0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1c11eabbf73e943df4a4851fda56d089

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра информационной безопасности

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_________ О.Г. Локтионова
«__» __________ 2017 г.

Численное интегрирование:
методические указания к практическим занятиям по дисциплинам
«Вычислительные методы», «Численные методы»

Курск 2017

УДК 510.6
Составители: В.П. Добрица, В.А. Милых, Ю.А. Халин

Рецензент
Кандидат физико-математических наук, доцент В.И. Дмитриев

Численное интегрирование: методические указания к практическим занятиям по дисциплинам «Вычислительные методы», «Численные методы» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост. В.П. Добрица, В.А. Милых, Ю.А. Халин. Курск, 2017. – 16 с. Библиогр.: с. 16.

Приводится описание основных методов решения нелинейных уравнений.

Методические рекомендации предназначены для студентов, обучающихся по направлениям, укрупнённых групп специальностей 02.00.00, 09.00.00, 10.00.00

Текст печатается в авторской редакции.

Подписано в печать 17.11.17 . Формат 60x84 1/16.
Усл.печ. л. 1,56 п.л . Уч.-изд. л. 1,22 . Тираж 100 экз. Заказ. 1933
Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Содержание

1.1. Постановка задачи численного интегрирования

Многие задачи науки техники часто приводят к интегрированию неэлементарных функций. Эта проблема решается с помощью численных методов, которые и будут рассмотрены в этой главе. С геометрической точки зрения определенный интеграл от функции, заданной аналитически, удается вычислить непосредственно по формуле Ньютона - Лейбница. Она состоит в том, что определенный интеграл равен разности значений первообразной функции на отрезке интегрирования

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{1.1}$$

Однако на практике этой формулой часто невозможно воспользоваться по двум основным причинам:

1) вид функции *f(x)* не допускает непосредственного интегрирования, то есть первообразную невозможно выразить в элементарных функциях;

2) значения функции *f(x)* заданы дискретно, на конечном множестве x_i, то есть функция задана в виде таблицы.

В этих случаях используются методы численного интегрирования. Они основаны на аппроксимации подынтегральной функции некоторыми более простыми зависимостями (например, многочленами).

Одним из таких способов, который может быть использован для вычисления, является *представление подынтегральной функции в виде степенного ряда* (ряда Тейлора). Это позволяет свести вычисление интеграла от сложной функции к интегрированию многочлена, представляющего первые несколько членов ряда.

Рядом Тейлора для функции *f(x)* называется степенной ряд вида

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + ... \tag{1.2}$$

При представлении подынтегральной функции в виде ряда Тейлора обычно поступают следующим образом: вычисляют последовательно производные данной функции в точке $x = 0$, а затем, пользуясь формулой (1.2), составляют ряд Тейлора.

Применяя рассмотренный способ, можно найти разложение в ряд Тейлора для многих функций, например:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \quad (-\infty < x < +\infty); \qquad (1.3)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \quad (-\infty < x < +\infty); \qquad (1.4)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \quad (-\infty < x < +\infty); \qquad (1.5)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)-(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots \quad (-1 < x < 1); \qquad (1.6)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots \quad (-1 < x < 1). \qquad (1.7)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots \quad (-1 < x \le 1). \qquad (1.8)$$

Исходя из известных разложений (1.3) – (1.8), можно сформировать подынтегральные выражения для многих функций. При этом возможно использование следующих действий над степенными рядами внутри их интервалов сходимости:

1) два степенных ряда можно почленно складывать и умножать поправилу умножения многочленов;

2) степенной ряд можно почленно умножать на общий множитель;

3) степенной ряд можно почленно интегрировать и дифференцировать любое число раз.

Пример 1.1. Разложить в ряд Тейлора, сохранив три члена ряда, функцию $f(x) = \ln(1-2x)$.

Решение. Заменим в разложении для $\ln(1+x)$ аргумент x на $-2x$:

$$\ln(1-2x) = (-2x) - \frac{(-2x)^2}{2} + \frac{(-2x)^3}{3} = -2x - 2x^2 - \frac{8}{3}x^3.$$

Исходное разложение для $f(x) = \ln(1+x)$ справедливо в интервале $(-1 < x < 1)$, а полученное разложение получается путем замены x на $-2x$, следовательно, его интервал сходимости будет $(-1 < -2x \le 1) \to (-0{,}5 \le x < 0{,}5)$.

Остается решить вопрос о количестве членов ряда, которое необходимо оставить в разложении подынтегральной функции. *Для* знакоположительных рядов, если количество членов равно k, то ошибка, которую мы допускаем, заменяя сумму ряда его k-й частичной суммой, равна сумме членов ряда, начиная с $(k+1)$-й частичной суммы.

Пример 1.2. Вычислить интеграл $\int_0^1 e^{2x}dx$ с точностью $\varepsilon = 0{,}01$.

Решение. Воспользуемся разложением подынтегральной функции в степенной ряд (3.3), заменив x на $2x$:

$$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \ldots + \frac{(2x)^k}{k!} + \ldots + \frac{(2x)^n}{n!} + \ldots$$

Тогда

$$\int_0^1 e^{2x}dx = \int_0^1 \left(1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \ldots + \frac{(2x)^k}{k!} + \ldots + \frac{(2x)^n}{n!} + \right)dx =$$

$$= x\Big|_0^1 + 2\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + 4\frac{x^3}{2\cdot 3}\Big|_0^1 + 8\frac{x^4}{6\cdot 4}\Big|_0^1 + \ldots$$

Результаты вычисления с различным числом слагаемых, а также точное значение интеграла приведем в таблице 3.1.

Таблица 1.1

k	4	5	6	Точное значение
$\int_0^1 e^{2x}dx$	3,1333	3,1777	3,1904	3,1945

Оценим количество членов, которое необходимо оставить в разложении, чтобы вычислить интеграл с необходимой точностью ε. Так как ошибка, которую мы при этом допускаем, равна сумме отброшенных слагаемых, то

$$\varepsilon = \frac{2^{k+1}}{(k+2)!} + \frac{2^{k+2}}{(k+3)!} + \frac{2^{k+3}}{(k+4)!} + \ldots = \frac{2^{k+1}}{(k+2)!}\left(1 + \frac{2}{k+3} + \frac{2^2}{(k+3)(k+4)} + \ldots\right)$$

.

Заменим в знаменателе каждое из чисел $(k+3),(k+4),\ldots$ на $(k+2)$, тогда $\varepsilon < \dfrac{2^{k+1}}{(k+2)!}\left(1 + \dfrac{2}{k+2} + \dfrac{2^2}{(k+2)^2} + \ldots\right)$.

Выражение в скобках есть сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q = \dfrac{2}{k+2}$. Сумма членов этой геометрической прогрессии будет

$$S_n = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-q} = \frac{k+2}{k}.$$

Из этого следует $\varepsilon < \dfrac{2^{k+1}}{(k+2)!} \cdot \dfrac{(k+2)}{k} = \dfrac{2^{k+1}}{(k+1)! \cdot k}$.

Зная необходимую погрешность вычисления, найдем число членов ряда, которые необходимо сохранить в разложении. Например, если $\varepsilon = 0{,}01$, то $\dfrac{2^{k+1}}{(k+1)!k} < 0{,}01 \to \dfrac{(k+1)!k}{2^{k+1}} > 100$.

Методом подбора решаем неравенство.

Пусть $k = 5$, тогда $\dfrac{6! \cdot 5}{2^5} = 112{,}5 > 100$. Таким образом, достаточно пяти членов ряда, чтобы получить требуемую точность вычисления.

Для знакочередующихся рядов допускаемая погрешность оценивается очень просто, и эта погрешность меньше абсолютного значения первого из отброшенных членов ряда.

Пример 1.3. Вычислить $\int_0^1 \dfrac{\sin x}{x} dx$ с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

Решение. Разложим подынтегральную функцию в ряд Тейлора, используя формулы (3.3) – (3.8):

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots,$$

тогда

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots\right) dx = x\Big|_0^1 - \frac{x^3}{3! \cdot 3}\Big|_0^1 + \frac{x^5}{3! \cdot 5}\Big|_0^1 - \frac{x^7}{7! \cdot 7}\Big|_0^1 + \ldots =$$

$$= 1 - \frac{1}{3! \cdot 3} + \frac{1}{5! \cdot 5} - \frac{1}{7! \cdot 7} + \ldots = 1 - \frac{1}{3! \cdot 3} + \frac{1}{5! \cdot 5} = 0{,}946.$$

Здесь ограничиваемся тремя слагаемыми, так как четвертый член $\left|\dfrac{1}{7! \cdot 7}\right| = 0{,}00003 < \varepsilon = 0{,}001.$

1.2. Квадратурные формулы численного интегрирования

Более универсальными методами являются методы численного интегрирования, основанные на аппроксимации подынтегральной функции с помощью интерполяционных многочленов. В этом случае подынтегральная функция приближенно заменяется более простой (прямой или параболой), что позволяет заменить определенный интеграл интегральной суммой. В зависимости от способа ее вычисления получаются разные методы численного интегрирования (методы прямоугольников, трапецией, парабол и др.).

Формула прямоугольников является простейшим методом, который непосредственно использует замену определенного интеграла интегральной суммой:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x, \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}. \tag{1.9}$$

Принимая в качестве ξ_i значения левых или правых концов отрезков $[x_i, x_{i+1}]$, получим соответственно формулы левых или правых прямоугольников (рис.1.1).

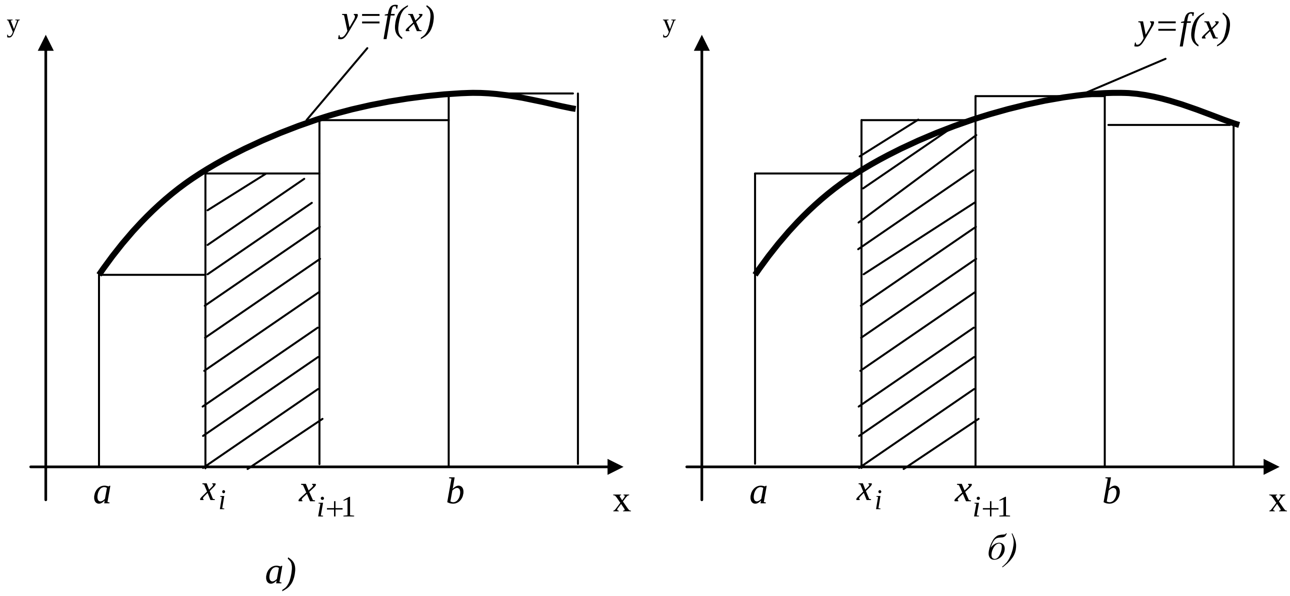

Рис. 1.1. Метод прямоугольников: а) левых; б) правых.

Часто используется формула прямоугольников, где в качестве ξ_i берут середины отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ (метод средних).

Предельную абсолютную погрешность метода можно оценить по формуле

$$R_n = |I - I_n| \le \frac{\Delta x}{2}(b-a)M_1, \tag{1.10}$$

где $M_1 = \max\limits_{[a,b]} |f'(x)|$.

Чем меньше интервал Δx, на которые разбивается отрезок $[a, b]$, тем точнее вычисляется интеграл.

Пример 1.4. Вычислить по формуле прямоугольников $\int\limits_1^2 \sqrt{x}\,dx$, разбив отрезок интегрирования на 10 частей. Оценить погрешность вычисления интеграла.

Решение. Имеем $f(x) = \sqrt{x}$; $n = 10$; $\Delta x = (2-1)/10 = 0{,}1$. Точками деления интеграла будут: $x_0 = 1$, $x_1 = x_0 + \Delta x = 1{,}1$; $x_2 = 1{,}2, \ldots, x_9 = 1{,}9$. Вычислим значения подынтегральной функции: $y_0 = \sqrt{x_0} = 1$; $y_1 = \sqrt{1{,}1} = 1{,}049, \ldots$.

Полученные значения поместим в таблицу 1.2.

Таблица 1.2

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ
x_i	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	–
y_i	1	1,049	1,095	1,140	1,183	1,225	1,265	1,304	1,342	1,378	11,981

Используя формулу прямоугольников (1.9), получим:

$$I_n = \Delta x \sum_{i=0}^{9} y_i = 0{,}1 \cdot 11{,}981 = 1{,}198.$$

Оценим погрешность метода:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$\max_{[1;2]} f'(x) = f'(1) = 0{,}5; \quad R_n \le \frac{0{,}1}{2}(2-1)\cdot 0{,}5 = 0{,}025.$$

Таким образом, $\int\limits_1^2 \sqrt{x}\,dx \approx 1{,}198 \pm 0{,}025.$

Метод трапеций использует линейную интерполяцию, при которой реальная функция на каждом интервале $[x_i, x_{i+1}]$ заменяется отрезком прямой, проходящей через точки с координатами $(x_i; f(x_i))$, $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$. В этом случае площадь криволинейной трапеции складывается из площадей элементарных трапеций (рис. 1.2).

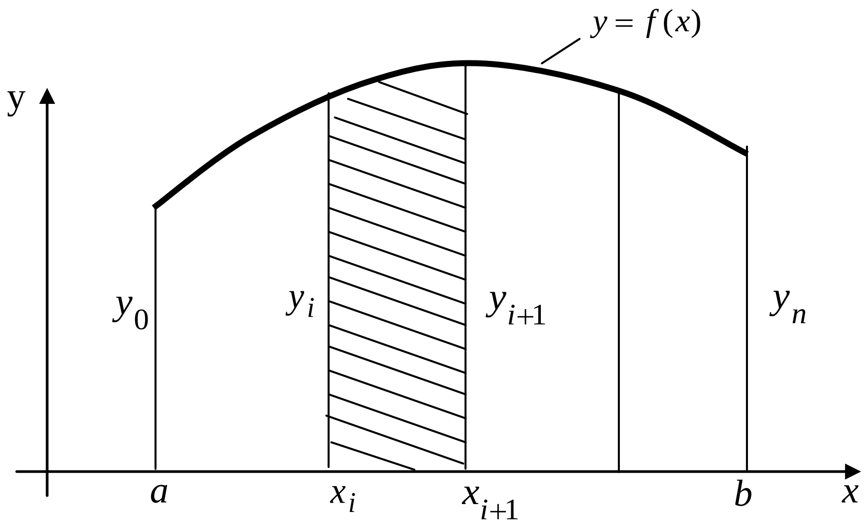

Рис. 1.2. Иллюстрация метода трапеций

Площадь каждой элементарной трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту:

$$\Delta S_i = \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \cdot \Delta x .$$

Складывая элементарные площади, получаем *формулу трапеций* для численного интегрирования

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx \Delta x \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right). \qquad (1.11)$$

Предельную абсолютную погрешность метода можно оценить по формуле

$$R_n = | I - I_n | \le \frac{\Delta x^2}{12} (b-a) M_2 , \qquad (1.12)$$

где $M_2 = \max\limits_{[a,b]} | f''(x) |$.

Пример 1.5. Вычислить по формуле трапеций интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, разбив отрезок интегрирования на 10 равных частей $(n = 10)$.

Решение. Имеем $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$;

$\Delta x=0{,}1,\ x_0=a=0;\ x_1=x_0+\Delta x=0{,}1,\ldots,\ x_9=0{,}9,\ x_n=b=1{,}0.$

Вычислим значения подынтегральной функции в точках разбиения (табл. 1.3)

Таблица 1.3

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y_i	1,000	0,990	0,962	0,917	0,862	0,800	0,735	0,671	0,609	0,552	0,500

$$\sum_{n=1}^{i=9} y_1 = 7{,}0998$$

Используя формулу трапеций (3.11), получим

$$I_n=\Delta x\left(\frac{y_0+y_n}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}y_i\right)=0{,}1(0{,}5(1{,}000+0{,}500)+7{,}0998)=0{,}78498.$$

Оценим погрешность. Предварительно найдем производные:

$$f'(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2};\quad f''(x)=2\frac{8x^2-1}{(1+x^2)^3};\quad \max_{[a,b]}|f''(x)|=|f''(0)|=2;$$

отсюда $R_n\le\dfrac{0{,}1^2}{12}(1-0)\cdot 2=0{,}0016.$

Следовательно, $I_n=0{,}7850\pm 0{,}0016$.

Метод Симпсона базируется на замене подынтегральной функции *f(x)* квадратичной параболой, которая строится по трем точкам (крайние точки и средняя точка) (рис. 1.3) По этим точкам строится интерполяционная функция $\varphi(x)-$ полином второй степени.

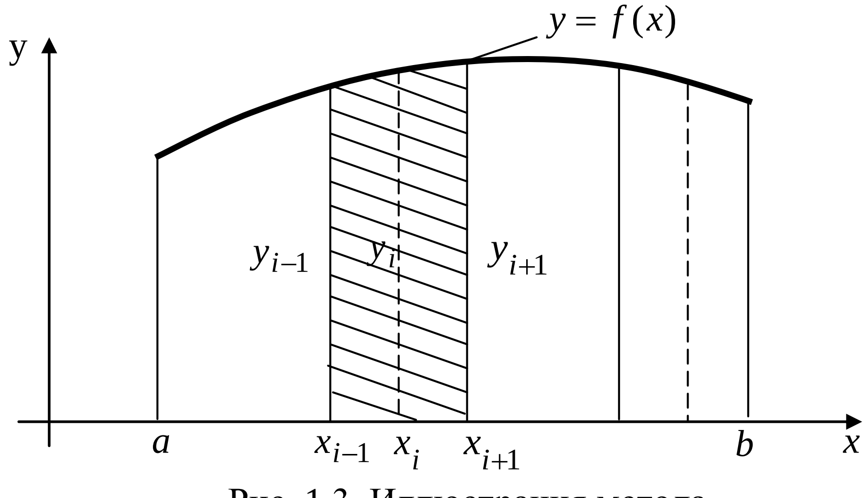

Рис. 1.3. Иллюстрация метода Симпсона

В качестве $\varphi(x)$ можно приять интерполяционный многочлен Лагранжа, проходящий через точки $(x_{i-1}; y_{i-1})$, (x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}):

$$\varphi(x) = y_{i-1}\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})} + y_i\frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{(x-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})} + \\ + y_{i+1}\frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i-1}-x_i)}. \qquad (1.13)$$

Площадь под графиком функции $\varphi(x)$ на интервале $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ вычисляется с помощью определенного интеграла. Учитывая равенства $x_{i-1} - x_i = x_{i+1} - x_i = \Delta x$, получим

$$S_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi(x)\,dx = \frac{1}{2\Delta x^2}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [y_{i-1}(x-x_i)(x-x_{i+1}) - 2y_i(x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) + \\ + y_{i+1}(x-x_{i-1})(x-x_i)]dx = \frac{\Delta x}{3}(y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}).$$

Проведя эти вычисления для всех элементарных отрезков $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ и просуммировав эти выражения, получим

$$I_n = \sum_{i=0}^{n} S_i = \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots \\ + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n). \qquad (1.14)$$

Полученное соотношение называется *формулой Симпсона*. Предельную абсолютную погрешность метода можно оценить по формуле:

$$|I - I_n| \le \frac{\Delta x^4}{180}(b-a)M, \qquad (1.15)$$

где $M = \max\limits_{[a,b]} |f^{(4)}(x)|$.

Если отыскание четвертой производной затруднительно или невозможно, то для оценки погрешности вычисления интеграла применяют *метод удвоения шага*. Для этого вычисляют значение интеграла при выбранном шаге Δx (пусть найденное значение интеграла I_1). Затем шаг удваивают и вновь проводят вычисления (пусть найденное значение есть I_2). Тогда оценить погрешность при использовании двойного просчета можно по соотношению

$$\frac{|I_n - I_{n/2}|}{15} \le \varepsilon,$$

то есть при увеличении числа разбиений в два раза погрешность падает в 15 раз.

Пример 1.6. Вычислить по формуле Симпсона $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, разбив отрезок интегрирования на четыре части ($n=4$). Оценить погрешность методом двойного пересчета.

Решение. Имеем: $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$; $\Delta x = 0{,}25$; $x_0 = 0$; $x_1 = x_0 + \Delta x = 0{,}25$; ...; $x_n = x_4 = 1{,}0$.

Вычислим значения подынтегральной функции в точках разбиения (табл. 1.4).

Таблица 1.4

i	0	1	2	3	4
x_i	0	0,25	0,5	0,75	1
y_i	1,0	0,9412	0,8	0,6400	0,5

Подставляя в формулу (3.14), получим

$$I_n = \frac{0{,}25}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_n) =$$

$$= \frac{0{,}25}{3}(1 + 4\cdot 0{,}9412 + 2\cdot 0{,}8 + 4\cdot 0{,}64 + 0{,}5) = 0{,}78533.$$

Теперь возьмем $\Delta x = 0{,}1$; $x_0 = 0$; $x_1 = 0{,}1$, ..., $x_n = x_{10} = 1{,}0$.

Значение подынтегральной функции приведены в таблице 3.5.

Таблица 3.5

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y_i	1,0	0,9900	0,9615	0,9174	0,8620	0,8	0,7353	0,6711	0,6097	0,5525	0,5

$$I_{n/2} = \frac{0{,}1}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + 2y_6 + 4y_7 + 2y_8 + 4y_9 + y_{10}) =$$

$$= \frac{0{,}1}{3}(1{,}0 + 0{,}5 + 4(0{,}9900 + 0{,}9174 + 0{,}8 + 0{,}6711 + 0{,}5525) +$$

$$+ 2(0{,}9615 + 0{,}8620 + 0{,}7353 + 0{,}6097) = 0{,}78537.$$

Погрешность метода

$$R_n = \frac{|I_n - I_{n/2}|}{15} = \frac{|0{,}78533 - 0{,}78537|}{15} = 0{,}000003.$$

Таким образом, все пять знаков в интеграле должны быть точными. Для сравнения можно сопоставить приближенные значения интеграла с истинным значением:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = arctgx\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785398\ldots$$

Индивидуальное задание студента

Вычислить интеграл с использованием указанной в задании квадратурной формулы, при этом на всем отрезке интегрирования первоначально использовать пять узлов. Уточнить значение интеграла и оценить погрешность результата методом двойного пересчета.

№	Интеграл	Метод	Ответ
1.	$\int_1^2 \left(2x^2+\frac{2}{x^4}\right)dx,$	метод трапеций	(Ответ: 5,2500.)
2.	$\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$	метод Симпсона	(Ответ: 4,6667.)
3.	$\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$	метод трапеций	(Ответ: 2,0000.)
4.	$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,dx,$	метод Симпсона	(Ответ: 1,3333.)
5.	$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$	метод трапеций	(Ответ: $(2-\ln 2)=1{,}3068$.)
6.	$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$	метод Симпсона	(Ответ: 3,1416.)
7.	$\int_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$	метод трапеций	(Ответ: 0,9437.)
8.	$\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,dx$	метод Симпсона	(Ответ: 8,3863.)
9.	$\int_4^9 \frac{x\,dx}{(1+x^2)^3}$	метод трапеций	(Ответ: 0,1875.)
10.	$\int_0^9 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$	метод Симпсона	(Ответ: 5,7726.)

Пример выполнения задания4. Вычислить $\int\limits_1^4 \left(2x + \frac{3}{\sqrt{x}}\right) dx$ с использованием квадратурной формулы, указанной в задании, первоначально взяв пять узлов. Уточнить значение интеграла и оценить погрешность результата методом двойного пересчета.

Решение. Определяем координаты узлов при $n = 4$:
$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{4} = 0{,}75;\quad x_0 = a = 1{,}0;\quad x_1 = x_0 + \Delta x = 1{,}75, \ldots, x_n = b = 4{,}0.$
$f(x) = 2x + \frac{3}{\sqrt{x}}.$

Вычислим значения подынтегральной функции в узлах интегрирования

i	0	1	2	3	4
x_i	1,0	1,75	2,5	3,25	4,0
y_i	5,0	5,76779	6,89737	8,16410	9,5

20,82926

1. *Вычислим интеграл методом трапеций:*

$$I_n = \Delta x\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right) = 0{,}75(0{,}5(5{,}0 + 9{,}5) + 20{,}82926) = 21{,}05945.$$

Удвоим количество узлов: $n = 8$; $\Delta x = \frac{4-1}{8} = 0{,}375$, $x_0 = a = 1{,}0$;

$x_1 = x_0 + \Delta x = 1{,}375; \ldots, x_n = x_8 = 4{,}0.$

Вычислим значение функции в узлах интегрирования:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	1,0	1,375	1,75	2,125	2,5	2,875	3,25	3,625	4,0
y_i	5,0	5,30841	5,76779	6,30798	6,89737	7,51930	8,16410	8,82567	9,5

48,79062

Вычислим интеграл $I_{n/2} = 0{,}375(0{,}5(5{,}0 + 9{,}5) + 48{,}79062) = 21{,}01523$.

Оценим погрешность результата

$$R_n = \frac{|I_n - I_{n/2}|}{15} = \frac{21{,}05945 - 21{,}01523}{15} = 0{,}0029$$

Таким образом, в последнем результате верными надо оставить два знака:

$$\int_1^4 \left(2x + \frac{3}{\sqrt{x}}\right) dx \approx 21{,}01.$$

2. *Вычислим интеграл методом Симпсона.*

Определим координаты узлов при $n = 4$:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{4} = 0{,}75; \quad x_0 = a = 1{,}0; \quad x_1 = x_0 + \Delta x = 1{,}75, \ldots, x_n = b = 4{,}0.$$

$$f(x) = 2x + \frac{3}{\sqrt{x}}.$$

Вычислим значения подынтегральной функции в узлах интегрирования

i	0	1	2	3	4
x_i	1,0	1,75	2,5	3,25	4,0
y_i	5,0	5,76779	6,89737	8,16410	9,5

Вычислим интеграл по формуле Симпсона (1.14):

$$I_n = \frac{0{,}75}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_n) =$$

$$= \frac{0{,}75}{3}(5{,}0 + 4(5{,}76779 + 8{,}16410) + 2 \cdot 6{,}89737 + 9{,}5) = 21{,}00557.$$

Удвоим количество узлов: $n = 8$; $\Delta x = \dfrac{4-1}{8} = 0{,}375$, $x_0 = a = 1{,}0$; $x_1 = 1{,}375, \ldots, x_n = x_8 = 4{,}0$. Вычислим значения $f(x)$ в узлах:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	1,0	1,375	1,75	2,125	2,5	2,875	3,25	3,625	4,0
y_i	5,0	5,30841	5,76779	6,30798	6,89737	7,51930	8,16410	8,82567	9,5

Подставим значения y_i в формулу Симпсона:

$$I_{n/2} = \frac{0{,}375}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + 2y_6 + 4y_7 + y_8) =$$

$$= \frac{0{,}375}{3}(5{,}0 + 9{,}5 + 4(5{,}30841 + 6{,}30798 + 7{,}51930 + 8{,}82567) +$$

$$+ 2(5{,}76779 + 6{,}89737 + 8{,}16410)) = 21{,}00049.$$

Оценим погрешность результата:

$$R_n = \frac{|I_n - I_{n/2}|}{15} = \frac{|21{,}00557 - 21{,}00049|}{15} = 0{,}0003.$$

Таким образом, в качестве результата вычисления интеграла $\int\limits_1^4 \left(2x + \frac{3}{\sqrt{x}}\right) dx \approx 21{,}000.$

Библиографический список

1. Амосов, А. А. Вычислительные методы для инженеров [Текст] : учебное пособие для втузов / А. А. Амосов, Ю. А. Дубинский, Н.В. Копченова. - М. : Высшая школа, 1994. - 544 с..

2. Вержбицкий В.М. Численные методы математической физики [Электронный ресурс]: учебное пособие / В.М.Вержбицкий. - М: Директ.-Медиа, 2013. - 212 с. // Режим доступа -http://biblioclub.ru/

3. Волков Е.А. Численные методы [Текст]: учебное пособие / Е.А. Волков. - 4 –е изд., стер.– СПб.: Лань., 2007. - 256 с.

4. Киреев, В. И. Численные методы в примерах и задачах [Текст] : учебное пособие / В. И. Киреев, А. В. Пантелеев. - Изд. 4-е, испр. - Санкт-Петербург : Лань, 2015. - 448 с. : ил. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - Библиогр.: с. 441-443.

5. Численные методы [Текст] : учебное пособие : [для студентов 2 курса специальности 230700.62 «Прикладная информатика» при изучении дисциплины «Численные методы»] / В. А. Милых, Ю. А. Халин ; - Курск : ЮЗГУ, 2013. - 155 с.