МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра информационной безопасности

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_____________ О.Г. Локтионова
«_11_» _ноября_ 2017 г.

Численные методы решения нелинейных уравнений:
методические указания к практическим занятиям по дисциплинам
«Вычислительные методы», «Численные методы»

Курск 2017

УДК 510.6
Составители: В.П. Добрица, В.А. Милых, Ю.А. Халин

Рецензент
Кандидат физико-математических наук, доцент В.И. Дмитриев

Численные методы нелинейных уравнений: методические указания к практическим занятиям по дисциплинам «Вычислительные методы», «Численные методы» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост. В.П. Добрица, В.А. Милых, Ю.А. Халин. Курск, 2017. – 16 с. Библиогр.: с. 16.

Приводится описание основных методов решения нелинейных уравнений.

Методические рекомендации предназначены для студентов, обучающихся по направлениям, укрупнённых групп специальностей 02.00.00, 09.00.00, 10.00.00

Текст печатается в авторской редакции.

Подписано в печать 17.11.17. Формат 60x84 1/16.
Усл.печ. л. 1,56 п.л . Уч.-изд. л. 1,22 . Тираж 100 экз. Заказ. 1930
Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Содержание

1.1. Численное решение нелинейных уравнений: концепция методов

Многие задачи исследования различных объектов с помощью математических моделей, применения их для прогноза или расчета приводят к необходимости решения нелинейных уравнений.

Как правило, процесс решения нелинейного уравнения общего вида $f(x)=0$ осуществляется в два этапа. На первом этапе отделяют корни, то есть находят такие отрезки, внутри которых находится строго один корень. На втором этапе уточняют корень, то есть находят его значение x^* с предварительно заданной точностью ε. В практических задачах решением называют любое значение *x,* отличающееся по модулю от точного значения x^* не более чем на величину ε.

Идеи аналитических методов первого этапа базируются на очевидном свойстве непрерывных функций: корни функции (точки пересечения *f(x)* с горизонтальной осью) обязательно лежат между соседними экстремумами функции (хотя обратное неверно: между каждой парой экстремумов необязательно находится корень).

Идеи методов второго этапа можно сгруппировать по трем основным направлениям:

1) поиск корня с заданной погрешностью сводится к перебору всех возможных значений аргумента с проверкой наличия решения;

2) поиск корня нелинейной функции заменяется поиском корня той или иной более простой функции (линейной, параболической), близкой к исходной нелинейной; как правило, процесс поиска осуществляется итерационными процедурами (однотипными, последовательно повторяющимися);

3) нелинейное уравнение вида $f(x)=0$ сводят к одной из форм вида $g(x)=\varphi(x)$ и стремятся обеспечить равенство левой и правой частей тоже, как правило, с помощью итерационных процедур.

Условием окончания процесса решения уравнения (то есть получения корня x^* с заданной погрешностью) может быть одно из двух возможных:

1) $f(x^*)\le\delta,$

2) $|x^* - x^k| \leq \varepsilon$,

где δ, ε – предварительно заданные малые величины, k – номер итерации, то есть или близость к нулю левой части уравнения, или близость друг к другу двух значений x, между которыми находится решение.

Второе условие во многих случаях можно использовать, не зная точного значения корня, путем замены его другим, например $|x^{k+1} - x^k| \leq \varepsilon'$, при выполнении которого данное условие будет гарантированно выполняться.

Условие окончания поиска выбирается исходя из неформальных соображений, и в некоторых случаях применение разных условий может привести к существенно разным результатам. При решении конкретных задач в математическом моделировании важными являются две цели решения:

1) обеспечение близости к нулю $f(x)$ ($f(x) = 0$) как меры выполнения тех или иных балансовых соотношений, тогда не очень важно, при каких именно (в пределах здравого смысла конкретной прикладной задачи) значениях x это равенство справедливо с заданной погрешностью;

2) обеспечение точности нахождения решения x^*, имеющего содержательное значение, при этом $f(x) = 0$ является лишь индикатором правильности решения. Отсюда и выбирают условие окончания поиска решения.

Знание особенностей левой части нелинейного уравнения позволяет в ряде случаев, не производя отделения корней, определить число корней (причем отдельно действительных и комплексных), что невозможно в общем случае, а также предельные оценки корней, интервалы существования корней. Это прежде всего касается алгебраических уравнений с действительными коэффициентами (далее для простоты – алгебраических), часто встречающихся в практике. Такие уравнения имеют вид $f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n = 0$. Кроме того, с учетом конкретного вида уравнения можно построить более эффективные алгоритмы.

Рассмотрим подробнее этапы решения нелинейных уравнений.

1.2. Отделение корней нелинейного уравнения

Отделение корней может производиться графически, путем построения графика функции $f(x)$, или аналитически. Для аналитического отделения корней находят все критические точки функции $f(x)$, то есть точки, в которых производные равны нулю или не существуют. Это можно сделать численными методами или (в несложных случаях) аналитически. Для этого $f(x)$ дифференцируют, приравнивают производную к нулю и решают полученное уравнение относительно *x*. Кроме того, определяют все точки, где по тем или иным причинам (например, знаменатель обращается в нуль, под логарифмом появляется нуль и т. п.) производная может не существовать. В этих (критических) точках или в непосредственной близости от них определяют знак функции $f(x_i)$, то есть находят $\operatorname{sign} f(x_i)$. Затем строят ряд знаков функции в критических точках, включая в рассмотрение и крайние точки числовой оси $-\infty$ и $+\infty$. Анализируют этот ряд и по числу смен знаков определяют количество корней (равно числу смен знаков $\operatorname{sign} f(x_i)$) и интервалы, где локализованы эти корни: на левой и на правой границах такого интервала функция $f(x)$ должна иметь разные знаки.

В случае необходимости можно дополнительно к критическим точкам использовать и произвольные точки, что позволяет сузить интервал локализации корня. Особенно это надо делать, когда одна из границ интервала находится в бесконечности, так как интервал хотя бы с одной границей в бесконечности не позволит уточнить корни.

Пример 1.1. Дано уравнение: $5^x - 6x - 3 = 0$. Обозначим $f(x) = 5^x - 6x - 3$. Находим производную $f'(x) = 5^x \ln 5 - 6$.

$$5^x \ln 5 - 6 = 0; \quad 5^x = \frac{6}{\ln 5}; \quad x \lg 5 = \lg 6 - \lg(\ln 5);$$

$$x = \frac{\lg 6 - \lg(\ln 5)}{\lg 5} = \frac{0{,}7782 - 0{,}2065}{0{,}6990} = \frac{0{,}5717}{0{,}6990} \approx 0{,}82.$$

Составим таблицу знаков функции $f(x)$, полагая *x* равным: а) критическим значениям функции (корням производной) или близким к ним; б) граничным значениям (исходя из области допустимых значений неизвестного):

x	$-\infty$	1	$+\infty$
sign *f(x)*	+	–	+

Так как происходят две перемены знака функции, то уравнение имеет два действительных корня. Чтобы завершить операцию отделения корней, можно попытаться уменьшить промежутки, содержащие корни, так, чтобы их длина была бы меньше. Для этого возьмем несколько значений x и внесем их дополнительно в таблицу:

x	$-\infty$	–1	0	1	2	$+\infty$
sign *f(x)*	+	+	–	–	+	+

Отсюда видно, что корни заключены в следующих промежутках: $x_1 \in [-1; 0]$; $x_2 \in [1; 2]$.

Пример 1.2. Дано уравнение: $x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3 = 0$.

Обозначим $f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3$, тогда имеем $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 4x + 3$. Найдем корни производной:

$$4x^3 - 3x^2 - 4x + 3 = 0; \quad 4x(x^2 - 1) - 3(x^2 - 1) = 0; \quad (x^2 - 1)(4x - 3) = 0;$$

$$x_1 = -1; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = 3/4.$$

Составим таблицу знаков функции $f(x)$:

x	$-\infty$	–1	3/4	1	$+\infty$
sign *f(x)*	+	–	–	–	+

Из таблицы видно, что уравнение имеет два действительных корня: $x_1 \in (-\infty; -1]$; $x_2 \in [1; +\infty)$.

Уменьшим промежутки, в которых находятся корни:

x	$-\infty$	–2	–1	3/4	1	2	$+\infty$
sign *f(x)*	+	+	–	–	–	+	+

Следовательно, $x_1 \in [-2; -1]$; $x_2 \in [1; 2]$.

Другим методом отделения корней является метод деления отрезка пополам. Существо метода можно пояснить рисунке 2.1

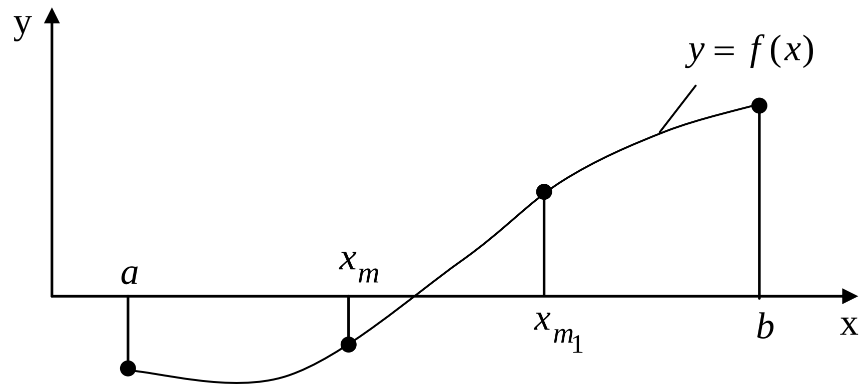


Рис. 1.1. Отделение корня методом половинного деления

Пусть функция имеет на отрезке $[a,b]$ единственный корень. Разделим отрезок $[a,b]$ пополам точкой $x_m = (a+b)/2$. Если $f(x_m) \neq 0$, то исследуем два подынтервала $[a, x_m]$ и $[x_m, b]$.

Если $sign\, f(a) = sign\, f(x_m)$, а $sign\, f(x_m) \neq sign\, f(b)$, то корень находится на отрезке $[x_m; b]$. А если $sign\, f(a) \neq sign\, f(x_m)$, а $sign\, f(x_m) = sign\, f(b)$, то корень находится на отрезке $[a; x_m]$. В нашем случае (см. рис.2.1) корень находится на отрезке $[x_m; b]$.

Продолжим процесс деления интервала поиска пополам. Для этого разделим отрезок $[x_m; b]$ пополам точкой $x_{m_1} = (x_m + b)/2$. Опять исследуем два подынтервала $[x_m; x_{m_1}]$ и $[x_{m_1}; b]$. Если $sign\, f(x_m) \neq sign\, f(x_{m_1})$, а $sign\, f(x_{m_1}) = sign\, f(b)$, то корень находится на отрезке $[x_m; x_{m_1}]$. Продолжая эти действия, можно сузить интервал поиска до сколь-угодно малого отрезка, содержащего корень уравнения, то есть одновременно можно отделить корень и найти значение корня с заданной погрешностью ε.

Пример 1.3. Для уравнения $f(x) = \sqrt{x+1} - \frac{1}{x}$, $x > 0$, необходимо отделить корни на отрезке [0,5; 2] методом половинного деления и найти его значение с

точностью $\varepsilon = 0{,}01$.

Решение. Находим середину интервала $x_m = (0{,}5 + 2)/2 = 1{,}25$; знаки функции на границах отрезков [0,5; 1,25] и [1,25; 2,0]:

$$f(0{,}5) = \sqrt{0{,}5+1} - \frac{1}{0{,}5} = -0{,}775, \quad sign\ f(0{,}5) < 0;$$

$$f(1{,}25) = \sqrt{1{,}25+1} - \frac{1}{1{,}25} = 0{,}7, \quad sign\ f(1{,}25) > 0;$$

$$f(2{,}0) = \sqrt{2+1} - \frac{1}{2} = 1{,}232, \qquad sign\ f(2{,}0) > 0.$$

Первая итерация. Перемена знака происходит на отрезке [0.5; 1,25], поэтому исключаем отрезок [1,25; 2,0] и вновь делим отрезок [0,5;1,25] пополам $x_{m_1} = (0{,}5 + 1{,}25)/2 = 0{,}875$. Находим знаки функции на границах отрезков [0,5; 0,875] и [0,875; 1,25]:

$$sign\ f(0{,}5) < 0, \qquad \sqrt{0{,}875+1} - \frac{1}{0{,}875} = 0{,}226; \qquad sign\ f(0{,}875) > 0;$$

$sign\ f(1{,}25) > 0.$

Вторая итерация. Перемена знака происходит на отрезке [0,5; 0,875], поэтому исключаем отрезок [0,875; 1,25] и находим середину [0,5; 0,875]: $x_{m_2} = (0{,}5 + 0{,}875)/2 = 0{,}6875$.

$$sign\ f(0{,}5) < 0,\ \sqrt{0{,}6875+1} - \frac{1}{0{,}6875} = -0{,}155;$$

$sign\ f(0{,}6875) < 0, sign\ f(0{,}875) > 0.$

На восьмой итерации получили следующие результаты: перемена знака происходит на отрезке [0,7519; 0,7577], середина этого отрезка $x_{m_8} = (0{,}7519 + 0{,}7577)/2 = 0{,}7548$; $L_8 = |0{,}7577 - 0{,}7519| = 0{,}006 < \varepsilon = 0{,}01$.

Вычисления прекращаем, в качестве корня функции принимаем $x^* = 0{,}7548$, для которого $f(x^*) = -0{,}0002$.

Таким образом, корнем функции $\sqrt{x+1} - \dfrac{1}{x} = 0$ на отрезке [0,5; 2,0]с точностью $\varepsilon = 0{,}01$ является $x^* = 0{,}7548$, для которого $f(x^*) = 0{,}00$.

1.3. Уточнение корней нелинейного уравнения

Рассмотрим методы уточнения корней и раскрывающие их основные идеи. Отметим очевидный момент: при прочих равных условиях тот метод уточнения корней будет более эффективен, в котором результат с той же погрешностью найден за меньшее число раз вычисления функции $f(x)$.

Метод сканирования предусматривает разделение всего интервала [*a, b*], где отделен корень, на маленькие отрезки, равные заданной погрешности, с последующим вычислением (или определением экспериментально) значений функции $f(x)$ на концах этих отрезков (то есть в точках, расстояние между которыми не превышает величины ε).

Анализируя значения функции, нетрудно выбрать отрезок, где функция меняет знак (или точно равна нулю, что маловероятно). В качестве решения можно взять любую точку: левую (x_i) или правую (x_{i+1}) границу выделенного отрезка, хотя предпочтительнее взять середину этого отрезка $x^* = (x_i + x_{i+1})/2$. В любом случае погрешность решения не будет превышать заданную погрешность ε, даже при условии, что мы не знаем точного значения решения.

Иногда весь отрезок разбивают на маленькие отрезки величиной 2ε, а затем искомое значение корня берут в середине отрезка, где функция меняет знак. Это непринципиальная разница с основным вариантом, результаты вариантов полностью совпадут и по значению корня, и по затратам на поиск, если в первом сразу взять погрешность вдвое больше необходимой.

Для повышения эффективности метода можно производить уточнение в несколько этапов: на первом этапе задать большое значение ε, найти отрезок,

где функция меняет знак (грубо найти корень), затем найденный отрезок еще раз разделить с более мелким шагом, более точно найти корень и еще несколько этапов (обычно 3...5), после чего удается найти корень с заданной погрешностью, в целом, за меньшее число раз вычисления $f(x)$. Метод очевиден и не требует практического пояснения.

Метод деления отрезка пополам можно рассматривать как развитие метода сканирования: величина отрезков, на которые делится весь интервал при многоэтапном применении метода сканирования, становится равной половине исходного отрезка [a, b]. В этом случае сначала исходный отрезок делится на две равные части (пополам) и путем сравнения знаков функции на концах каждой из двух половинок (например, по знаку произведения значений функций на концах) определяют ту половинку, в которой содержится решение (знаки функции на концах должны быть разные). Затем найденную половинку опять делят на две равные части, снова выбирают одну из двух половинок, содержащую корень, и т. д. Условием окончания служит заданная малость отрезка, где содержится корень, то есть аналогично методу сканирования.

Существуют и более эффективные алгоритмы, например, выбор точки не в середине отрезка, а ближе к тому краю, в котором значение функции меньше. Но этот вариант не будет работать при немонотонной функции.

Метод половинного деления реализован на примере с.31-32.

Метод хорд (метод секущих). В этом методе нелинейная функция $f(x)$ на отделенном интервале $[a,b]$ заменяется линейной, в качестве которой берется хорда – прямая, стягивающая концы нелинейной функции. Эта хорда определяется как прямая, проходящая через точки с координатами $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$. Имея уравнение хорды $y = cx + d$, можно легко найти точку ее пересечения с горизонтальной осью, подставив в уравнение $y = 0$ и найдя из него x. Естественно, в полученной таким путем точке x_1 не будет решения, эту точку принимают за новую границу отрезка, где содержится корень. Через эту точку с координатами $(x_1, f(x_1))$ и соответствующую границу предыдущего интервала опять проводят хорду, находят x_2 и так несколько раз, получая последовательность $x_3, x_4, x_5,\ldots,$ сходящуюся к корню. Метод применим только для монотонных функций.

Алгоритм метода зависит от свойств функции $f(x)$. Если $f(b) f''(b) > 0$, то строящаяся на каждом этапе хорда имеет правый фиксированный («закрепленный») конец, и алгоритм выглядит следующим образом:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f(b) - f(x_i)}(b - x_i), \qquad (1.1)$$

при этом последовательность $x_1, x_2,\ldots$ будет приближаться к корню слева.

Если $f(a) f''(a) > 0$, то строящаяся на каждом этапе хорда имеет левый фиксированный («закрепленный») конец, и алгоритм выглядит следующим образом:

$$x_{i+1} = a + \frac{f(a)}{f(a) - f(x_i)}(x_i - a), \qquad (1.2)$$

при этом последовательность $x_1, x_2,\ldots$ будет приближаться к корню справа.

На рис. 1.2 приведен один из вариантов применения метода хорд. В рассматриваемом случае «закрепленным» является правый конец. Приведено три шага (три хорды), при этом к решению приближаемся слева. Теоретически доказано, что если первые производные на концах интервала при монотонной и выпуклой функции $f(x)$ не различаются более чем в 2 раза, то справедливо соотношение

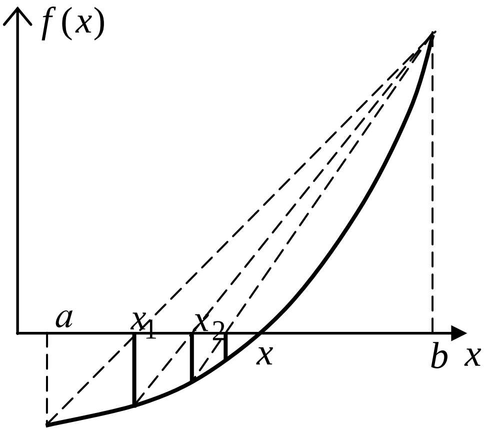


Рис.1.2. Иллюстрация метода

$|x^{*}-x_i| < |x_i - x_{i-1}|$ и условием прекращения вычислений может быть $|x_{i+1}-x_i| \le \varepsilon$, а в качестве корня принято x_{i+1} (можно также окончить процесс и при достижении $f(x_i) \le \delta$, о чем указывалось в начале главы). На практике указанные условия можно применять и без предварительной проверки производных, отклонение погрешности результата при пологих функциях не будет существенным.

Пример 1.4. Имеем уравнение $x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}5x + 1{,}5 = 0$. Уточнить корень с $\varepsilon < 0{,}001$.

Решение. Запишем $f(x) = x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}5x + 1{,}5$.

Проведя процедуру отделения корней, получим, что корень находится в промежутке $[-1;0]$, то есть $a = -1, b = 0$.

Находим вторую производную $f''(x) = 6x - 0{,}4$; в промежутке $[-1,0]$ выполняется неравенство $f''(x) < 0$, $f(a) = f(-1) = -0{,}2 < 0$, поэтому для вычислений применяем формулу (1.2)

$$x_{i+1} = a + \frac{f(a)}{f(a) - f(x_i)}(x_i - a),$$

где $x_0 = b = 0;$ $f(a) = f(-1) = -1 - 0{,}2 - 0{,}5 + 1{,}5 = -0{,}2$.

Все вычисления сведены в таблицу 1.1

Таблица 1.1

i	x_i	$f(x_i)$	$x_i - a$
0	0	1,5	1
1	–0,882	0,2173	0,118
2	–0,943	0,0121	0,057
3	–0,946	0,0014	0,054
4	–0,946		

Ответ: $x \approx -0{,}946$.

Метод Ньютона (касательных). Идея, на которой основан данный метод, аналогична той, которая реализована в методе хорд, только в качестве прямой берется касательная, проводимая в текущей точке последовательности. Уравнение касательной находится по координате одной точки и углу наклона (значение производной). В качестве начальной точки в зависимости от свойств функции берется или левая точка $x_0 = a$ (если $f(a)f''(a) > 0$), или правая точка $x_0 = b$ (если $f(b)f''(b) > 0$). Алгоритм записывается следующим образом:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}. \qquad (1.3)$$

Алгоритм работоспособен при выпуклых и монотонных функциях $f(x)$. Главным теоретическим достоинством метода является квадратичная скорость сходимости, что во многих случаях может привести к сокращению числа вычислений функции при получении решения с заданной погрешностью. В ряде случаев можно применять упрощенный алгоритм, связанный с сокращением числа раз вычисления производных: вместо вычисления производной в каждой очередной точке $f'(x_i)$ использовать значение производной в начальной точке $f'(x_0)$. Следует обратить внимание на следующую особенность метода: последовательность $x_1, x_2, x_3,...$ приближается к корню с другой стороны, чем при использовании метода хорд при прочих равных условиях.

На рисунке 1.3 приведен один из вариантов применения метода Ньютона.

В рассматриваемом случае процесс начинается с правого конца. К решению приближаемся справа. Условия окончания поиска аналогичны методу хорд.

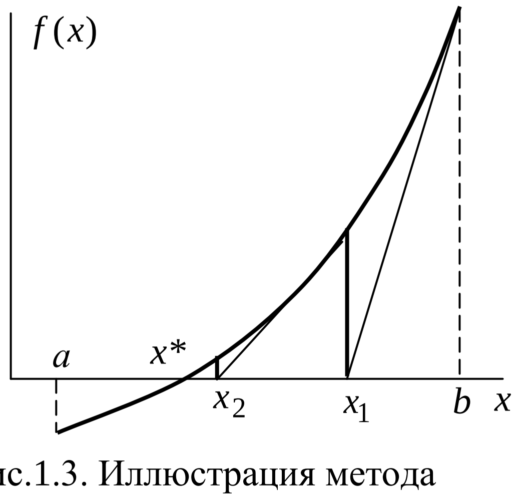


Рис.1.3. Иллюстрация метода

Пример 1.5. Имеем уравнение $tg(0{,}55x + 0{,}1) - x^2 = 0$. Уточнить корень с погрешностью $\varepsilon < 0{,}001$.

Решение. Запишем $f(x) = tg(0{,}55x + 0{,}1) - x^2$.

Проведя процедуру отделения корней, получим, что корень находится в промежутке [0,6; 0,8], то есть a =0,6, b =0,8.

Так как $f(0{,}6) > 0$, $f(0{,}8) < 0$ и $f''(x) < 0$, то за начальное приближение примем $x_0 = 0{,}8$, а вычисления будем проводить по формуле (1.3)

Предварительно найдем

$$f'(x_0) = \frac{0{,}55}{\cos^2(0{,}44 + 0{,}1)} - 2 \cdot 0{,}8 = \frac{0{,}55}{0{,}85772^2} - 1{,}6 = -0{,}8523.$$

Составим таблицу вычислений (таблица 1.2).

Таблица 1.2

i	x_i	$f(x_i)$
0	0,8	–0,0406
1	0,7524	–0,0018
2	0,7503	–0,0000

Ответ: $x = 0{,}750$.

Метод простой итерации реализует третий подход из представленных в концепции. Предварительно исходное уравнение $f(x) = 0$ преобразуют к виду $\varphi(x) = x$, что является частным случаем более общей структуры $g(x) = f(x)$. Затем выбирают начальное значение x_0 и подставляют его в левую часть уравнения, но $\varphi(x_0) \neq x_0$, поскольку x_0 взято произвольно и не является корнем уравнения. Полученное $\varphi(x_0) = x_1$, рассматривают как очередное приближение к корню. Его снова подставляют в левую часть уравнения $\varphi(x_1)$ и получают следующее значение: x_2 $(x_2 = \varphi(x_1))$ и т. д., в общем случае $x_{i+1} = \varphi(x_i)$. Получающаяся таким образом последовательность $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ при определенных условиях может сходиться к корню x^* (рис. 1.4).

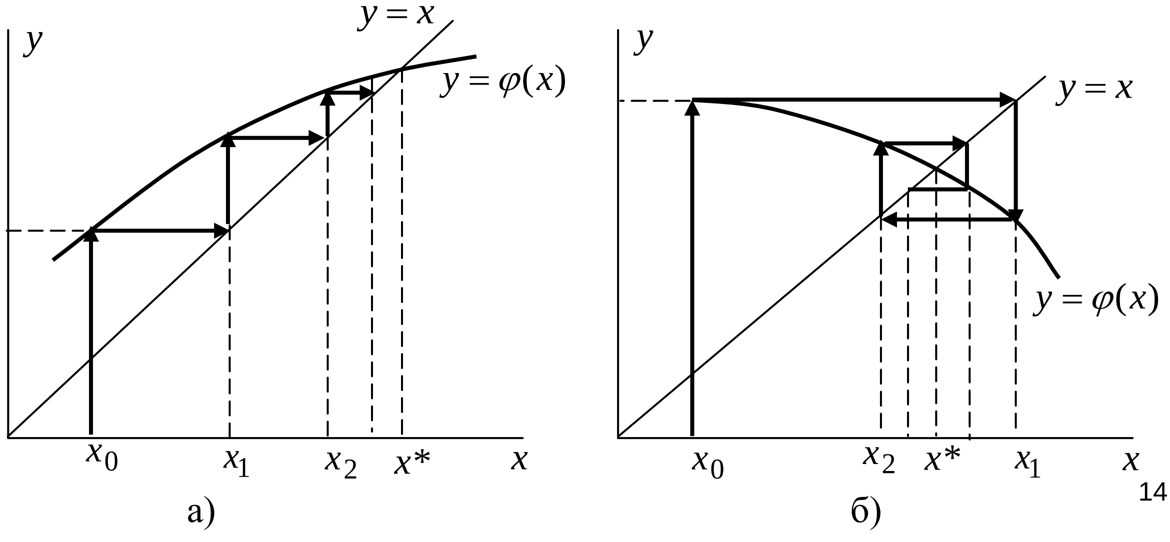


Рис.1.4. Иллюстрация метода итераций для различных ситуаций:

Таким условием является $|\varphi'(x)| \le 1$ на $[a, b]$, причем чем ближе модуль к нулю, тем выше окажется скорость сходимости к решению. В противном случае последовательность расходится от искомого решения («метод не сходится»).

На рисунке 1.5 приведен один из возможных случаев, когда итерационный процесс не сходится. Видно, что последовательность $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ удаляется от корня x^*. Это всегда будет иметь место в том случае, если тангенс угла наклона $\varphi(x)$ в окрестности корня по модулю больше единицы.

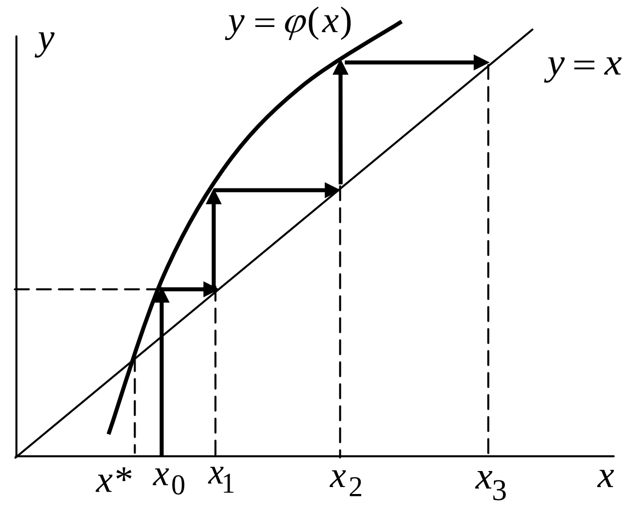


Рис.1.5. Иллюстрация несходяшегося итерационного процесса

Существуют различные способы преобразования уравнения $f(x) = 0$ к виду $\varphi(x) = x$, одни могут привести к выполнению условия сходимости всегда, другие – в отдельных случаях. Самый простой способ следующий:

$$f(x) + x = 0 + x, \quad f(x) + x = \varphi(x) \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = x,$$

но он не всегда приводит к успеху. Существует другой способ, в соответствии с

которым $\varphi(x) = x - f(x)/k$, причем k следует выбирать так, чтобы $|k| > Q/2$,

где $Q = \max\limits_{[a,b]} |f'(x)|$ и знак k совпадал бы со знаком $f'(x)$ на $[a,b]$.

Погрешность решения можно оценить из соотношения

$$|x^* - x_i| \le \frac{q}{1-q} |x_i - x_{i+1}|,$$

где $q = \max\limits_{[a.b]} \varphi'(x)$.

Вследствие этого для окончания вычислений в методе итераций применяют соотношение $\frac{q}{1-q}|x_i - x_{i+1}| \le \varepsilon$, где ε – заданная погрешность решения.

Часто используют упрощенное условие окончания поиска $|x_i - x_{i-1}| \le \varepsilon$, не вычисляя максимальное значение производной, но в этом случае погрешность решения может не соответствовать заданной (то есть быть больше или меньше).

Пример 1.6. Имеем уравнение $2x + \lg(2x+3) = 1$. Необходимо уточнить корень с погрешностью $\varepsilon < 0{,}001$.

Решение. Запишем $f(x) = 2x + \lg(2x+3) - 1$. Проведя процедуру отделения корней, получим, что корень находится в промежутке [0; 0,5], то есть a =0, b =0,5. Приведем уравнение к виду, удобному для итераций $\varphi(x) = x$. Функцию $\varphi(x)$ будем искать из соотношения $\varphi(x) = x - f(x)/k$, считая для повышения сходимости, что $|k| \ge Q/2$, где $Q = \max\limits_{[a,b]} |f'(x)|$, число k имеет тот же знак, что и $f'(x)$ в промежутке [0; 0,5].

Находим

$$f'(x) = 2 + \frac{0{,}8686}{2x+3}; \quad Q = \max_{[0;0{,}5]} f'(x) = 2 + \frac{0{,}8686}{2\cdot 0 + 3} \approx 2{,}2895; \; f'(x) > 0$$

при $0 \le x \le 0{,}5$.

Примем $k = 2$, тогда $\varphi(x) = x - f(x)/2 = 0{,}5 - 0{,}5\lg(2x+3)$.

За начальное приближение возьмем $x_0 = 0$, все остальные приближения будем определять из равенства $x_{i+1} = 0{,}5 - 0{,}5\lg(2x_i + 3)$, результаты сведем в таблицу 1.3

Таблица 1.3

i	x_i	$\varphi(x_i) = x_{i+1}$
0	0	0,2614
1	0,2614	0,2266
2	0,2266	0,2309
3	0,2309	0,2303
4	0,2303	0,2304
5	0,2304	

Получили: $x^* = 0{,}230$ с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

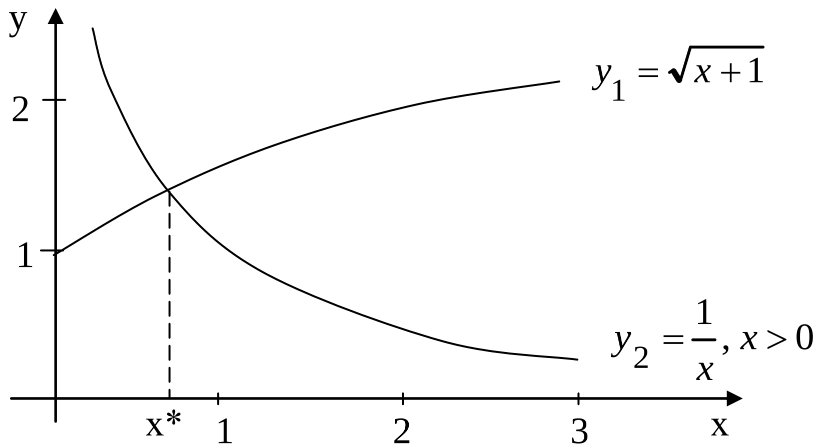
Индивидуальное задание студента

Графически отделить указанные корни уравнений. Найти с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$ все корни уравнений, пользуясь методом секущих (1), методом Ньютона (2), либо методом итераций (3).

1. $x^2 - \cos \pi x = 0, \quad x > 0$ (1).
2. $x - \cos^2 \pi x = 0,$ все корни (2).
3. $(x-1)^2 - 0{,}5e^x = 0,$ все корни (3).
4. $(x-1)^2 - e^{-x} = 0, \quad x > 0$ (1).
5. $e^{-x} - 2 + x^2 = 0, \quad x > 0$ (2).
6. $2\sqrt{x} - \cos \dfrac{\pi x}{2} = 0,$ все корни (3).
7. $x^2 - \sin \pi x = 0$, все корни (1).
8. $\sqrt{x} - 2\cos \dfrac{\pi x}{2} = 0$, первый положительный корень (2).
9. $3x - tg \dfrac{\pi x}{4} = 0,$ первый положительный корень (3).
10. $x^2 - \cos^2 \pi x = 0, \quad x > 0$ (1).

Пример выполнения задания. Графически отделить корни уравнения $\sqrt{x+1}-\frac{1}{x}=0,\ x>0.$ Найти с точностью $\varepsilon=10^{-5}$ все корни уравнений, пользуясь методом секущих, либо методом Ньютона, либо методом итераций.

Решение. Преобразовав исходное уравнение в виде $\sqrt{x+1}=\frac{1}{x},\ x>0,$ построим по точкам левую и правую части уравнения:



Из построения видно, что корень один $x^*\in[0{,}7;\,0{,}9]$.

1. Уточним значение корня, используя метод секущих. Запишем $f(x)=\sqrt{x+1}-\frac{1}{x}$. Проведя процедуру отделения корня, нашли: $a=0{,}7;\ b=0{,}9;$, $f(a)=f(0{,}7)=-0{,}125;\ f(b)=f(0{,}9)=0{,}267.$

Найдем вторую производную:

$f'(x)=0{,}5(x+1)^{-1/2}+x^{-2}$, $f''(x)=-(0{,}25(x+1)^{-3/2}+2x^{-3})$. В промежутке $[0{,}7;\ 0{,}9]$ выполняется неравенство $f''(x)<0$, поэтому, приняв $x_0=b=0{,}9$, используем формулу (при $f(a)f''(a)>0$),

$$x_{i+1}=a+\frac{f(a)}{f(a)-f(x_i)}(x_i-a).$$

Все вычисления сведем в таблицу:

i	x_i	$f(x_i)$	(x_i-a)
0	0,9	0,267	0,2
1	0,76377	0,01877	0,06377
2	0,75544	0,00120	0,05544
3	0,75491	0,00007	0,05491
4	0,75487	0,000003	–

Получим значение $x^* \approx 0{,}75487$.

2. Решим эту же задачу методом Ньютона. В качестве исходных данных будем использовать результаты предыдущего расчета. Имеем: a = 0,7 , b = 0,9, $f(0{,}7) = -0{,}125$; $f(0{,}9) = 0{,}267$; $f''(0{,}7) < 0$.

Будем использовать формулу:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, \tag{1.3}$$

в качестве начальной точки возьмем $x_0 = a$, так как $f(a) \cdot f''(a) > 0$. Предварительно определим значение

$$f'(0{,}7) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2\sqrt{0{,}7+1}} + \frac{1}{0{,}7^2} = 2{,}42430.$$

Расчеты сведем в таблицу:

i	x_i	$f(x_i)$
0	0,7	–0,125
1	0,75156	–0,00710
2	0,78085	0,05382
3	0,75864	0,00800
4	0,75534	0,00099
5	0,75493	0,00012
6	0,75488	0,00001

Получили $x^* \approx 0{,}75488$.

Примечание. В расчетах использовали постоянное значение первой производной $f'(0{,}7) = 2{,}42430$.

3. Решим задачу методом простой итерации, приведя уравнение к виду, удобному для итераций. Функция $f(x) = \sqrt{x+1} - \dfrac{1}{x}$; $x^* \in [0{,}7;\, 0{,}9]$; $f'(x)_{\max} = f'(0{,}7) = 2{,}4243$. Функцию $\varphi(x)$ найдем из соотношения $\varphi(x) = x - f(x)/k$, считая для улучшения сходимости $|k| \geq 0{,}5 f'(x)_{\max}$, знак k возьмем таким же, что и знак $f'(x)$ в промежутке $[0{,}7;\, 0{,}9]$. $k = 0{,}5 \cdot 2{,}4243 = 1{,}212$. Принимаем $k = 1{,}5$. Тогда

$$\varphi(x) = x - f(x)/1{,}5 = x - 0{,}67\left(\sqrt{x+1} - \frac{1}{x}\right).$$

За начальное приближение возьмем $x_0 = 0{,}7$, все остальные приближения определим по формуле

$$x_{i+1} = x_i - 0{,}67\left(\sqrt{x_i + 1} - \frac{1}{x_i}\right).$$

Расчеты сведем в таблицу:

i	x_i	$\varphi(x_i) = x_{i+1}$
0	0,7	0,78357
1	0,78357	0,74384
2	0,74384	0,75980
3	0,75980	0,75280
4	0,75280	0,75577
5	0,75577	0,75449
6	0,75449	0,75504
7	0,75504	0,75481
8	0,75481	0,75490
9	0,75490	0,75486
10	0,75486	0,75488
11	0,75488	0,75487

Получили на 11-й итерации $x^* = 0{,}75487$, что совпадает с расчетами другими методами.

Библиографический список

1. Амосов, А. А. Вычислительные методы для инженеров [Текст] : учебное пособие для втузов / А. А. Амосов, Ю. А. Дубинский, Н.В. Копченова. - М. : Высшая школа, 1994. - 544 с..

2. Вержбицкий В.М. Численные методы математической физики [Электронный ресурс]: учебное пособие / В.М.Вержбицкий. - М: Директ.-Медиа, 2013. - 212 с. // Режим доступа -http://biblioclub.ru/

3. Волков Е.А. Численные методы [Текст]: учебное пособие / Е.А. Волков. - 4 –е изд., стер.– СПб.: Лань., 2007. - 256 с.

4. Киреев, В. И. Численные методы в примерах и задачах [Текст] : учебное пособие / В. И. Киреев, А. В. Пантелеев. - Изд. 4-е, испр. - Санкт-Петербург : Лань, 2015. - 448 с. : ил. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - Библиогр.: с. 441-443.

5. Численные методы [Текст] : учебное пособие : [для студентов 2 курса специальности 230700.62 «Прикладная информатика» при изучении дисциплины «Численные методы»] / В. А. Милых, Ю. А. Халин ; - Курск : ЮЗГУ, 2013. - 155 с.