

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна

Должность: проректор по учебной работе

Дата подписания: 08.09.2021 10:43:51

Уникальный программный ключ:

0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1c11eabb75e945d14a4851da56d089

МИНОБРАЗОВАНИЯ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра информационной безопасности

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
О.Г. Локтионова
« 08 » сентября 2017 г.



Численное интегрирование:
методические указания к практическим занятиям по дисциплинам
«Вычислительные методы», «Численные методы»

Курс 2017

УДК 510.6

Составители: В.П. Добрица, В.А. Милых, Ю.А. Халин

Рецензент

Кандидат физико-математических наук, доцент В.И. Дмитриев

Численное интегрирование: методические указания к практическим занятиям по дисциплинам «Вычислительные методы», «Численные методы» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост. В.П. Добрица, В.А. Милых, Ю.А. Халин. Курск, 2017. – 16 с. Библиогр.: с. 16.

Приводится описание основных методов решения нелинейных уравнений.

Методические рекомендации предназначены для студентов, обучающихся по направлениям, укрупнённых групп специальностей 02.00.00, 09.00.00, 10.00.00

Текст печатается в авторской редакции.

Подписано в печать *17.11.17*. Формат 60x84 1/16.
Усл.печ. л. 1,56 п.л. Уч.-изд. л. 1,22. Тираж 100 экз. Заказ. *1933*
Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Содержание

| | |
|---|----|
| 1.1. Постановка задачи численного интегрирования | 4 |
| 1.2. Квадратурные формулы численного интегрирования | 7 |
| Индивидуальное задание студента | 15 |
| Библиографический список | 19 |

1.1. Постановка задачи численного интегрирования

Многие задачи науки техники часто приводят к интегрированию неэлементарных функций. Эта проблема решается с помощью численных методов, которые и будут рассмотрены в этой главе. С геометрической точки зрения определенный интеграл от функции, заданной аналитически, удается вычислить непосредственно по формуле Ньютона - Лейбница. Она состоит в том, что определенный интеграл равен разности значений первообразной функции на отрезке интегрирования

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \quad (1.1)$$

Однако на практике этой формулой часто невозможно воспользоваться по двум основным причинам:

1) вид функции $f(x)$ не допускает непосредственного интегрирования, то есть первообразную невозможно выразить в элементарных функциях;

2) значения функции $f(x)$ заданы дискретно, на конечном множестве x_i , то есть функция задана в виде таблицы.

В этих случаях используются методы численного интегрирования. Они основаны на аппроксимации подынтегральной функции некоторыми более простыми зависимостями (например, многочленами).

Одним из таких способов, который может быть использован для вычисления, является *представление подынтегральной функции в виде степенного ряда* (ряда Тейлора). Это позволяет свести вычисление интеграла от сложной функции к интегрированию многочлена, представляющего первые несколько членов ряда.

Рядом Тейлора для функции $f(x)$ называется степенной ряд вида

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (1.2)$$

При представлении подынтегральной функции в виде ряда Тейлора обычно поступают следующим образом: вычисляют последовательно производные данной функции в точке $x=0$, а затем, пользуясь формулой (1.2), составляют ряд Тейлора.

Применяя рассмотренный способ, можно найти разложение в ряд Тейлора для многих функций, например:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty); \quad (1.3)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty); \quad (1.4)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty); \quad (1.5)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots \quad (-1 < x < 1); \quad (1.6)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \quad (-1 < x < 1). \quad (1.7)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad (-1 < x \leq 1). \quad (1.8)$$

Исходя из известных разложений (1.3) – (1.8), можно сформировать подынтегральные выражения для многих функций. При этом возможно использование следующих действий над степенными рядами внутри их интервалов сходимости:

- 1) два степенных ряда можно почленно складывать и умножать по правилу умножения многочленов;
- 2) степенной ряд можно почленно умножать на общий множитель;
- 3) степенной ряд можно почленно интегрировать и дифференцировать любое число раз.

Пример 1.1. Разложить в ряд Тейлора, сохранив три члена ряда, функцию $f(x) = \ln(1 - 2x)$.

Решение. Заменяем в разложении для $\ln(1+x)$ аргумент x на $-2x$:

$$\ln(1-2x) = (-2x) - \frac{(-2x)^2}{2} + \frac{(-2x)^3}{3} = -2x - 2x^2 - \frac{8}{3}x^3.$$

Исходное разложение для $f(x) = \ln(1+x)$ справедливо в интервале $(-1 < x < 1)$, а полученное разложение получается путем замены x на $-2x$, следовательно, его интервал сходимости будет $(-1 < -2x \leq 1) \rightarrow (-0,5 \leq x < 0,5)$.

Остается решить вопрос о количестве членов ряда, которое необходимо оставить в разложении подынтегральной функции. Для знакоположительных рядов, если количество членов равно k , то ошибка, которую мы допускаем, заменяя сумму ряда его k -й

частичной суммой, равна сумме членов ряда, начиная с $(k+1)$ -й частичной суммы.

Пример 1.2. Вычислить интеграл $\int_0^1 e^{2x} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

Решение. Воспользуемся разложением подынтегральной функции в степенной ряд (3.3), заменив x на $2x$:

$$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \dots + \frac{(2x)^k}{k!} + \dots + \frac{(2x)^n}{n!} + \dots$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{2x} dx &= \int_0^1 \left(1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \dots + \frac{(2x)^k}{k!} + \dots + \frac{(2x)^n}{n!} + \dots \right) dx = \\ &= x \Big|_0^1 + 2 \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + 4 \frac{x^3}{2 \cdot 3} \Big|_0^1 + 8 \frac{x^4}{6 \cdot 4} \Big|_0^1 + \dots \end{aligned}$$

Результаты вычисления с различным числом слагаемых, а также точное значение интеграла приведем в таблице 3.1.

Таблица 1.1

| k | 4 | 5 | 6 | Точное значение |
|----------------------|--------|--------|--------|-----------------|
| $\int_0^1 e^{2x} dx$ | 3,1333 | 3,1777 | 3,1904 | 3,1945 |

Оценим количество членов, которое необходимо оставить в разложении, чтобы вычислить интеграл с необходимой точностью ε . Так как ошибка, которую мы при этом допускаем, равна сумме отброшенных слагаемых, то

$$\varepsilon = \frac{2^{k+1}}{(k+2)!} + \frac{2^{k+2}}{(k+3)!} + \frac{2^{k+3}}{(k+4)!} + \dots = \frac{2^{k+1}}{(k+2)!} \left(1 + \frac{2}{k+3} + \frac{2^2}{(k+3)(k+4)} + \dots \right)$$

Заменим в знаменателе каждое из чисел $(k+3), (k+4), \dots$ на $(k+2)$, тогда $\varepsilon < \frac{2^{k+1}}{(k+2)!} \left(1 + \frac{2}{k+2} + \frac{2^2}{(k+2)^2} + \dots \right)$.

Выражение в скобках есть сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{2}{k+2}$. Сумма членов этой геометрической прогрессии будет

$$S_n = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-q} = \frac{k+2}{k}.$$

Из этого следует $\varepsilon < \frac{2^{k+1}}{(k+2)!} \cdot \frac{(k+2)}{k} = \frac{2^{k+1}}{(k+1)! \cdot k}.$

Зная необходимую погрешность вычисления, найдем число членов ряда, которые необходимо сохранить в разложении.

Например, если $\varepsilon = 0,01$, то $\frac{2^{k+1}}{(k+1)!k} < 0,01 \rightarrow \frac{(k+1)!k}{2^{k+1}} > 100.$

Методом подбора решаем неравенство.

Пусть $k = 5$, тогда $\frac{6! \cdot 5}{2^5} = 112,5 > 100.$ Таким образом,

достаточно пяти членов ряда, чтобы получить требуемую точность вычисления.

Для знакочередующихся рядов допускаемая погрешность оценивается очень просто, и эта погрешность меньше абсолютного значения первого из отброшенных членов ряда.

Пример 1.3. Вычислить $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,001.$

Решение. Разложим подынтегральную функцию в ряд Тейлора, используя формулы (3.3) – (3.8):

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots,$$

тогда

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx &= \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \right) dx = x \Big|_0^1 - \frac{x^3}{3! \cdot 3} \Big|_0^1 + \frac{x^5}{5! \cdot 5} \Big|_0^1 - \frac{x^7}{7! \cdot 7} \Big|_0^1 + \dots = \\ &= 1 - \frac{1}{3! \cdot 3} + \frac{1}{5! \cdot 5} - \frac{1}{7! \cdot 7} + \dots = 1 - \frac{1}{3! \cdot 3} + \frac{1}{5! \cdot 5} = 0,946. \end{aligned}$$

Здесь ограничиваемся тремя слагаемыми, так как четвертый член $\left| \frac{1}{7! \cdot 7} \right| = 0,00003 < \varepsilon = 0,001.$

1.2. Квадратурные формулы численного интегрирования

Более универсальными методами являются методы численного интегрирования, основанные на аппроксимации подынтегральной функции с помощью интерполяционных многочленов. В этом случае подынтегральная функция приближенно заменяется более простой (прямой или параболой), что позволяет заменить определенный интеграл интегральной суммой. В зависимости от способа ее вычисления получают разные методы численного интегрирования (методы прямоугольников, трапецией, парабол и др.).

Формула прямоугольников является простейшим методом, который непосредственно использует замену определенного интеграла интегральной суммой:

$$I = \int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x, \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}. \quad (1.9)$$

Принимая в качестве ξ_i значения левых или правых концов отрезков $[x_i, x_{i+1}]$, получим соответственно формулы левых или правых прямоугольников (рис.1.1).

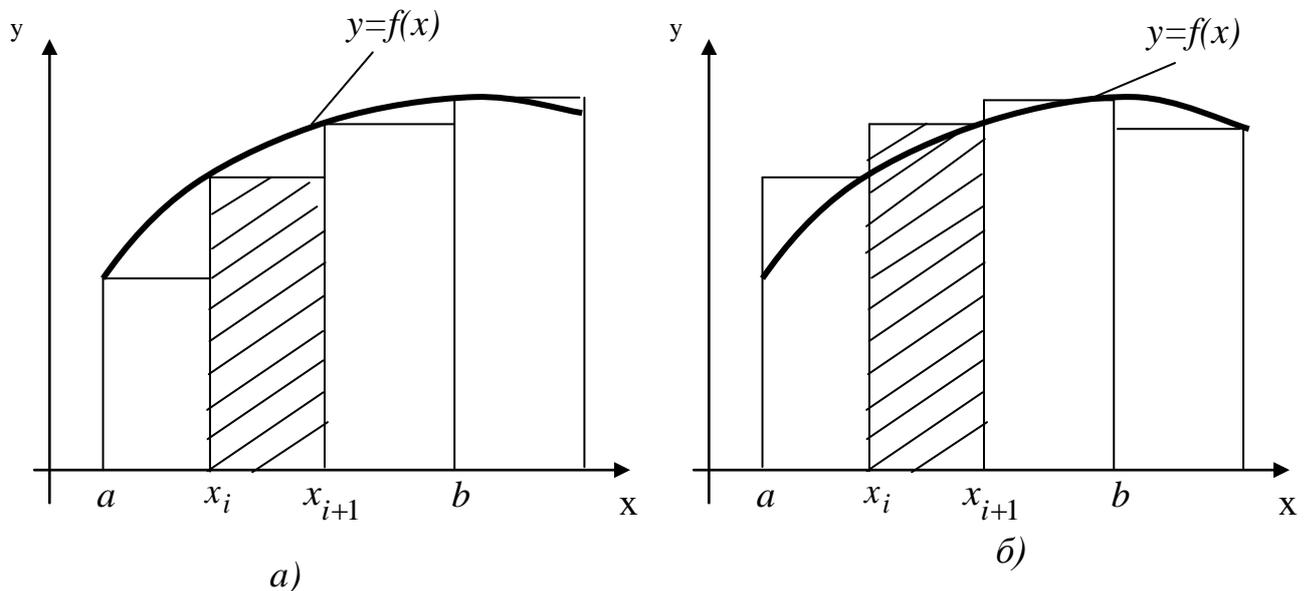


Рис. 1.1. Метод прямоугольников: а) левых; б) правых.

Часто используется формула прямоугольников, где в качестве ξ_i берут середины отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ (метод средних).

Предельную абсолютную погрешность метода можно оценить по формуле

$$R_n = |I - I_n| \leq \frac{\Delta x}{2} (b - a) M_1, \quad (1.10)$$

где $M_1 = \max_{[a,b]} |f'(x)|$.

Чем меньше интервал Δx , на которые разбивается отрезок $[a, b]$, тем точнее вычисляется интеграл.

Пример 1.4. Вычислить по формуле прямоугольников $\int_1^2 \sqrt{x} dx$, разбив отрезок интегрирования на 10 частей. Оценить погрешность вычисления интеграла.

Решение. Имеем $f(x) = \sqrt{x}$; $n = 10$; $\Delta x = (2 - 1)/10 = 0,1$. Точками деления интеграла будут: $x_0 = 1$, $x_1 = x_0 + \Delta x = 1,1$; $x_2 = 1,2, \dots, x_9 = 1,9$. Вычислим значения подынтегральной функции: $y_0 = \sqrt{x_0} = 1$; $y_1 = \sqrt{1,1} = 1,049, \dots$

Полученные значения поместим в таблицу 1.2.

Таблица 1.2

| | | | | | | | | | | | |
|-------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------------|
| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Σ |
| x_i | 1 | 1,1 | 1,2 | 1,3 | 1,4 | 1,5 | 1,6 | 1,7 | 1,8 | 1,9 | – |
| y_i | 1 | 1,049 | 1,095 | 1,140 | 1,183 | 1,225 | 1,265 | 1,304 | 1,342 | 1,378 | 11,9 81 |

Используя формулу прямоугольников (1.9), получим:

$$I_n = \Delta x \sum_{i=0}^9 y_i = 0,1 \cdot 11,981 = 1,198.$$

Оценим погрешность метода:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$\max_{[1;2]} f'(x) = f'(1) = 0,5; \quad R_n \leq \frac{0,1}{2} (2 - 1) \cdot 0,5 = 0,025.$$

Таким образом, $\int_1^2 \sqrt{x} dx \approx 1,198 \pm 0,025$.

Метод трапеций использует линейную интерполяцию, при которой реальная функция на каждом интервале $[x_i, x_{i+1}]$ заменяется отрезком прямой, проходящей через точки с координатами $(x_i; f(x_i)), (x_{i+1}, f(x_{i+1}))$. В этом случае площадь криволинейной трапеции складывается из площадей элементарных трапеций (рис. 1.2).

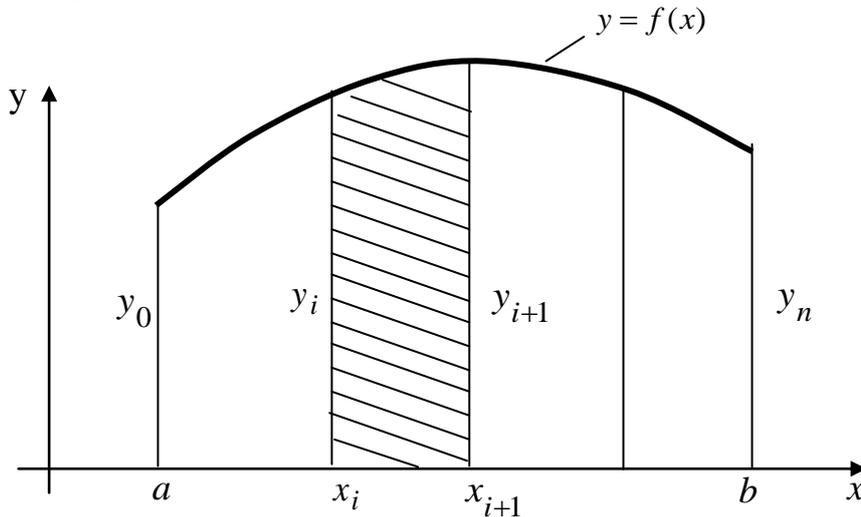


Рис. 1.2. Иллюстрация метода трапеций

Площадь каждой элементарной трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту:

$$\Delta S_i = \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \cdot \Delta x.$$

Складывая элементарные площади, получаем *формулу трапеций* для численного интегрирования

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \Delta x \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right). \quad (1.11)$$

Предельную абсолютную погрешность метода можно оценить по формуле

$$R_n = |I - I_n| \leq \frac{\Delta x^2}{12} (b - a) M_2, \quad (1.12)$$

где $M_2 = \max_{[a,b]} |f''(x)|$.

Пример 1.5. Вычислить по формуле трапеций интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, разбив отрезок интегрирования на 10 равных частей ($n=10$).

Решение. Имеем $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$;

$\Delta x = 0,1$, $x_0 = a = 0$; $x_1 = x_0 + \Delta x = 0,1, \dots, x_9 = 0,9$, $x_n = b = 1,0$.

Вычислим значения подынтегральной функции в точках разбиения (табл. 1.3)

Таблица 1.3

| | | | | | | | | | | | |
|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| x_i | 0,0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 |
| y_i | 1,00 | 0,99 | 0,96 | 0,91 | 0,86 | 0,80 | 0,73 | 0,67 | 0,60 | 0,55 | 0,50 |
| | 0 | 0 | 2 | 7 | 2 | 0 | 5 | 1 | 9 | 2 | 0 |

$$\sum_{n=1}^{i=9} y_1 = 7,0998$$

Используя формулу трапеций (3.11), получим

$$I_n = \Delta x \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right) = 0,1(0,5(1,000 + 0,500) + 7,0998) = 0,78498.$$

Оценим погрешность. Предварительно найдем производные:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}; \quad f''(x) = 2 \frac{8x^2 - 1}{(1+x^2)^3}; \quad \max_{[a,b]} |f''(x)| = |f''(0)| = 2;$$

$$\text{отсюда } R_n \leq \frac{0,1^2}{12} (1-0) \cdot 2 = 0,0016.$$

Следовательно, $I_n = 0,7850 \pm 0,0016$.

Метод Симпсона базируется на замене подынтегральной функции $f(x)$ квадратичной параболой, которая строится по трем точкам (крайние точки и средняя точка) (рис. 1.3) По этим точкам строится интерполяционная функция $\varphi(x)$ – полином второй степени.

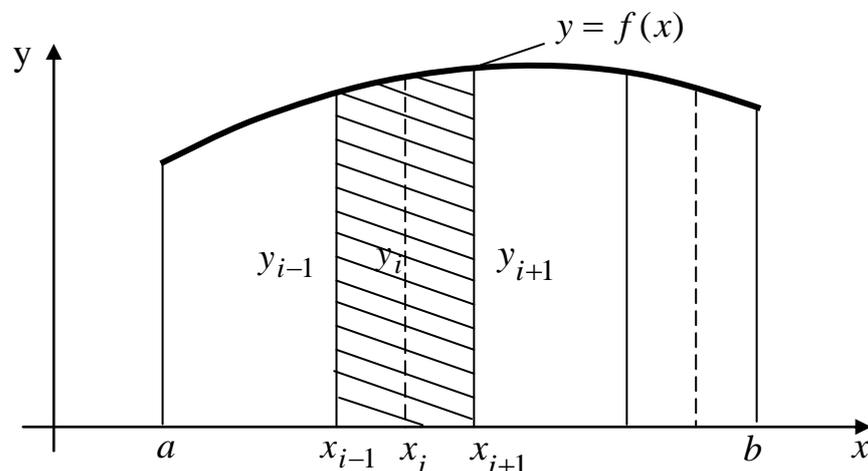


Рис. 1.3. Иллюстрация метода Симпсона

В качестве $\varphi(x)$ можно принять интерполяционный многочлен Лагранжа, проходящий через точки $(x_{i-1}; y_{i-1})$, (x_i, y_i) , (x_{i+1}, y_{i+1}) :

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & y_{i-1} \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})} + y_i \frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{(x-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})} + \\ & + y_{i+1} \frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Площадь под графиком функции $\varphi(x)$ на интервале $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ вычисляется с помощью определенного интеграла. Учитывая равенства $x_{i-1} - x_i = x_{i+1} - x_i = \Delta x$, получим

$$\begin{aligned} S_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi(x) dx = & \frac{1}{2\Delta x^2} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [y_{i-1}(x-x_i)(x-x_{i+1}) - 2y_i(x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) + \\ & + y_{i+1}(x-x_{i-1})(x-x_i)] dx = \frac{\Delta x}{3} (y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}). \end{aligned}$$

Проведя эти вычисления для всех элементарных отрезков $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ и просуммировав эти выражения, получим

$$\begin{aligned} I_n = \sum_{i=0}^n S_i = & \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + \\ & + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) \end{aligned} \quad (1.14)$$

Полученное соотношение называется *формулой Симпсона*. Предельную абсолютную погрешность метода можно оценить по формуле:

$$|I - I_n| \leq \frac{\Delta x^4}{180} (b-a)M, \quad (1.15)$$

где $M = \max_{[a,b]} |f^{(4)}(x)|$.

Если отыскание четвертой производной затруднительно или невозможно, то для оценки погрешности вычисления интеграла применяют *метод удвоения шага*. Для этого вычисляют значение интеграла при выбранном шаге Δx (пусть найденное значение интеграла I_1). Затем шаг удваивают и вновь проводят вычисления (пусть найденное значение есть I_2). Тогда оценить погрешность при использовании двойного просчета можно по соотношению

$$\frac{|I_n - I_{n/2}|}{15} \leq \varepsilon,$$

то есть при увеличении числа разбиений в два раза погрешность падает в 15 раз.

Пример 1.6. Вычислить по формуле Симпсона $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, разбив отрезок интегрирования на четыре части ($n=4$). Оценить погрешность методом двойного пересчета.

Решение. Имеем: $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$; $\Delta x = 0,25$;
 $x_0 = 0$; $x_1 = x_0 + \Delta x = 0,25$; ...; $x_n = x_4 = 1,0$.

Вычислим значения подынтегральной функции в точках разбиения (табл. 1.4).

Таблица 1.4

| | | | | | |
|-------|-----|--------|-----|--------|-----|
| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| x_i | 0 | 0,25 | 0,5 | 0,75 | 1 |
| y_i | 1,0 | 0,9412 | 0,8 | 0,6400 | 0,5 |

Подставляя в формулу (3.14), получим

$$I_n = \frac{0,25}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_n) =$$

$$= \frac{0,25}{3}(1 + 4 \cdot 0,9412 + 2 \cdot 0,8 + 4 \cdot 0,64 + 0,5) = 0,78533.$$

Теперь возьмем $\Delta x = 0,1$; $x_0 = 0$; $x_1 = 0,1$, ..., $x_n = x_{10} = 1,0$.

Значение подынтегральной функции приведены в таблице 3.5.

Таблица 3.5

| | | | | | | | | | | | |
|-------|-----|--------|--------|--------|--------|-----|--------|--------|--------|--------|-----|
| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| x_i | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 |
| y_i | 1,0 | 0,9900 | 0,9615 | 0,9174 | 0,8620 | 0,8 | 0,7353 | 0,6711 | 0,6097 | 0,5525 | 0,5 |

$$I_{n/2} = \frac{0,1}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + 2y_6 + 4y_7 + 2y_8 + 4y_9 + y_{10}) =$$

$$= \frac{0,1}{3}(1,0 + 0,5 + 4(0,9900 + 0,9174 + 0,8 + 0,6711 + 0,5525) +$$

$$+ 2(0,9615 + 0,8620 + 0,7353 + 0,6097)) = 0,78537.$$

Погрешность метода

$$R_n = \frac{|I_n - I_{n/2}|}{15} = \frac{|0,78533 - 0,78537|}{15} = 0,000003.$$

Таким образом, все пять знаков в интеграле должны быть точными. Для сравнения можно сопоставить приближенные значения интеграла с истинным значением:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} \approx 0,785398\dots$$

Индивидуальное задание студента

Вычислить интеграл с использованием указанной в задании квадратурной формулы, при этом на всем отрезке интегрирования первоначально использовать пять узлов. Уточнить значение интеграла и оценить погрешность результата методом двойного пересчета.

| № | Интеграл | Метод | Ответ |
|-----|--|----------------|----------------------------------|
| 1. | $\int_1^2 \left(2x^2 + \frac{2}{x^4} \right) dx,$ | метод трапеций | (Ответ: 5,2500.) |
| 2. | $\int_1^4 \sqrt{x} dx$ | метод Симпсона | (Ответ: 4,6667.) |
| 3. | $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$ | метод трапеций | (Ответ: 2,0000.) |
| 4. | $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx,$ | метод Симпсона | (Ответ: 1,3333.) |
| 5. | $\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x+1}}$ | метод трапеций | (Ответ: (2 - ln 2) = 1,3068.) |
| 6. | $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$ | метод Симпсона | (Ответ: 3,1416.) |
| 7. | $\int_0^5 \frac{dx}{2x + \sqrt{3x+1}}$ | метод трапеций | (Ответ: 0,9437.) |
| 8. | $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx$ | метод Симпсона | (Ответ: 8,3863.) |
| 9. | $\int_4^9 \frac{x dx}{(1+x^2)^3}$ | метод трапеций | (Ответ: 0,1875.) |
| 10. | $\int_0^9 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$ | метод Симпсона | (Ответ: 5,7726.) |

Пример выполнения задания 4. Вычислить $\int_1^4 \left(2x + \frac{3}{\sqrt{x}}\right) dx$ с

использованием квадратурной формулы, указанной в задании, первоначально взяв пять узлов. Уточнить значение интеграла и оценить погрешность результата методом двойного пересчета.

Решение. Определяем координаты узлов при $n=4$:
 $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{4} = 0,75$; $x_0 = a = 1,0$; $x_1 = x_0 + \Delta x = 1,75, \dots, x_n = b = 4,0$.

$$f(x) = 2x + \frac{3}{\sqrt{x}}.$$

Вычислим значения подынтегральной функции в узлах интегрирования

| | | | | | |
|-------|-----|---------|---------|---------|-----|
| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| x_i | 1,0 | 1,75 | 2,5 | 3,25 | 4,0 |
| y_i | 5,0 | 5,76779 | 6,89737 | 8,16410 | 9,5 |

20,82926

1. Вычислим интеграл методом трапеций:

$$I_n = \Delta x \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right) = 0,75(0,5(5,0 + 9,5) + 20,82926) = 21,05945.$$

Удвоим количество узлов: $n=8$; $\Delta x = \frac{4-1}{8} = 0,375$, $x_0 = a = 1,0$;

$$x_1 = x_0 + \Delta x = 1,375; \dots, x_n = x_8 = 4,0.$$

Вычислим значение функции в узлах интегрирования:

| | | | | | | | | | |
|-------|-----|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-----|
| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| x_i | 1,0 | 1,375 | 1,75 | 2,125 | 2,5 | 2,875 | 3,25 | 3,625 | 4,0 |
| y_i | 5,0 | 5,308 41 | 5,7677 9 | 6,307 98 | 6,897 37 | 7,519 30 | 8,164 10 | 8,825 67 | 9,5 |

48,79062

Вычислим

интеграл

$$I_{n/2} = 0,375(0,5(5,0 + 9,5) + 48,79062) = 21,01523.$$

Оценим погрешность результата

$$R_n = \frac{|I_n - I_{n/2}|}{15} = \frac{21,05945 - 21,01523}{15} = 0,0029$$

Таким образом, в последнем результате верными надо оставить два знака:

$$\int_1^4 \left(2x + \frac{3}{\sqrt{x}} \right) dx \approx 21,01.$$

2. Вычислим интеграл методом Симпсона.

Определим координаты узлов при $n=4$:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{4} = 0,75; \quad x_0 = a = 1,0; \quad x_1 = x_0 + \Delta x = 1,75, \dots, x_n = b = 4,0.$$

$$f(x) = 2x + \frac{3}{\sqrt{x}}.$$

Вычислим значения подынтегральной функции в узлах интегрирования

| | | | | | |
|-------|-----|---------|---------|---------|-----|
| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| x_i | 1,0 | 1,75 | 2,5 | 3,25 | 4,0 |
| y_i | 5,0 | 5,76779 | 6,89737 | 8,16410 | 9,5 |

Вычислим интеграл по формуле Симпсона (1.14):

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{0,75}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_n) = \\ &= \frac{0,75}{3} (5,0 + 4(5,76779 + 8,16410) + 2 \cdot 6,89737 + 9,5) = 21,00557. \end{aligned}$$

Удвоим количество узлов: $n=8$; $\Delta x = \frac{4-1}{8} = 0,375$, $x_0 = a = 1,0$;
 $x_1 = 1,375, \dots, x_n = x_8 = 4,0$. Вычислим значения $f(x)$ в узлах:

| | | | | | | | | | |
|-------|-----|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-----|
| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| x_i | 1,0 | 1,375 | 1,75 | 2,125 | 2,5 | 2,875 | 3,25 | 3,625 | 4,0 |
| y_i | 5,0 | 5,308 41 | 5,7677 9 | 6,307 98 | 6,897 37 | 7,519 30 | 8,164 10 | 8,825 67 | 9,5 |

Подставим значения y_i в формулу Симпсона:

$$\begin{aligned} I_{n/2} &= \frac{0,375}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + 2y_6 + 4y_7 + y_8) = \\ &= \frac{0,375}{3} (5,0 + 9,5 + 4(5,30841 + 6,30798 + 7,51930 + 8,82567) + \\ &\quad + 2(5,76779 + 6,89737 + 8,16410)) = 21,00049. \end{aligned}$$

Оценим погрешность результата:

$$R_n = \frac{|I_n - I_{n/2}|}{15} = \frac{|21,00557 - 21,00049|}{15} = 0,0003.$$

Таким образом, в качестве результата вычисления интеграла

$$\int_1^4 \left(2x + \frac{3}{\sqrt{x}} \right) dx \approx 21,000.$$

Библиографический список

1. Амосов, А. А. Вычислительные методы для инженеров [Текст] : учебное пособие для вузов / А. А. Амосов, Ю. А. Дубинский, Н.В. Копченова. - М. : Высшая школа, 1994. - 544 с..
2. Вержбицкий В.М. Численные методы математической физики [Электронный ресурс]: учебное пособие / В.М.Вержбицкий. - М: Директ.-Медиа, 2013. - 212 с. // Режим доступа -<http://biblioclub.ru/>
3. Волков Е.А. Численные методы [Текст]: учебное пособие / Е.А. Волков. - 4 –е изд., стер.– СПб.: Лань., 2007. - 256 с.
4. Киреев, В. И. Численные методы в примерах и задачах [Текст] : учебное пособие / В. И. Киреев, А. В. Пантелеев. - Изд. 4-е, испр. - Санкт-Петербург : Лань, 2015. - 448 с. : ил. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - Библиогр.: с. 441-443.
5. Численные методы [Текст] : учебное пособие : [для студентов 2 курса специальности 230700.62 «Прикладная информатика» при изучении дисциплины «Численные методы»] / В. А. Милых, Ю. А. Халин ; - Курск : ЮЗГУ, 2013. - 155 с.