	$\frac{\sin 16x^2}{\sqrt{x}}$	0,25
61	$\cos 9x^2$	$\frac{1}{3}$	62	$\frac{\ln(1-x/5)}{x}$	1
63	$\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}$	0,25	64	$\frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x}}$	1
65	e^{-2x^2+3}	0,5	66	$\frac{\sin 9x^2}{x}$	$\frac{1}{3}$
67	$\frac{1}{\sqrt[3]{1+4x^2}}$	0,25	68	$e^{\frac{x^2}{2}+5}$	1
69	$\frac{\ln(1-2x)}{x}$	0,2	70	$\frac{\cos 9x^2}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{3}$
71	$\sin x^2$	1	72	$\frac{\arcsin x}{x\sqrt{x}}$	0,5
73	$\frac{\arcsin \sqrt{x}}{x}$	0,5	74	$\frac{1}{\sqrt[4]{1+16x^2}}$	0,25

Продолжение табл.1.5

N вар	f(x)	b	N вар	f(x)	b
75	$\cos 16x^2$	0,25	76	$\frac{\ln(1+x/5)}{x}$	1
77	$\frac{e^{2x}-1}{x}$	0,5	78	$\frac{\sin 25x^2}{\sqrt{x}}$	0,2
79	$\frac{\ln(1-5x)}{x}$	0,1	80	$\sqrt[4]{1+16x^2}$	0,25
81	$\sin 16x^2$	0,25	82	$\frac{1-e^{x^2/2}}{x^2}$	0,5
83	$\frac{1}{1+32x^5}$	0,2	84	$\frac{\ln(1-x/2)}{\sqrt{x}}$	1
85	$\operatorname{ch} \frac{x^2}{2}$	1	86	$\frac{\cos 25x^2}{\sqrt{x}}$	0,2
87	$\sqrt{x} \cdot \cos 16x^2$	0,25	88	$\frac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2}$	1
89	$\frac{1}{\sqrt[5]{1+81x^4}}$	$\frac{1}{3}$	90	$\frac{1}{1+81x^4}$	$\frac{1}{6}$
91	$(3-e^{\sqrt{x}})\sqrt{x}$	1	92	$\frac{1-4e^{2x}}{\sqrt{x}}$	1
93	$\cos 4x^2$	0,5	94	$\frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{x^2}$	1
95	$\frac{\ln(1-x/3)}{\sqrt{x}}$	1	96	$\sqrt[3]{x^2} \cdot \cos x$	1
97	$\frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$	1	98	$\frac{\ln(1+2x)}{x\sqrt{x}}$	0,1
99	$\frac{\cos 4x^2}{2\sqrt[5]{x}}$	0,5	100	$\frac{1-2e^{3x}}{\sqrt{x}}$	1

1.2.6. Задание 6

Найти решение задачи Коши.

Таблица 1.6

Индивидуальные задачи к заданию 6

N вар	F(x, y, y', y'') = 0	Нач. усл.	N вар	F(x, y, y', y'') = 0	Нач. усл.
1	$y' = xy + x^2 + y^2$	$y(0) = 1$	2	$y' = x^2 + 0,2y^2$	$y(0) = 0,1$
3	$y' = e^{3x} + 2xy^2$	$y(0) = 1$	4	$y' = x^2 - xy + 2y$	$y(0) = 1$
5	$y' = x + e^y$	$y(0) = 0$	6	$y' = 2x + xy - y^2$	$y(0) = 1$
7	$y' = x^2 + y^2$	$y(0) = 0,2$	8	$y' = xy + x^2$	$y(0) = 1$
9	$y' = x^2 - xy + y^2$	$y(0) = 0,5$	10	$y' = -x^3 - xy$	$y(0) = 3$
11	$y' = y \cos x + 2 \cos y$	$y(0) = 0$	12	$y' = y \cos x - \sin 2x$	$y(0) = 3$
13	$y' = e^{\sin x} + x$	$y(0) = 0$	14	$y' = 4xy - 4x^3$	$y(0) = -0,5$
15	$y' = 3x^2y + \frac{x^2(1+x^2)}{3}$	$y(1) = 0$	16	$y' = 0,2x - 0,1y^2$	$y(0) = 1$
17	$y' = (1+x)y^2 e^{-x} - xy$	$y(0) = 1$	18	$y' = x^2y^2 - y \cos x$	$y(0) = 1$
19	$y' = 4(x^3+1)y^2 e^{-x} - 4x^3y$	$y(0) = 1$	20	$y' = e^{\sin x} + xy$	$y(0) = 0$
21	$y' = xy^2 - y$	$y(0) = 1$	22	$y' = x^2 - xy$	$y(0) = 0,1$
23	$2(xy+y') = (x-1)e^xy^2$	$y(0) = 2$	24	$y'' + xy = 0$	$y(0) = 1$ $y'(0) = 0$
25	$y' = 4y^2 e^{4x} (1-x^3) - 4x^3y$	$y(0) = -1$	26	$y'' = x^2y + y$	$y(0) = 1$ $y'(0) = 0$
27	$y' = y + 2xy^2$	$y(0) = \frac{1}{2}$	28	$y'' = x + y^2$	$y(0) = 0$ $y'(0) = 1$
29	$y' = 2x^3y^3 - 2xy$	$y(0) = \sqrt{2}$	30	$y'' = x^2y - y'$	$y(0) = 1$ $y'(0) = 0$
31	$4y' = (x^3+8)e^{-2x}y^2 - x^2y$	$y(0) = 1$	32	$y' = e^y + xy$	$y(0) = 0$
33	$2y' = xy^2 - 2y$	$y(0) = 2$	34	$y' = 2x - y$	$y(0) = 2$
35	$y' + xy = (x-1)e^xy^2$	$y(0) = 1$	36	$y' = 2y^2 + ye^x$	$y(0) = \frac{1}{3}$
37	$y' = xy^2 + y$	$y(0) = 1$	38	$y' = y^2 + x^3$	$y(0) = \frac{1}{2}$
39	$y' = xy + x^2 + y^2$	$y(0) = \frac{1}{2}$	40	$xy'' + y = 0$	$y(1) = 0$ $y'(1) = 1$
41	$y' = xy + y^2$	$y(0) = 0,1$	42	$y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$	$y(1) = 1$ $y'(1) = 0$

Продолжение табл.1.6

N вар	F(x, y, y', y'') = 0	Нач. усл.	N вар	F(x, y, y', y'') = 0	Нач. усл.
43	$y' = 2x - xy - 0,1y^2$	$y(0) = 1$	44	$y' = \arcsin y + x$	$y(0) = \frac{1}{2}$
45	$y' = x + y + y^2$	$y(0) = 0,1$	46	$y' = xy + \ln(x+y)$	$y(1) = 0$
47	$y' = x^2 \sin x + y$	$y(0) = 1$	48	$y' = x + y^{-1}$	$y(0) = 1$
49	$y' = x^2 + \sin x + y^2$	$y(0) = 0,1$	50	$y' = 2x + \cos y$	$y(0) = 0$
51	$y' = \cos y + 2x \cos x$	$y(0) = 0$	52	$y' = \frac{1-x^2}{y} + 1$	$y(0) = 1$
53	$y' = y \sin x - 3 \sin y$	$y(0) = \frac{\pi}{2}$	54	$y' + y \cos x - 3e^x y^2 - \sin x = 0$	$y(0) = 1$
55	$y' = e^{2x} - 2x^2 y$	$y(0) = 1$	56	$2y' - (x+y)y - e^x = 0$	$y(0) = 2$
57	$y' = 2x^2 + ye^x$	$y(0) = \frac{1}{2}$	58	$y' - 4y + 2xy^2 - e^{3x} = 0$	$y(0) = 2$
59	$y' - 4y + 2xy^2 - e^{3x} = 0$	$y(0) = 2$	60	$(1+x^2)y'' + 5xy' + 3y = 0$	$y(0) = 0$ $y'(0) = 1$
61	$y'' = y \cos y' + x$	$y(0) = 1$ $y'(0) = \frac{\pi}{3}$	62	$(1+x^2)y'' + y = 0$	$y(1) = 1$ $y'(1) = 1$
63	$y'' = x^2 + y^2$	$y(-1) = 2$ $y'(-1) = \frac{1}{2}$	64	$(x^2 - x + 1)y'' + (4x - 2)y' = -2$	$y(0) = 2$ $y'(0) = 1$
65	$y'' = (y')^2 + xy$	$y(0) = 4$ $y'(0) = -2$	66	$(1-x)y'' - y' + e^x \cdot (x+1) = 0$	$y(0) = 0$ $y'(0) = 1$
67	$y'' = \frac{y'}{y} - \frac{1}{x}$	$y(1) = 1$ $y'(1) = 0$	68	$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$	$y\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ $y'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$
69	$y'' = xy y'$	$y(0) = 1$ $y'(0) = 1$	70	$y''' = y$	$y(0) = 1$ $y'(0) = 0$ $y''(0) = 0$
71	$y''' = ye^x - x(y')^2$	$y(0) = 1$ $y'(0) = 1$ $y''(0) = 1$	72	$y''' = xy' + y$	$y(1) = 1$ $y'(1) = 0$ $y''(1) = 1$
73	$y''' = y'' + (y')^2 + y^3 + x$	$y(0) = 1$ $y'(0) = 2$ $y''(0) = 0,5$	74	$y''' - x^2 y'' - xy' - y = 0$	$y(0) = 1$ $y'(0) = 1$ $y''(0) = 0$

Продолжение табл.1.6.

N вар	F(x, y, y', y'') = 0	Нач. усл.	N вар	F(x, y, y', y'') = 0	Нач. усл.
75	$y'' = y$	$y(0) = 0$ $y'(0) = 1$	76	$y' = \operatorname{arctg} y + x$	$y(0) = 1$
77	$y'' + 2xy = 0$	$y(1) = 1$ $y'(1) = 0$	78	$y' = e^{\cos x} + y$	$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
79	$y'' - xy' - 2y = 0$	$y(1) = 0$ $y'(1) = 1$	80	$y' = \sin y + 2\cos x$	$y(0) = 0$
81	$y'' - x^2y = 0$	$y(1) = 0$ $y'(1) = 1$	82	$y' = x + y + \ln(x + 2y)$	$y(1) = 0$
83	$y'' + xy' + y = 0$	$y(0) = 1$ $y'(0) = -1$	84	$y' = 2x + \frac{3}{y}$	$y(0) = 1$
85	$(1-x^2)y'' - 4xy' - 2y = 0$	$y(0) = 1$ $y'(0) = 1$	86	$y' = x - \arccos y$	$y(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
87	$(1-x)y'' + xy' - y = 0$	$y(-1) = 0$ $y'(-1) = 1$	88	$y' = e^y + \cos x$	$y(0) = 0$
89	$y'' + xy' = x$	$y(1) = 1$ $y'(1) = 0$	90	$y' + \ln(x+y) + x = 0$	$y(0) = 1$
91	$y' + (y + \operatorname{tg} x)\cos x = 0$	$y(0) = 1$	92	$xy' + x^2y = \ln x$	$y(1) = 0$
93	$y'' + xy' + \operatorname{arctg} x = y$	$y(0) = 1$ $y'(0) = 1$	94	$y'' + x^2y' - e^x = 0$	$y(0) = 1$ $y'(0) = 0$
95	$e^x y' + yx^2 = e^x$	$y(0) = 1$	96	$(1+x)y' + xe^y = 1$	$y(0) = 0$
97	$y'' + \operatorname{arctg} x = y'$	$y(0) = 0$ $y'(0) = 1$	98	$y' = x^2y + y^3$	$y(1) = 1$
99	$xy'' + y' + y = e^x$	$y(1) = 0$ $y'(1) = e$	100	$(1-x)y'' + 4xy' + y^2 = 0$	$y(0) = 1$ $y'(0) = 2$

2. Примеры выполнения заданий

2.1. Пример 1

Вычислить значение функции $y = \ln x$ в точке $x_0 = 5,5$ с точностью до 0,001.

Известно разложение

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots, \quad x \in (-1, 1).$$

Точка x_0 интервалу сходимости разложения не принадлежит. Поэтому преобразуем выражение $\ln 5,5$, используя свойства логарифма, так, чтобы x_0 принадлежала интервалу сходимости разложения.

$$\ln 5,5 = -\ln \frac{1}{5,5} = -\ln \frac{10}{55} = -\ln \left(1 - \frac{45}{55}\right) = -\ln \left(1 - \frac{9}{11}\right).$$

Точка $-\frac{9}{11}$ принадлежит интервалу $(-1, 1)$, но близка к точке -1 , поэтому сходимость ряда будет очень медленной, т.е. понадобится очень много слагаемых для достижения заданной точности. Представим 5,5 как $1,1 \cdot 5$, и постараемся разложить $1/5$ на два или больше сомножителей так, чтобы сходимость соответствующих рядов была как можно более быстрая. (Сходимость тем быстрее, чем ближе x_0 к нулю).

$$\begin{aligned} \ln 5,5 &= \ln(5 \cdot 1,1) = \ln 5 + \ln 1,1 = \ln 1,1 - \ln \frac{1}{5} = \ln 1,1 - \ln \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \\ &= \ln 1,1 - \ln \frac{1}{2} - \ln \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \ln 1,1 - \ln \frac{1}{2} - \ln \frac{2}{3} - \ln \frac{3}{5} = \\ &= \ln(1+0,1) - \ln \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \ln \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \ln \left(1 - \frac{2}{5}\right). \end{aligned}$$

Разложим каждое слагаемое в ряд

$$\ln(1+0,1) = 0,1 - \frac{(0,1)^2}{2} + \frac{(0,1)^3}{3} - \frac{(0,1)^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{(0,1)^n}{n} + \dots, \quad (2.1)$$

$$\ln \left(1 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{4} - \dots - \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{n} - \dots, \quad (2.2)$$

$$\ln\left(1 - \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \frac{1}{4} - \dots - \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{n} - \dots, \quad (2.3)$$

$$\ln\left(1 - \frac{2}{5}\right) = -\frac{2}{5} - \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} - \left(\frac{2}{5}\right)^4 \cdot \frac{1}{4} - \dots - \left(\frac{2}{5}\right)^n \cdot \frac{1}{n} - \dots. \quad (2.4)$$

Определим, сколько слагаемых надо взять в каждом разложении, чтобы достигнуть заданной точности.

Ряд (2.1) – знакочередующийся ряд лейбницевского типа, поэтому воспользуемся оценкой Лейбница для остатка ряда: $|R_n| \leq a_{n+1}$. Первый отброшенный член не должен превосходить 0,001

$$n = 3 \quad a_3 = \frac{10^{-3}}{3} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-3} \approx 0,3 \cdot 10^{-3} = 3 \cdot 10^{-4} < 0,001.$$

Значит, нам достаточно взять первые два слагаемых.

$$\ln 1,1 \approx 0,1 - 0,5 \cdot 10^{-2} = 0,1 - 0,005 = 0,095.$$

Ряды (2.2) – (2.4) являются знакоотрицательными рядами, поэтому оценкой Лейбница воспользоваться нельзя. Оценим $\ln(1 + x)$ сверху геометрической прогрессией

Тогда

$$R_n = (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n+1} + (-1)^{n+2} \frac{x^{n+2}}{n+2} + \dots \leq |x|^{n+1} + |x|^{n+2} + \dots = \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|},$$

$$R_n \leq \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}. \quad (2.5)$$

Воспользуемся оценкой (2.5) для рядов (2.2) – (2.4).

Для ряда (2.2)

$$R_n \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^n < 0,001.$$

Это верно для $n = 10$. Следовательно, надо в разложении взять 10 слагаемых для достижения заданной точности 0,001.

$$\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) \approx -\frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{24} - \dots - \frac{1}{10240} \approx -0,693.$$

$$\text{Для ряда (2.3) } R_n \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{2} < 0,001.$$

Неравенство верно для $n = 6$. Значит, надо взять лишь 6 слагаемых разложения

$$\ln\left(1 - \frac{1}{3}\right) \approx -\frac{1}{3} - \frac{1}{18} - \frac{1}{81} - \frac{1}{324} - \frac{1}{243 \cdot 5} - \frac{1}{729 \cdot 6} \approx -0,4054.$$

Для ряда (2.4)

$$R_n \leq \frac{1}{1 - \frac{2}{5}} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} = \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} = \frac{2^{n+1}}{3 \cdot 5^n}, \quad \frac{2^{n+1}}{3 \cdot 5^n} < 0,001.$$

Это верно для $n = 8$. Следовательно,

$$\ln\left(1 - \frac{2}{5}\right) \approx -\frac{2}{5} - \frac{2}{25} - \frac{8}{3 \cdot 125} - \frac{16}{4 \cdot 625} - \frac{32}{5^6} - \frac{64}{5^6 \cdot 6} - \frac{128}{5^7 \cdot 7} - \frac{256}{5^8 \cdot 8} \approx -0,511$$

Итак,

$$\ln 5,5 = \ln 1,1 - \ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{3}\right) - \ln\left(1 - \frac{2}{5}\right) \approx 1,704.$$

Таким образом,

$$1,703 < \ln 5,5 < 1,705.$$

2.2. Пример 2

Вычислить значение определенного интеграла $J = \int_0^{0,5} \frac{\ln(1-x)}{x} dx$

с точностью до 0,001.

Интеграл J является несобственным. Так как $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{x} = -1$,

то положим $f(0) = -1$.

Разложим подынтегральную функцию в ряд и почленно проинтегрируем

$$\begin{aligned}
\int_0^{0,5} \frac{\ln(1-x)}{x} dx &= \int_0^{0,5} \frac{-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots}{x} dx = \\
&= - \int_0^{0,5} \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \dots + \frac{x^{n-1}}{n} + \dots \right) dx = - \left(x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \dots + \frac{x^n}{n^2} + \dots \right) \Bigg|_0^{0,5} = \\
&= - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 \cdot 4} + \frac{1}{2^3 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{2^n \cdot n^2} + \dots \right).
\end{aligned}$$

Определим, сколько слагаемых надо взять, чтобы погрешность вычислений не превышала 0,001. Для этого применим метод мажорирования.

$$\begin{aligned}
R_n &= \frac{1}{2^{n+1}(n+1)^2} + \frac{1}{2^{n+2}(n+2)^2} + \frac{1}{2^{n+3}(n+3)^2} + \dots = \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{2(n+2)^2} + \frac{1}{4(n+3)^2} + \frac{1}{8(n+4)^2} + \dots \right) \leq \\
&\leq \frac{1}{2^{n+1}} \left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{2(n+1)^2} + \frac{1}{4(n+1)^3} + \dots \right) = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right) = \\
&= \frac{1}{2^{n+1}(n+1)^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{2^{n+1}(n+1)^2} = \frac{1}{2^n(n+1)^2},
\end{aligned}$$

$$R_n \leq \frac{1}{2^n(n+1)^2} < 0,001.$$

Для $n = 5$ $\frac{1}{32 \cdot 36} = \frac{1}{1152} < 0,001$. Поэтому берем 5 слагаемых в

разложении

$$\begin{aligned}
\int_0^{0,5} \frac{\ln(1-x)}{x} dx &\approx - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{72} + \frac{1}{256} + \frac{1}{800} \right) = -0,5807. \\
-0,5817 &< J < -0,5797.
\end{aligned}$$

2.3. Пример 3

Вычислить значение определенного интеграла $y = \int_0^1 \frac{e^{2x} - 1}{x} dx$

с точностью до 0,001.

Интеграл y является несобственным. Так как $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = 2$, то положим $F(0) = 2$.

Обозначим $f(x) = e^{2x} - 1$. Разложим $f(x)$ в степенной ряд

$$f(x) = e^{2x} - 1 = 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \dots + \frac{(2x)^n}{n!} + R_n(x),$$

где $R_n(x)$ - n -ый остаток, допускающий оценку Лагранжа.

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x|^{n+1}, \quad \text{где} \quad M = \max_{x \in [0,1]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Так как $f^{(n+1)}(x) = e^{2x} \cdot 2^{n+1}$ и экспонента достигает максимального значения на правом конце отрезка, то $M = e^2 \cdot 2^{n+1}$. Следовательно,

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^2 \cdot 2^{n+1}}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq \frac{9 \cdot 2^{n+1}}{(n+1)!} |x|^{n+1}.$$

Значит,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{f(x)}{x} dx &= \int_0^1 \frac{e^{2x}}{x} dx = \int_0^1 \left(2 + \frac{2^2}{2!} x + \frac{2^3}{3!} x^2 + \dots + \frac{2^n}{n!} x^{n-1} + \frac{R_n(x)}{x} \right) dx = \\ &= \left(2x + \frac{2^2}{2! \cdot 2} x^2 + \frac{2^3}{3! \cdot 3} x^3 + \frac{2^4}{4! \cdot 4} x^4 + \dots + \frac{2^n}{n! \cdot n} x^n \right) \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{R_n(x)}{x} dx = \\ &= 2 + \frac{2^2}{2! \cdot 2} + \dots + \frac{2^n}{n! \cdot n} + R_n, \end{aligned}$$

где $R_n = \int_0^1 \frac{R_n(x)}{x} dx.$

Оценим R_n сверху:

$$|R_n| \leq \int_0^1 \left| \frac{R_n(x)}{x} \right| dx \leq \int_0^1 \frac{9 \cdot 2^{n+1}}{(n+1)!} |x|^n dx = \frac{9 \cdot 2^{n+1} \cdot |x|^{n+1}}{(n+1)!(n+1)} \Big|_0^1 = \frac{9 \cdot 2^{n+1}}{(n+1)!(n+1)}.$$

Теперь подберем n так, чтобы

$$\frac{9 \cdot 2^{n+1}}{(n+1)!(n+1)} < 0,001.$$

Для этого n будем иметь $|R_n| < 0,001$ и требуемая точность

$$n = 8 \quad \frac{9 \cdot 2^9}{9! \cdot 9} = \frac{4}{2835} > 0,001;$$

$$n = 9 \quad \frac{9 \cdot 2^{10}}{10! \cdot 10} = \frac{4}{15750} < 0,001.$$

$$\int_0^1 \frac{e^{2x} - 1}{x} dx \approx 2 + \frac{2^2}{2! \cdot 2} + \frac{2^3}{3! \cdot 3} + \frac{2^4}{4! \cdot 4} + \frac{2^5}{5! \cdot 5} + \frac{2^6}{6! \cdot 6} + \frac{2^7}{7! \cdot 7} + \frac{2^8}{8! \cdot 8} + \frac{2^9}{9! \cdot 9} \approx 3,7165,$$

$$3,7155 < J < 3,7175.$$

Необходимо взять в сумме 9 слагаемых, и необходимая точность будет достигнута.

3. Контрольные вопросы

1. Что называется функциональным рядом?
2. Область сходимости функционального ряда.
3. Ряд Тейлора для функции $f(x)$ по степеням $x - a$.
4. Что называется степенным рядом?
5. Область сходимости степенного ряда. Теорема Абеля.
6. Оценка остатка функционального ряда.
7. Применение степенных рядов к приближенным вычислениям.
8. Теорема о непрерывности суммы функционального ряда.
9. Теорема о почленном интегрировании и почленном дифференцировании функционального ряда.
10. Равномерная сходимость степенного ряда. Теорема Вейерштрасса.

11. Разложение в ряд основных функций: e^x , $\cos x$, $\sin x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^m$.
12. Условия разложимости функций в ряд Тейлора.

Библиографический список

1. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления [Текст] : учебное пособие / Н. С. Пискунов. - изд., стер. - М. : Интеграл-Пресс, 2007. - Т. 1. - 416 с.
2. Кудрявцев, Л.Д. Курс математического анализа. Т.2 [Текст]: учебник / Л.Д.Кудрявцев. – М.: Дрофа, 2004. – 720 с.
3. Сборник задач по математике для втузов [Текст] : учебное пособие / под ред. А. В. Ефимова и А. С. Поспелова. – М. : Физматлит, 2009. - Ч. 3. - 544с.
4. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. [Текст] / М.Я.Выгодский.– М.: АСТ: Астрель, 2006. – 991 с.
5. Шмелев П.А. Теория рядов в задачах и упражнениях. [Текст]: учебное пособие для втузов / П.А.Шмелев. – М.: Высш. шк., 1983. – 176 с.