МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_____________ О.Г. Локтионова
«15» 01 2021 г.

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

Методические указания к выполнению практических заданий
по дисциплине «Алгебра и геометрия»
для направления подготовки 09.03.02
«Информационные системы и технологии»

Курск 2021

УДК 51

Составители: Н.А. Конорева

Рецензент
кандидат физико-математических наук, доцент
кафедры высшей математики *Н.А. Хохлов*

Алгебра и геометрия: методические указания к выполнению практических заданий по дисциплине «Алгебра и геометрия» для направления подготовки 09.03.02 «Информационные системы и технологии» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Н.А. Конорева. – Курск, 2021. – 17 с.

Излагаются методические рекомендации по выполнению практических заданий. Содержатся краткие описания применяемых при решении задач математики методов, задания и вопросы для контроля знаний.

Методические указания соответствуют требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования для направления подготовки 09.03.02 «Информационные системы и технологии». Материал предназначен для бакалавров по направлению подготовки 09.03.02 «Информационные системы и технологии», а также будет полезен студентам всех других направлений подготовки, изучающих дисциплину «Алгебра и геометрия».

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 15.01.21 . Формат 60х84 1/16.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. .Тираж ____экз. Заказ 806. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

Цель работ: освоить необходимый математический аппарат, помогающий анализировать, моделировать и решать прикладные задачи.

Задания по работам

1. Тема «Основы теории множеств.»

Изобразить множества

$A=\{x|x\in R,-1\le x<4\}$ и $B=\{x|x\in R,2\le x\le 6\}$ на числовой прямой. Выполнить операции: $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $\overline{A}$, $A\times B$. Записать результат каждой операции с указанием характеристического свойства.

2. Тема «Поле комплексных чисел».

Выполнить действия: $\dfrac{(2-i)(-3+i)}{(1-i)(-1-2i)}$

3. Тема «Кольцо многочленов».

Разделить $x^4-2x^3+4x^2-6x+8$ на $x-1$.

4. Тема «Матрицы. Определители».

Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&1&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&-3&2\\1&-1&-2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}5&3\\2&0\\-1&1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix}$,

$F=\begin{pmatrix}3&-1&-6\end{pmatrix}$.

Для каких матриц определены операции сложения и умножения?

5. Тема «Системы линейных уравнений».

Решить СЛУ методом Крамера, матричным методом и методом Гаусса $\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3=6;\\4x_2-5x_3=-7;\\6x_1-7x_2+8x_3=16.\end{cases}$

6. Тема «Векторная алгебра».

Даны точки $A(-1-P_7;P_5-2)$ и $B(P_5-2;P_5+4)$. Найти:

а) точку $C(x_1;y_1)$ – середину отрезка AB;

б) точку $D(x_2;y_2)$, которая делит отрезок AB в отношении $\dfrac{P_9+1}{9-P_9}$.

7. Тема «Аналитическая геометрия».

Даны точки $A(-1;-P_3;2)$, $B(P_5;2;0)$ и $C\left(P_5\cdot(P_3+2);P_3^{\,2}+3P_3+4;P_8-2\cdot(P_3+1)\right)$. Образуют ли эти точки треугольник? Если да, то чему равна его площадь? Если нет, то запишите формулу для нахождения площади треугольника средствами векторной алгебры.

8. Тема «Линейные пространства и операторы».

Найдите собственные числа и собственные векторы матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Примеры выполнения заданий с кратким описанием применяемых методов

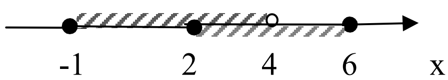
1. Тема «Основы теории множеств.»

Изобразить множества

$A = \{x | x \in R, -1 \le x < 4\}$ и $B = \{x | x \in R, 2 \le x \le 6\}$ на числовой прямой. Выполнить операции: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $\overline{A}$, $A \times B$. Записать результат каждой операции с указанием характеристического свойства.

Решение.

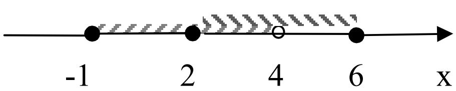
1) $\begin{matrix} A = \{x | x \in R, -1 \le x < 4\} = (-1;4] \\ B = \{x | x \in R,\ 2 \le x \le 6\} = [2;6] \end{matrix}$.



Если изобразить множества A и B на числовой прямой, то объединение $A \cup B$ есть часть оси, где имеется хотя бы одна штриховка, т.е.

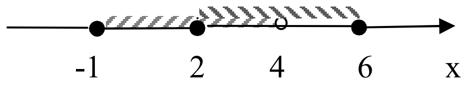
$$A \cup B = [-1;6] = \{x | x \in R, \quad -1 \le x \le 6\}.$$

2) Пересечение множеств $A \cap B$ есть часть оси, где есть двойная штриховка, т.е.



$$A \cap B = [2;4) = \{x | x \in R, \quad 2 \le x < 4\}.$$

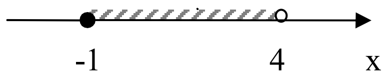
3) Разность $A \setminus B$ есть часть множества A, отмеченная лишь одной штриховкой, т.е.



$$A \setminus B = [-1;2) = \{x | x \in R, \quad -1 \le x < 2\}.$$

Точка $x = 2 \in B$ и поэтому $2 \notin A \setminus B$.

4) Найдем $\overline{A}$, считая универсальным множество всех действительных чисел, т.е. $\overline{A} = R \setminus A$.



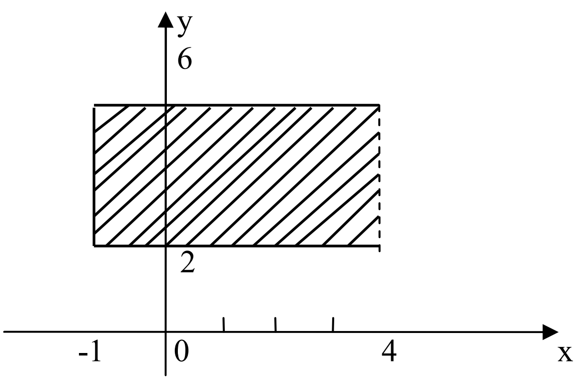
Дополнение множества A есть часть оси, где нет штриховки, т.е.

$$\overline{A} = (-\infty;-1) \cup [4;+\infty) = \{x | x \in R, \quad x < -1 \quad \text{или} \quad x \ge 4\}.$$

Точка $x = -1 \notin \overline{A}$, так как $x = -1 \in A$, точка $x = 4 \in A$, так как $x = 4 \notin \overline{A}$.

5) Множество $A = [-1;4)$ изобразим на оси Ox, множество $B = [2;6]$ на оси Oy. Тогда декартово произведение изобразится заштрихованным прямоугольником, но без его левой стороны, т.е.

$$A \times B = \{(x, y) | x, y \in R, \quad -1 \le x < 4 \quad и \quad 2 \le y \le 6\}.$$



2. Тема «Поле комплексных чисел».

Выполнить действия: $\dfrac{(2-i)(-3+i)}{(1-i)(-1-2i)} =$ [домножаем числитель и знаменатель дроби на числа, сопряженные обоим числам знаменателя] =

$$= \frac{(2-i)(-3+i)(1+i)(-1+2i)}{(1-i)(1+i)(-1-2i)(-1+2i)} = \frac{(-6+2i+3i-i^2)(-1+2i-i+2i^2)}{(1+1)(1+4)} =$$

$$=\frac{(-5+5i)(-3+i)}{2\cdot 5}=\frac{5(-1+i)(-3+i)}{2\cdot 5}=\frac{3-i-3i+i^2}{2}=\frac{2-4i}{2}=\underline{1-2i}.$$

3. Тема «Кольцо многочленов».

Разделить $x^4-2x^3+4x^2-6x+8$ на $x-1$.

Решение. Воспользуемся схемой Горнера. Нарисуем таблицу и выполним расчеты.

	1	-2	4	-6	8
1	1	$1\cdot1+(-2)=-1$	$1\cdot(-1)+4=3$	$1\cdot3+(-6)=-3$	$1\cdot(-3)+8=5$

Итак, $b_0=-3, b_1=3, b_2=-1, b_3=1;\quad r=5$, где b_i - коэффициенты неполного частного. Следовательно, $q(x)=1\cdot x^3+(-1)\cdot x^2+3x+(-3)$.

Ответ: $x^4-2x^3+4x^2-6x+8=(x^3-x^2+3x-3)(x-1)+5$.

4. Тема «Матрицы. Определители».

Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -3 & 2\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}2\\ -3\\ 4\end{pmatrix}$,

$F=\begin{pmatrix}3 & -1 & -6\end{pmatrix}$.

Для каких матриц определены операции сложения и умножения?

Решение.

Матрица *A* имеет размер 2х3, матрица *B* имеет размер 2х3, матрица *C* имеет размер 3х2, матрица *D* имеет размер 3х1, матрица *F* имеет размер 1х3.

A+*B* может быть найдена, так как матрицы *A* и *B* имеют одинаковый размер:

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & -3 & 2\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -5 & 5\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Среди матриц, данных выше, нет других, имеющих одинаковый размер, поэтому операция сложения определена только для *A* и *B*.

A·*B* и *B*·*A* нельзя найти (размерности матриц 2х3 и 2х3).

A·*C* можно найти (размерности матриц 2х<u>3</u> и <u>3</u>х2), полученная матрица будет иметь размер 2х2:

$$A\cdot C=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot5+(-2)\cdot2+3\cdot(-1) & 1\cdot3+(-2)\cdot0+3\cdot1\\ 0\cdot5+1\cdot2+4\cdot(-1) & 0\cdot3+1\cdot0+4\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 6\\ -2 & 4\end{pmatrix}.$$

$C{\cdot}A$ можно найти (размерности матриц 3х<u>2</u> и <u>2</u>х3), полученная матрица будет иметь размер 3х3:

$$C\cdot A=\begin{pmatrix}5&3\\2&0\\-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&1&4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}5\cdot1+3\cdot0&5\cdot(-2)+3\cdot1&5\cdot3+3\cdot4\\2\cdot1+0\cdot0&2\cdot(-2)+0\cdot1&2\cdot3+0\cdot4\\-1\cdot1+1\cdot0&-1\cdot(-2)+1\cdot1&-1\cdot3+1\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-7&27\\2&-4&6\\-1&3&1\end{pmatrix}.$$

$A{\cdot}D$ можно найти (размерности матриц 2х<u>3</u> и <u>3</u>х1), полученная матрица будет иметь размер 2х1:

$$A{\cdot}D=\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&1&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+6+12&0-3+16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20&13\end{pmatrix}.$$

$D{\cdot}A$ нельзя найти (размерности матриц 3х1 и 2х3).

$A{\cdot}F$ нельзя найти (размерности матриц 2х3 и 1х3).

$F{\cdot}A$ нельзя найти (размерности матриц 1х3 и 2х3).

$B{\cdot}C$ можно найти (размерности матриц 2х<u>3</u> и <u>3</u>х2),

полученная матрица будет иметь размер 2х2:

$$B\cdot C=\begin{pmatrix}3&-3&2\\1&-1&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5&3\\2&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15-6-2&9-0+2\\5-2+2&3-0-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&11\\5&1\end{pmatrix}.$$

$C{\cdot}B$ можно найти (размерности матриц 3х<u>2</u> и <u>2</u>х3), полученная матрица будет иметь размер 3х3:

$$C\cdot B=\begin{pmatrix}5&3\\2&0\\-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&-3&2\\1&-1&-2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}15+3&-15-3&10-6\\6+0&-6+0&4-0\\-3+1&3-1&-2-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18&-18&4\\6&-6&4\\-2&2&-4\end{pmatrix}.$$

$B{\cdot}D$ можно найти (размер матриц 2х<u>3</u> и <u>3</u>х1), полученная матрица будет иметь размер 2х1:

$$B\cdot D=\begin{pmatrix}3 & -3 & 2\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ -3\\ 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6+9+8 & 2+3-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}23 & -3\end{pmatrix}.$$

$D\cdot B$ нельзя найти (размер матриц 3х1 и 2х3).

$B\cdot F$ нельзя найти (размер матриц 2х3 и 1х3).

$F\cdot B$ нельзя найти (размер матриц 1х3 и 2х3).

$C\cdot D$ нельзя найти (размер матриц 3х2 и 3х1).

$D\cdot C$ нельзя найти (размерности матриц 3х1 и 3х2).

$C\cdot F$ нельзя найти (размер матриц 3х2 и 1х3).

$F\cdot C$ можно найти (размер матриц 1х<u>3</u> и <u>3</u>х2), полученная матрица будет иметь размер 1х2:

$$F\cdot C=\begin{pmatrix}3 & -1 & -6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3\cdot 5+(-1)\cdot 2+(-6)\cdot(-1) & 3\cdot 3+(-1)\cdot 0+(-6)\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19 & 3\end{pmatrix}.$$

$$C=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}2\\ -3\\ 4\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}3 & -1 & -6\end{pmatrix}.$$

$D\cdot F$ можно найти (размер матриц 3х<u>1</u> и <u>1</u>х3), полученная матрица будет иметь размер 3х3:

$$D\cdot F=\begin{pmatrix}2\\ -3\\ 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -1 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -2 & -12\\ -9 & 3 & 18\\ 12 & -4 & -24\end{pmatrix}.$$

$F\cdot D$ можно найти (размер матриц 1х3 и 3х1), полученная матрица будет иметь размер 1х1:

$$F\cdot D=\begin{pmatrix}3 & -1 & -6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ -3\\ 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6+3-24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-15\end{pmatrix}.$$

5. Тема «Системы линейных уравнений».

Решить СЛУ методом Крамера, матричным методом и методом Гаусса $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6; \\ 4x_2 - 5x_3 = -7; \\ 6x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 16. \end{cases}$

Метод Крамера

Пусть $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ – определитель квадратной системы, а Δ_j – определитель, полученный из определителя Δ заменой j-го столбца столбцом свободных членов. Тогда, если $\Delta \neq 0$, то СЛУ имеет единственное решение, определяемое по формулам Крамера: $x_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta}$, $j = 1,2,...,n$.

Решить СЛУ методом Крамера: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6; \\ 4x_2 - 5x_3 = -7; \\ 6x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 16. \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 6 & -7 & 8 \end{vmatrix} = 32 + 0 + 60 - (72 + 0 + 35) = 92 - 107 = -15;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -7 & 4 & -5 \\ 16 & -7 & 8 \end{vmatrix} = 192 + 160 + 147 - (192 + 112 + 210) = -15;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 0 & -7 & -5 \\ 6 & 16 & 8 \end{vmatrix} = -56 + 0 - 180 - (-126 + 0 - 80) = -236 + 206 = -30;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & -7 \\ 6 & -7 & 16 \end{vmatrix} = 64 + 0 + 84 - (144 + 0 + 49) = 148 - 193 = -45;$$

$$x_1 = \frac{-15}{-15} = 1; \quad x_2 = \frac{-30}{-15} = 2; \quad x_3 = \frac{-45}{-15} = 3.$$

Матричный метод

В матричной форме СЛУ имеет вид: $A \cdot X = B$. Умножив обе части этого уравнения слева на A^{-1}, получаем решение этого уравнения в матричной форме: $X = A^{-1} \cdot B$.

Решить СЛУ матричным методом $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6; \\ 4x_2 - 5x_3 = -7; \\ 6x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 16. \end{cases}$

Введём матрицы: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 6 & -7 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 16 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Найдём A^{-1}.

1. $\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 6 & -7 & 8 \end{vmatrix} = 32 + 0 + 60 - (72 + 0 + 35) = 92 - 107 = -15$.

2. $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -7 & 8 \end{vmatrix} = -3$; $\quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 6 & -7 \end{vmatrix} = -5$;

$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -30$; $\quad A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -2$;

$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 6 & -7 \end{vmatrix} = -24$; $\quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = 5$;

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -7 & 8 \end{vmatrix} = -5$; $\quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4$.

$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -10$;

3. $\begin{pmatrix} -3 & -30 & -24 \\ -5 & -10 & -5 \\ -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} -3 & -30 & -24 \\ -5 & -10 & -5 \\ -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -3 & -5 & -2 \\ -30 & -10 & 5 \\ -24 & -5 & 4 \end{pmatrix}$.

5. $A^{-1} = \frac{1}{-15} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -5 & -2 \\ -30 & -10 & 5 \\ -24 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 30 & 10 & -5 \\ 24 & 5 & -4 \end{pmatrix}$.

Вычислим X: $X = \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 30 & 10 & -5 \\ 24 & 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Метод Гаусса

Сущность его состоит в том, что посредством элементарных преобразований система приводится к треугольному (система имеет единственное решение) или трапецеидальному (система имеет бесконечное множество решений), из которого все решения системы усматриваются непосредственно.

Элементарные преобразования для СЛУ

1. Перестановка уравнений в системе.
2. Умножение любого уравнения системы на число, не равное нулю.
3. Прибавление к одному уравнению системы другого уравнения, умноженного на некоторое число.
4. Вычёркивание из системы уравнения вида: $0\cdot x_1+0\cdot x_2+\ldots+0\cdot x_n=0$.
5. Перенумерация неизвестных.

Решить СЛУ методом Гаусса $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=6; \\ 4x_2-5x_3=-7; \\ 6x_1-7x_2+8x_3=16. \end{cases}$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & -5 & -7 \\ 6 & -7 & 8 & 16 \end{pmatrix} \underset{3стр-6\cdot 1стр}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & -5 & -7 \\ 0 & 5 & -10 & -20 \end{pmatrix} \underset{3стр:5}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & -5 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\underset{2стр\leftrightarrow 3стр}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & -5 & -7 \end{pmatrix} \underset{3стр-4\cdot 2стр}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{pmatrix} \underset{3стр:3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Полученные преобразования характеризуют «прямой» ход метода Гаусса. «Обратный» ход метода Гаусса заключается в получении нулей выше главной диагонали.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{1стр-3\cdot 3стр \\ 1стр+2\cdot 3стр}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{1стр+2\cdot 2стр}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Отсюда получаем решение системы: $\begin{cases} x_1=1; \\ x_2=2; \\ x_3=3. \end{cases}$

6. Тема «Векторная алгебра».

Даны точки $A(-1-P_7;P_5-2)$ и $B(P_5-2;P_5+4)$. Найти:

а) точку $C(x_1;y_1)$ – середину отрезка AB;

б) точку $D(x_2;y_2)$, которая делит отрезок AB в отношении $\frac{P_9+1}{9-P_9}$.

Решение.

Пусть $P_5 = 1$, $P_7 = 3$, $P_9 = 2$. Значит $A(-4;-1)$, $B(-1;5)$.

а) $x_1 = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-4-1}{2} = -2{,}5$;

$y_1 = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{-1+5}{2} = 2$. Получили $C(-2{,}5;2)$.

б) Если $\lambda = \dfrac{P_9 + 1}{9 - P_9} = \dfrac{3}{8}$, то $x_2 = \dfrac{x_A + \lambda \cdot x_B}{1+\lambda} = \dfrac{-4 + \frac{3}{8}\cdot(-1)}{1+\frac{3}{8}} = -\dfrac{35}{11}$,

$$y_2 = \frac{y_A + \lambda \cdot y_B}{1+\lambda} = \frac{-1 + \frac{3}{8}\cdot 5}{1+\frac{3}{8}} = \frac{7}{11}.$$ Получили $D\left(-\dfrac{35}{11};\dfrac{7}{8}\right)$

7. Тема «Аналитическая геометрия».

Даны точки $A(-1;-P_3;2)$, $B(P_5;2;0)$ и $C\left(P_5\cdot(P_3+2);P_3^2+3P_3+4;P_8-2\cdot(P_3+1)\right)$. Образуют ли эти точки треугольник? Если да, то чему равна его площадь? Если нет, то запишите формулу для нахождения площади треугольника средствами векторной алгебры.

Пусть $P_3 = 2$, $P_4 = 1$, $P_5 = 1$, $P_7 = 3$, $P_8 = 5$.

Точки A, B, C образуют треугольник тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ неколлинеарны, то есть когда их векторное произведение не равно нулю.

Векторное произведение векторов рассчитывается по формуле:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_{AB} & y_{AB} & z_{AB} \\ x_{AC} & y_{AC} & z_{AC} \end{vmatrix}.$$

$\vec{i}$ $\vec{j}$ $\vec{k}$

Тогда $\overrightarrow{AB} = (1+1;2+2;0-2)$, $\overrightarrow{AC} = (4+1;14+2;-1-2)$.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & -2 \\ 5 & 16 & -3 \end{vmatrix} = 20\vec{i} - 4\vec{j} - 12\vec{k},$$ следовательно точки A, B, C образуют треугольник. Площадь этого треугольника можно рассчитать по формуле: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$, где $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{20^2+(-4)^2+12^2} = 4\sqrt{35}$.

Таким образом, $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}\cdot 4\sqrt{35} = 2\sqrt{35}$.

8. Тема «Линейные пространства и операторы».

Найдем собственные числа и собственные векторы матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

Составим характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$

$(1-\lambda)(5-\lambda)(1-\lambda) + 6 - 9(5-\lambda) - (1-\lambda) - (1-\lambda) = 0$, $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 36 = 0$, $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$.

Найдем координаты собственных векторов, соответствующих каждому найденному значению λ.

Если $\boldsymbol{x}_{(1)}=\{x_1,x_2,x_3\}$ – собственный вектор, соответствующий $\lambda_1=-2$, то

$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ - совместная, но неопределенная система. Ее решение можно записать в виде $\boldsymbol{x}_{(1)}=\{a,0,-a\}$, где а – любое число. В частности, если потребовать, чтобы $|\boldsymbol{x}_{(1)}|=1$, $\boldsymbol{x}_{(1)}=\{\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\}$.

Подставив в систему $\lambda_2=3$, получим систему для определения координат второго собственного вектора - $\boldsymbol{x}_{(2)}=\{y_1,y_2,y_3\}$:

$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$, откуда $\boldsymbol{x}_{(2)}=\{b,-b,b\}$ или, при условии $|\boldsymbol{x}_{(2)}|=1$, $\boldsymbol{x}_{(2)}=\{\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\}$.

Для $\lambda_3 = 6$ найдем собственный вектор $\boldsymbol{x}_{(3)}=\{z_1, z_2, z_3\}$:

$\begin{cases} -5z_1 + z_2 + 3z_3 = 0 \\ z_1 - z_2 + z_3 = 0 \\ 3z_1 + z_2 - 5z_3 = 0 \end{cases}$, $\boldsymbol{x}_{(3)}=\{c,2c,c\}$ или в нормированном варианте

$\boldsymbol{x}_{(3)} = \{\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\}$. Можно заметить, что $\boldsymbol{x}_{(1)}\boldsymbol{x}_{(2)} = ab - ab = 0$, $\boldsymbol{x}_{(1)}\boldsymbol{x}_{(3)} = ac - ac = 0$, $\boldsymbol{x}_{(2)}\boldsymbol{x}_{(3)} = bc - 2bc + bc = 0$. Таким образом, собственные векторы этой матрицы попарно ортогональны.

Контрольные вопросы

1. Дать определения операций сложения, умножения матриц, умножения матрицы на число.

2. Каким условиям должны удовлетворять размеры матриц при сложении, умножении?

3. В чём заключаются свойства алгебраических операций: коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность? Какие из них выполняются для матриц при сложении, умножении, а какие нет?

4. Дать общее определение определителя квадратной матрицы.

5. В чём заключается правило треугольников?

6. Перечислить свойства определителей.

7. Что такое единичная матрица, каковы её свойства?

8. Что такое алгебраическое дополнение элемента матрицы?

9. Что такое обратная матрица? Для каких матриц она определена?

10. Сформулировать теорему о существовании и единственности обратной матрицы.

11. Какие системы называются эквивалентными?

12. Какие системы называются совместными, несовместными, определёнными, неопределёнными, однородными, неоднородными?

13. Как записать и решить систему в матричной форме?

14. Что такое ранг матрицы? Сформулировать теорему Кронекера-Капелли.

15. Написать формулы Крамера.

16. Что такое элементарные преобразования матрицы?

17. В чем заключается метод Гаусса для решения систем линейных уравнений?

18. Какими свойствами обладают решения однородной системы линейных уравнений?

19. Может ли однородная система линейных уравнений быть несовместной? При каком условии она имеет более одного решения?

20. Векторные и скалярные величины. Определения направленного отрезка, вектора. Линейные операции над векторами в геометрической форме (сумма, разность, произведение вектора на число) и их свойства.

21. Определения коллинеарных, ортогональных и компланарных векторов. Необходимые и достаточные условия коллинеарности, ортогональности и компланарности векторов (в векторной и координатной формах.

22. Декартовы координаты на прямой, на плоскости и в пространстве (декартова система координат, разложение вектора по базису системы координат, координаты точек). Доказать соотношения между координатами вектора и координатами точек «начала» и «конца» вектора.

23. Прямоугольные проекции вектора на ось и их свойства.

24. Выражение модуля (длины) и направляющих косинусов вектора через декартовы координаты вектора.

25. Скалярное произведение векторов и его свойства. Необходимое и достаточное условие ортогональности векторов.

26. Выражение скалярного произведения векторов через декартовы координаты этих векторов. Нахождение модуля вектора и угла между векторами.

27. Ориентация тройки векторов в пространстве. Векторное произведение векторов и его свойства. Выражение векторного произведения векторов через декартовы координаты этих векторов. Вычисление площади параллелограмма и треугольника.

28. Смешанное произведение векторов и его свойства. Выражение смешанного произведения векторов через декартовы координаты этих векторов. Вычисление объёма параллелепипеда и треугольной пирамиды.

29. Понятие об уравнении линии на плоскости.

30. Нормальный вектор прямой. Общее уравнение прямой на плоскости. Угол между прямыми на плоскости, условия параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости.

31. Уравнение прямой «с угловым коэффициентом» (уравнение прямой, разрешённое относительно координат). Угол между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности прямых (заданных уравнениями «с угловым коэффициентом»).

32. Направляющий вектор прямой. Каноническое и параметрические уравнения прямой на плоскости. Угол между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности прямых (заданных каноническими уравнениями).

33. Расстояние от точки до: прямой на плоскости; прямой в пространстве; плоскости в пространстве.

34. Понятие уравнения поверхности в пространстве.

35. Нормальный вектор плоскости. Общее уравнение плоскости в пространстве. Угол между плоскостями, условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.

36. Уравнение плоскости, проходящей через три точки, не принадлежащие одной прямой.

37. Уравнение прямой в пространстве: общее, каноническое, параметрические. Угол между прямыми в пространстве, условия параллельности и перпендикулярности прямых в пространстве (заданных каноническими уравнениям).

38. Уравнение прямой, проходящей через две заданные, различные точки (на плоскости; в пространстве).

39. Угол между прямой и плоскостью в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Ильин В.А., Куркина А.В. Высшая математика [Текст]: учебник. -М.: Проспект, 2011. -608 с.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия [Текст]: учебник. -М.: Физматлит, 2009.-224 с.
3. Сборник задач по математике для втузов. Ч.1 [Текст] / Под ред. А.В.Ефимова и А.С.Поспелова -М.: Физматлит. 2009. -288 с.

4. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии [Текст]: учебное пособие / Д. В. Клетеник. - 17-е изд. - СПб. : Профессия, 2010. -224 с.
5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра [Текст]: учебник. -М.: Наука, 1984. -294с.
6. Матрицы. Определители. Системы линейных уравнений [Электронный ресурс]: индивидуальные задания к модулю / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Бойцова Е.А., Шевцова Т.В. − Курск: ЮЗГУ, 2016. -26 с.
7. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия [Электронный ресурс]: методические указания по выполнению М-2 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Бойков А.В. –Курск: ЮЗГУ, 2014. -30с.
8. Векторная алгебра и аналитическая геометрия [Электронный ресурс]: методические указания по выполнению М-2 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Бредихина О.А., Шеставина С.В. –Курск: ЮЗГУ, 2013. -18 с.