ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Курский государственный технический университет

Кафедра городского строительства, хозяйства и
строительной механики

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И САПР ОБЪЕКТОВ СТРОИТЕЛЬСТВА

методические указания по выполнению лабораторных работ
для студентов специальности 270105 (290500)

Курск -2009

Составитель: К.Е. Никитин

УДК 624.011

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент кафедры «Городское строительство, хозяйство и строительная механика» *А.В. Масалов*

Численные методы и САПР объектов строительства [Текст]: Методические указания по выполнению лабораторных работ для студентов специальности 270105 (290500) / сост.: К.Е. Никитин; Курск. гос. техн. ун-т. Курс, 2009. 39 с.: Ил. 33. Библиогр.: с.39.

В методических указаниях описан порядок выполнения лабораторных работ по курсу «Численные методы и САПР объектов строительства».

Методические указания соответствуют требованиям программы, одобренной методической комиссией по направлению 270100 (653500) «Строительство» специальности 270105 (290500) «Городское строительство и хозяйство».

Предназначены для студентов специальности 270105 (290500) «Городское строительство и хозяйство» дневной и заочной формы обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . Формат 60x84 1/16. Печать офсетная.
Усл.печ.л. . Уч.-изд.л. . Тираж 40 экз. Заказ .Бесплатно.
Курский государственный технический университет.
Издательско-полиграфический центр Курского государственного технического университета. 305040, г.Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1. ОСНОВЫ РАБОТЫ С СИСТЕМОЙ MAPLE.

Система для инженерных и научных расчетов Maple - разработка канадской фирмы MapleSoft (www.maplesoft.com), созданной при университете г.Ватерлоо. Это одна из ведущих систем подобного рода (Maple, MathCAD, MatLAB, Mathematica), позволяющая производить вычисления в численном виде и при необходимости осуществлять преобразования, вывод формул в общем (символьном, аналитическом) виде. Кроме того, в Maple имеется огромное количество встроенных алгоритмов, позволяющих вести вычисления с использованием численных методов.

1.1 Основные действия с файлами Maple.

Цель первой лабораторной работы – познакомится с базовыми возможностями этой системы, применяемыми при проведении простейших инженерных расчетов по готовым формулам. Научиться приводить расчетный файл к оформленному, готовому для печати виду.

Создание нового файла в Maple осуществляется нажатием на кнопку на панели инструментов  или через меню: File>New>Worksheet mode. При этом в настройках программы (меню Tools>Option…, закладка Interface) в пункте «Default format for new worksheets» должен быть выбран вариант «Worksheet».

Задание: создать новый файл.

Открытие файла осуществляется при помощи кнопки  или через меню: File>Open…

Задание: открыть файл «Характеристики сечений при кручении.mw»

Сохранение файла осуществляется при помощи кнопки или через меню: File>Save (сохранить) или File>Save as…(сохранить как…).

Задание: сохранить файл «Характеристики сечений при кручении.mw» под именем «1.mw»

Выполнить расчет сформированного расчетного файла можно при помощи кнопки . Если выполняется повторный расчет, то перед ним рекомендуется стирать в памяти результаты предыдущего расчета кнопкой .

На экране исходные данные, формулы и результаты выделяются различными цветами. Исходные данные и формулы выделены черным цветом, результаты вычислений – синим.

Для окончательного оформления и распечатки расчетный файл может быть сохранен в формате текстового редактора Word. Для этого необходимо выбрать в меню: File>Export as… В открывшемся окне установить Files of type (тип файла): Rich Text Format (.rtf).

Задание: сохранить файл в формате Rich Text Format. Открыть сохраненный файл в Word.

Если в Maple одновременно открыто несколько документов, переключение между ними, удобно осуществлять при помощи закладок, расположенных сверху (рис.1). Закладка отображаемого в текущий момент на экране файла выделена синим цветом. При необходимости файл можно закрыть при помощи креста, расположенного на соответствующей закладке.

Закладки

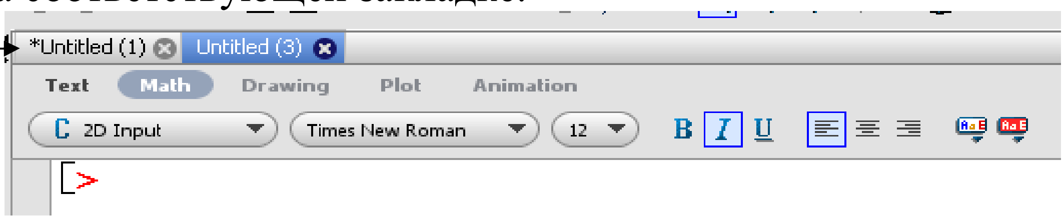


Рис. 1. Закладки файлов

Задание: переключиться при помощи закладки на файл созданный вначале. Показать результат преподавателю.

1.2 Структура расчетного файла Maple. Командные и текстовые строки

Файл состоит из набора командных строк (Execution Group). Командная строка начинается символом «>» красного цвета и ограничивается прямоугольной скобкой черного цвета слева.

> $(2+4) \cdot b + b$

$$7\,b \tag{1}$$

Рис. 2. Командная строка

Как правило, в каждой командной строке набирается по одной формуле (или выражению, команде) для осуществления вычислений. Однако, возможен и набор нескольких выражений в одной строке. В этом случае они разделяются друг от друга точкой с запятой («;»).

> $(2+4) \cdot b + b;\ 2 \cdot a + 4\,b + a$

$$7\,b$$

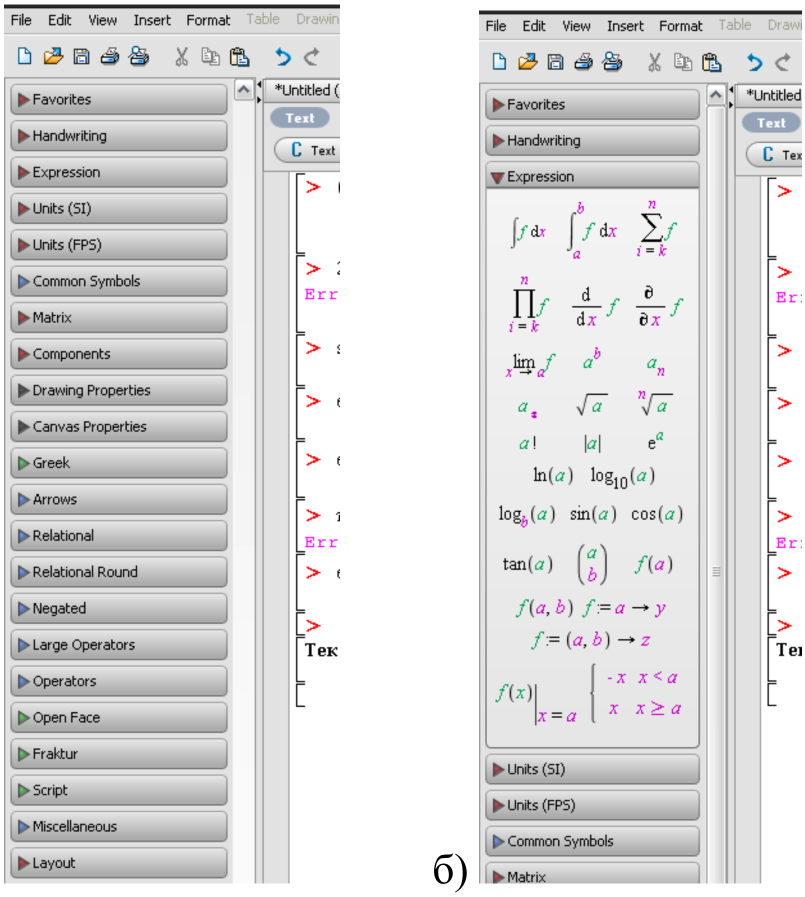
$$3\,a + 4\,b \tag{1}$$

Рис. 3. Командная строка с двумя выражениями

Для ввода специальных математических символов, обозначений и выражений можно использовать панели, расположенные в левой части окна программы (рис.4 а). Наиболее часто используемые математические выражения представлены на панели «Expression» (рис.4 б).

Для раскрытия/скрытия нужной панели необходимо сделать щелчок по кнопке с ее названием. В открытой панели можно выбрать нужное выражение или обозначение для вставки его в командную строку. Сиреневым цветом в выражениях обозначены параметры, которые необходимо заменить своим выражением или обозначением. После замены они приобретают нормальный, черный цвет. Для перехода от одного параметра к другому удобно использовать клавишу Tab.

После ввода выражения(ний) и нажатия клавиши Enter на клавиатуре система анализирует командную строку и пытается вычислить ее. Результат отображается синим цветом если строка правильно воспринята системой (см. рис. выше). Если система не смогла правильно воспринять выражение(ния), в строке результата появится сообщение с ошибкой сиреневого цвета и исходное выражение с выделением части, не воспринятой системой (рис.5).



а) б)

Рис. 4. Панели для ввода математических обозначений, символов и, выражений.

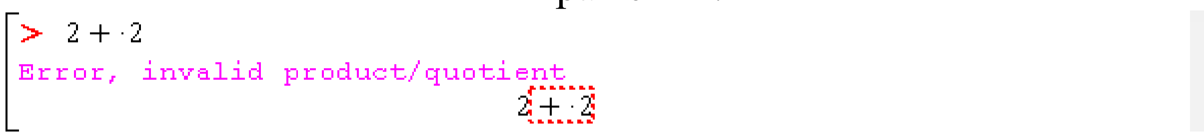


Рис. 5. Командная строка с ошибкой в исходном выражении (недопустимо применять после знака «+» знак умножения).

Правее результата вычисления появляется его номер, который назначается системой автоматически (см. рисунки 2, 3). В дальнейшем его можно использовать для ссылки на полученный результат вычислений.

Задание:

1. ввести «a + b + b» и нажать Enter. В результате должна отобразится строка синего цвета с результатом «a + 2 b».

2. ввести «a*+b+b» и нажать Enter. В результате должна отобразится строка с ошибкой.

Для создания комментариев, пояснений к проводимым расчетам в Maple предусмотрены специальные текстовые блоки. Они отличаются от командных строк отсутствием символа «>» (рис. 6).

Рис. 6. Текстовый блок

Для создания текстового блока необходимо нажать кнопку в виде буквы «T» на панели инструментов или клавиши Ctrl+T для преобразования текущей строки в текстовую. В текстовой строке можно использовать кнопки для выравнивания текста в строке, настройки вида, размера шрифта на панели инструментов.

В текстовых строках можно набирать и сложные математические выражения, но они не будут вычисляться так, как это происходит в командных строках. Для переключения на ввод математических выражений в текстовой строке служит кнопка «Math» расположенная на панели инструментов или сочетание клавиш Ctrl+R. Для продолжения ввода текста после математического выражения необходимо нажать кнопку «Text» на панели инструментов или клавиши Ctrl+T.

Задание: ввести в строке текст: «Формула: $\frac{a}{b}$», в котором присутствует математическое выражение $\frac{a}{b}$.

В процессе ввода командных строк новые строки для ввода появляются автоматически после нажатия клавиши «Enter». Однако иногда возникает необходимость вставить строку посередине уже существующих строк. Для этого необходимо установить курсор на соседнюю строку и для вставки пустой строки выше нее нажать сочетание клавиш Ctrl+K, ниже - Ctrl+J.

Для удаления строки используется сочетание клавиш Ctrl+Delete.

Задание: вставить две пустых строки ниже и выше текстовой строки. Затем удалить одну пустую строку выше.

1.3 Основные элементы математических выражений в Maple

Базовые элементы выражений:

1. **Число** (number) – может быть целым или дробным. Десятичные дроби записываются с разделителем–**точкой**, а не запятой! Т.е. две целых четыре десятых записывается как «2.4», а не «2,4».

Задание: ввести выражение 1,5+0,5. Вычислить результат.

2. **Неизвестная величина** (name)– может быть одной буквой

или набором букв (словом). В обозначении неизвестной величины могут присутствовать цифры. Могут быть использованы буквы русского алфавита, греческие буквы. Допускаются обозначения с нижним индексом.

Примеры написания обозначений неизвестных величин: «A», «Var», «K23», «Парам», «φ1», «σ_1».

Для ввода нижнего индекса необходимо после ввода основных символов нажать на клавиатуре Shift + «-» (символ «_»). При этом курсор опускается ниже основного уровня строки. После ввода содержимого индекса, для возврата на основной уровень строки необходимо сдвинуть курсор клавишей «стрелка вправо» на клавиатуре. Так, для ввода обозначения «A_1» необходимо нажать на клавиатуре: «A», Shift + «-», «1», «стрелка вправо».

Для ввода греческих букв можно использовать панель «Greek», расположенную в левой части окна программы (рис. 7).

При вводе неизвестных величин следует иметь ввиду:

1. Maple различает регистр букв (большие/малые буквы). Т.е. неизвестные величины, записанные как «a» и «A» воспринимаются Maple по-разному.

2. Некоторые обозначения используются системой для своих целей и их нельзя использовать в качестве неизвестных. Например, это обозначения «D», «γ», «I», «π». Обозначение «D» в Maple используется в качестве символа дифференциального оператора, «γ» – в качестве константы Эйлера (число 0.5772157...), «I»обозначает мнимое число i в комплексных числах, «π» - число пи (число 3.14…). Нельзя так же использовать в качестве обозначений неизвестных величин названия стандартных математических функций – sin, cos и т.д.

3. В выражениях могут использоваться обозначения с нижним индексом, но в расчетах нельзя использовать одновременно одно и то же обозначение с индексом и без него, например «A» и «A_1».

Однако, при необходимости, можно обойти вышеперечисленные ограничения, используя возможность, описанную ниже.

В Maple имеется возможность формирования сложных и нестандартных обозначений неизвестных величин. Например, можно записать и использовать в качестве неизвестной величины обозначение: $\left[\overset{\Rightarrow}{\Psi}{}^{\sqrt{\text{м}}}_{\text{ч}\odot\text{м}}\right]$, или $d\underset{\curvearrowright}{\forall}x$ и т.п. Для этого необходимо из символов, вводимых с клавиатуры или при помощи панелей, расположенных в левой части окна (рис.4) сформировать нужное по внешнему виду обозначение. При этом можно использовать верхний и нижний индексы, надстрочные и подстрочные выражения, которые вводятся сочетаниями клавиш «Shift + 6», «Shift + -», «Ctrl + Shift + ‘», «Ctrl + ‘» соответственно.

Затем, необходимо выделить сформированное обозначение, и, нажав правую кнопку мыши, выбрать пункт «2D Math > Convert to > Atomic Indetifier». В результате этот набор символов будет восприниматься Maple как нечто единое целое. В любом выражении, где это сложное обозначение используется, необходимо набирать его точно таким же образом, как было описано выше, или скопировать и вставить в текст уже имеющееся, набранное обозначение.

Применяя такой способ ввода обозначений, можно обойти ограничение на использование обозначений с индексами, когда это не допускается (о чем говорилось выше), использовать обозначения «D», «γ», «I», «π», «sin». В этих случаях, введя обозначение, необходимо так же его выделить и включить пункт Atomic Indetifier в меню.

Задание: ввести в отдельных строках следующие обозначения неизвестных величин:

$\boldsymbol{\lambda}_{\textbf{средн}}$

$[\,\overset{\Rightarrow}{d}\,]$

$\cos^{\eta}$

3. **Константа** – это число, имеющее буквенное обозначение. Наиболее часто используемые в расчетах константы - π, **e**. Для ввода констант можно использовать панель «Common Symbol» в левой части окна программы (рис. 7).

4. **Математические операторы**.

Основные из них – это операторы сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень. Первые четыре представлены знаками «+», «-», «*», «/» и вводятся с клавиатуры соответствующими кнопками или соответствующими кнопками на панели «Common Symbol» в левой части окна программы (рис.7).

Рис. 7. Панель «Greek» и «Common Symbol».

Кроме того, вместо знака умножения можно набирать пробел. Т.е. выражения, записанные как: «4*5» и «4 5» для Maple одно и тоже.

При нажатии на кнопку «/» на клавиатуре операция деления всегда отображается в виде дроби. Для отображения этой операции в одну строку можно использовать символ «/» на панели «Common Symbol» (рис. 7).

Для ввода степени используется верхний индекс, который включается нажатием на клавиши Shift + 6 (символ «^»). После ввода значения степени на основной уровень текста можно вернуться, сдвинув курсор клавишей «стрелка вправо» на клавиатуре. Так же операцию возведения в степень можно ввести при помощи панели «Expression» (рис. 4 б).

5. **Функция (function)** – это такие операции, как извлечение корня, логарифма, производной, вычисление синуса, косинуса и т.п. Наиболее распространенные функции можно ввести при помощи панели выражений «Expression» (рис. 4 б).

Практически все функции записываются в виде:

НазваниеФункции(параметр)

Скобки здесь обязательны.

Пример: «sin(x)», где sin – название функции, x – параметр.

В литературе часто принято записывать функции без скобок. Например, «sin φ», «ln 10». Однако таким образом записывать выражения в Maple нельзя. Необходимо их переписывать как «sin(φ)», «ln(10)».

Основные функции представлены на панели «Expression» в левой части окна программы (рис. 4 б).

Основные математические функций в Maple записываются как:

sin(x) – синус угла;
cos(x) – косинус угла;
tan(x) – тангенс угла;
cot(x) – котангенс угла;
arcsin(x) – арксинус;
arccos(x) – арккосинус;
arctan(x) – арктангенс;
arccot(x) – арккотангенс;
ln(x) – натуральный логарифм;
log10(x) – десятичный логарифм;
log[b](x) - логарифм с основанием b;
exp(x) – экспоненциальная функция (можно набрать при помощи панели «Expression» в виде «e^x».

Более сложные выражения в Maple формируются на основе четырех базовых элементов – чисел, обозначений неизвестных величин, констант и математических операторов. Основные выражения Maple это:

1. **Формула** (algebraic expression) – набор операций, таких как сложение, вычитание, деление, умножение, возведение в степень, над цифрами, неизвестными величинами, константами, и функциями. Пример: sin(π x)+2.345 (b+c).

После ввода формулы в командную строку и нажатия кнопки «Enter», Maple пытается вычислить или упростить ее.

Задание: записать выражение: «$\frac{\sqrt{\sin(\alpha^6)}}{\log_5(\omega_f)} \cdot \arctan(A/(2\cdot[\sigma]))$***»***

2. **Уравнение** (equation)– математическое выражение, в котором имеется знак равенства. Например: «a + b = 10 c – 25», «x+y+6=0».

После ввода уравнения в командную строку и нажатия кнопки «Enter», Maple пытается вычислить или упростить выражения, записанные в левой и правой частях от знака равно.

3. **Последовательность** (sequence) – числа, неизвестные вели-

чины, константы, функции, формулы, уравнения, записанные друг за другом через запятую.

Пример: «a, b, 10, 23+d».

4. **Список** (list) – последовательность, записанная в квадратных скобках. Например: «[a, c, d+1]». Часто используется для разделения нескольких последовательностей, идущих друг за другом другом.

5. **Множество** (set) – последовательность, записанная в фигурных скобках. Назначение множества – описать набор чисел, величин, функций, математических выражений, формул. Пример множества: «{c, d+4, 67}».В множествах порядок следования выражений Maple может менять самопроизвольно. Для Maple во множествах воспринимает только содержимое. Последовательность перечисления не воспринимается в отличие от списков.

Задание: записать список чисел [1, 5, 3, 5] и множество { 1, 5, 3, 5} в отдельных строках. Сравнить результаты вычисления этих строк.

6. **Матрица, вектор** – набор чисел, неизвестных величин, констант, функций, формул, записанных в форме матрицы или вектора. Создать матрицу или вектор можно при помощи панели «Matrix» (рис.8).

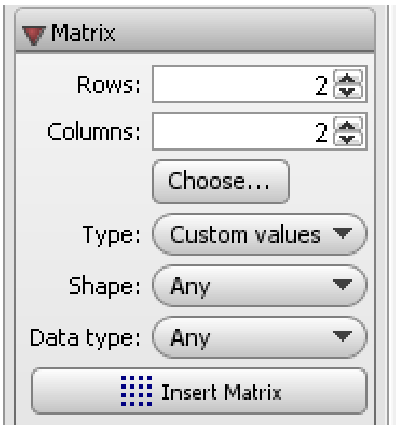


Рис.8 Панель «Matrix».

Указать размерность создаваемой матрицы можно численно, при помощи пунктов «Rows» (кол-во строк), «Columns» (кол-во столбцов), или в графическом виде, нажав и удерживая кнопку «Choose…». Для создания вектора необходимо указать число строк или столбцов равным единице (вектор – частный случай матрицы).

Вставка матрицы в текст осуществляется кнопкой «Insert Matrix» («Insert Vector» для векторов). В результате, в строке появляется шаблон матрицы или вектора. Выделенные сиреневым цветом обозначения необходимо заменить своими значениями. Для перехода от одного элемента к другому можно использовать клавишу «Tab».

Задание: записать в отдельных строках матрицу $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ ***и вектор*** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$**.**

7. **Процедура** – некоторая команда, записанная в виде:
название команды(последовательность параметров команды), выполняющая определенное действие над математическими выражениями. Каким образом будет работать команда, и к какому (каким) выражению она будет применяться, задается в последовательности параметров команды. Для каждой процедуры последовательность своя. Например, процедура с названием «solve», решающая уравнения, для решения уравнения «2 x^2+10=0» будет записываться как: «solve(2 x^2+10=0, x)». В последовательности параметров этой команды первым записывается решаемое уравнение «2 x^2+10=0», вторым – искомая величина «x».

Задание: ввести в командной строке выражение «solve(2 x^2+10=0, x)»

Вывод результатов в виде десятичных дробей

Система Maple при вычислении математических выражений с целью сохранить высокую точность расчетов обычно не сокращает дроби и не вычисляет значения корней, тригонометрических, логарифмических и др. функций. Однако все практические расчеты обычно заканчиваются результатом, имеющим вид числа. Для получения результата в виде обычных десятичных чисел, в Maple используется специальная процедура «evalf», записываемая в виде: evalf(математическое выражение).

Пример: «evalf(25/35)» выводит результат в виде «0.7142857142857», в то время как если просто ввести выражение «25/35», будет выведено значение: «25/35».

Задание: получить численный результат вычисления формул: sin(π/3), $\sqrt{6}$***, 36/5+8.***

1.4 Использование результатов из командных строк в дальнейших вычислениях

Для этого в Maple предусмотрены следующие возможности:

1. сослаться на полученный результат по его номеру. Необходимо нажать на клавиатуре клавиши Crtl+L и ввести номер строки, содержащий нужный результат. Номера отображаются правее результата в скобках.

Пример: результат вычислений под номером 12 используется в командной строке, изображенной на рис. 9

```
> 4 + 6 + 8
                              18                              (12)
> (12) + 2
                              20                              (13)
```

Рис. 9 Использование результатов вычислений ссылкой на строку.

2. Можно запомнить результат под любым именем (присвоить имени). В этом случае необходимо использовать оператор присвоения «:=» в строке, результат вычисления которой планируется в дальнейшем использовать. Слева от оператора присвоения пишется имя, которому присваивается выражение, справа – вычисляемое выражение.

Например, если записать «a := 10+30», то под именем «a» запомнится результат вычисления выражения «10+30», т.е. 40.

Следует различать выражение с присвоением и уравнение. Так, выражения «a:=10» и «a=10» воспринимаются системой поразному.

Для использования результата, сохраненного под именем, необходимо указать его в вычисляемом выражении.

Например, если записать: «a := 10+30», то под именем «a» сохранится результат 40. Затем, записав выражение «a + 10», получим 50,где вместо «a» будет подставлено число 40.

Проверить, что было сохранено под тем или иным именем можно, записав его в новой командной строке и нажав «Enter».

Задание: 1. ввести выражение «10-5*5.8». Появится результат вычисления строки: «-19.0». В следующей командной строке сложить этот результат с числом «123», используя ссылку на номер строки.

2. ввести выражение «10-5*5.8», сохранив результат вычислений под именем «t». В следующей командной строке сложить этот результат с числом «123» используя имя «t» результата. Вывести в отдельной строке результат, сохраненный под именем «t».

1.5 Подстановка значений в математические выражения

При использовании присвоений результатов имени (см. выше), происходит автоматическая подстановки значений в выражения, где это имя встречается. Однако в этом случае нет возможности управлять этим процессом.

Поэтому более предпочтительным и управляемым способом подстановки значений в математические выражения является использование процедуры «subs», которая записывается в виде:
subs(равенство1, равенство2,…, ВычисляемоеВыражение)
Здесь *равенство1, равенство2,…*- последовательность равенств, в левой части которых записывается обозначение подставляемой величины, в правой – ее значение; *ВычисляемоеВыражение* – основное выражение, в которое осуществляется подстановка.
Пример: «subs(a=10, b=c+d, a*25-b)» – процедура подставляет в выражение a*25-b значения a и b, которые равны: a=10, b=c+d. В результате получаем «250-c-d».
Задание: в отдельной командной строке ввести уравнение «s=sin(x) (d-h)». В следующей командной строке при помощи команды subs подставить в это уравнение значения неизвестных: x=π/3, d=10, h=2.5

1.6 Создание графиков

Вставка пустого графика функции осуществляется пунктом в главном меню программы: Insert>Plot> 2D – для формул, зависящих от одной неизвестной величины и Insert>Plot>3D – для формул, зависящих от двух неизвестных. Если число неизвестных величин в функции более двух, вывод графика невозможен.

Для создания графика необходимо выделить математическое выражение, которое представлять собой функцию от одной или двух переменных (неизвестных величин), и «перетянуть» его на график, не отпуская левую клавишу мыши. При этом в математическом выражении не должно быть знака «=», т.е. выражение не должно быть уравнением. Для построения графика на основе уравнения необходимо выделить одну из его частей - расположенную левее или правее значка «=» и «перетянуть» ее на график.

Для правильного отображения графика необходимо отрегулировать границы изменения аргумента функции и ее значений. Для этого в случае построения 2D графика необходимо выделить его и нажав на нем правую кнопку мыши, выбрать пункт Axes>Properties…

В верхней части появившегося окна (рис.10), необходимо выбрать соответствующую ось (Horizontal Axis – горизонтальная ось, Vertical Axis – вертикальная ось). Отключить пункт «Use data extends» и в полях «Range min», «Range max» ввести начальные и конечные значения, отображаемые вдоль этой оси.

Для 3D графиков необходимо после нажатия правой кнопки мыши выбрать пункт Axes>Range… Окно настройки осей графика выглядит, как показано на рисунке 11. Настроить границы изменения значений по каждой оси можно выбрав соответствующий пункт под строкой «Default».

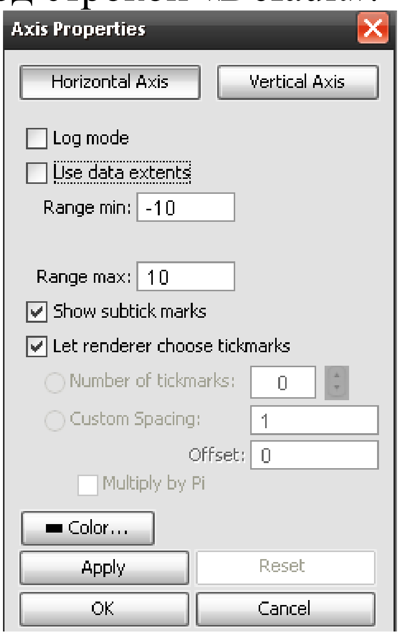


Рис. 10 Окно настройки осей 2D графика

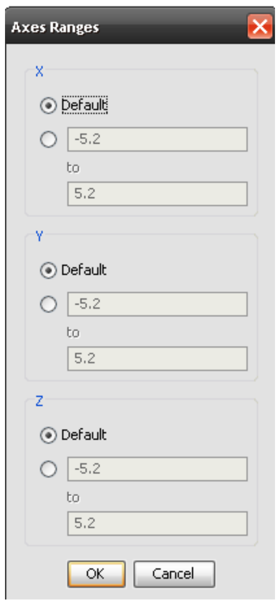


Рис. 11. Окно настройки осей 3D графика.

Задание: ввести выражение «sin(x) x+0.5» в командной строке. Вставить 2D график в строке ниже. Отобразить набранное выражение на графике. Установить границы отображения графика по горизонтальной оси от 0 до 2. Посмотреть на результат. Установить границы по вертикальной оси от -50 до 50.

1.7 Изменение внешнего вида файла с расчетом. Блоки документа

Деление файла на командные строки не позволяет оформить файл с расчетом так, как это можно сделать, например, в Word. Кроме того, в командных и текстовых строках присутствуют элементы, которые нельзя убрать, например, скобки, обозначающие границы строк, символы начала командной строки «>», исходное выражение в строках всегда выводится всегда вместе с результатом, даже если они совпадают.

Для оформления расчета в нужном пользователю виде, скрытия «лишних» деталей в Maple применяют блоки документа.

Блок документа – это абзац текста, который включает в себя выборочное содержимое нескольких командных строк и текстовых блоков. Блок документа отображается без скобок-границ и символов начала строки «>». Для каждой командной строки, входящей в блок документа можно выбрать, что должно отображаться на экране – исходное выражение или результат вычислений.

Для того, чтобы показать границы блоков документа необходимо включить в главном меню программы пункт View>Markers. В результате слева появляется пустой столбец, в котором треугольниками будут отмечаться границы блоков документа.

Задание: переключиться на файл «1.mw». Включить отображение границ блоков документа.

Для просмотра исходного содержания блока документа, т.е. командных строк и текстовых блоков из которых он был сформирован, используется пункт меню View>Expand Document Block. Он действует на блок, в котором установлен курсор или несколько блоков, если они предварительно выделены.

Для скрытия исходного содержания блока документа используется пункт меню View>Collapse Document Block.

Задание: установить курсор на блок:

«Момент инерции при кручении: $J_k := 0.1404 \cdot b^4 = 0.0002246\text{м}^4$**».**

Включить режим отображения содержимого блока документа. В результате это блок документа должен отобразится в виде набора составляющих его строк – см. рисунок 12.

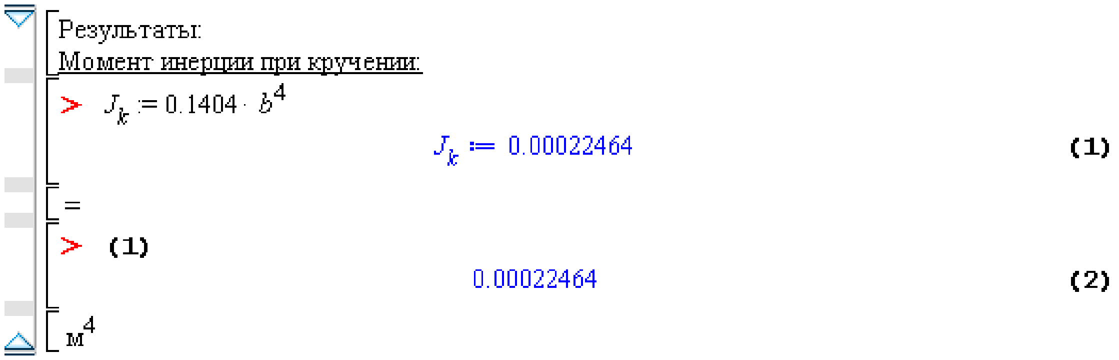


Рис. 12. Отображение содержимого блока документа

Как видно, исходная строка блока документа состоит из следующих составляющих: текстового блока «Результаты: Момент инерции при кручении:», исходного выражения $J_k := 0.1404 \cdot b^4$ ***из командной строки (1), текстового блока «=», результата*** 0.00022464 ***из командной строки (2) и текстового блока «м^4».***

Скрыть отображение составляющих блока документа.

Для каждой командной строки, входящей в блок документа можно выбрать что, будет отображаться: исходное выражение из командной строки или результат из нее. Для переключения между этими вариантами используется пункт меню View>Toggle Input/Output Display. Команда действует только на выражение, в котором установлен курсор.

Задание: установить курсор в выражение $J_k := 0.1404 \cdot b^4$***, которое является исходным выражением командной строки (и поэтому имеет черный цвет) и переключиться на отображение результата. В результате вместо нее должен отобразится результат вычисления формулы (синего цвета):*** $J_k := 0.0002246$ ***в отдельной строке (рис. 13).***

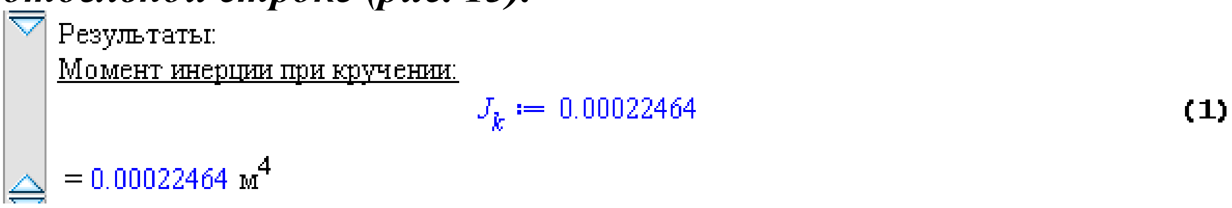


Рис.13 Отображение результата вычислений в отдельной строке.

При отображении результата из командной строки доступны два варианта: вывод результата в отдельной строке с номером справа, или вывод результата в общей с остальным текстом строке.

Для переключения между этими вариантами используется пункт меню View>Inline Document Output.

Задание: 1. поменять вариант отображения результата $J_k := 0.0002246$ ***в отдельной строке на вариант отображения результата в общей строке. В результате, это выражение должно объединиться с остальным текстом, входящем в блок документа (рис. 14).***

Рис. 14. Отображение результата вычислений в общей с остальным текстом строке.

2. Вернуть исходный вариант отображения $J_k := 0.0002246$***, включив отображение исходного выражения (черного цвета).***

Для создания блока документа необходимо выделить командные и текстовые строки, которые будут включены в него, и выбрать в меню пункт Format > Create Document block.

Затем можно настроить отображение составляющих блока документа нужным образом, используя пункты меню View>Toggle Input/Output Display, View>Inline Document Output, как было описано выше.

Для удаления блока документов служит команда Format > Remove Document block. Она действует на блок, в котором установлен курсор или выделенные блоки. При этом, входящие в блок командные строки и текстовые блоки не удаляются!

Задание: переключиться на другой файл. После командной строки «a + b + b» вставить текстовый блок и набрать текст: « - исходная формула». Создать блок документа из этих двух строк. Выбрать для командной строки «a + b + b» режим отображения исходного выражения. В результате должна отобразиться строка «a + b + b - исходная формула».

2. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2. АВТОМАТИЗАЦИЯ ПРОСТЕЙШИХ ИНЖЕНЕРНЫХ РАСЧЕТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СИСТЕМЫ MAPLE

Цель лабораторной работы – применение навыков работы с системой Maple, изученных на занятии №1 для автоматизации инженерных расчетов и оформления файла с расчетом для печати.

Задания для выполнения работы выдаются преподавателем. Номер варианта и номер строки таблицы с исходными данными так же назначается преподавателем.

Для каждого варианта необходимо выполнить следующие действия:

1. Записать формулы для определения усилий, перемещений, углов поворота, прогибов (в зависимости от варианта) в виде уравнений.
2. Записать в виде уравнений значения параметров, входящих в эти формулы, за исключением параметра, задающего положение рассматриваемого сечения (или точки) на поверхности оболочки (в зависимости от варианта это параметры α, z или α и ψ - смотри пояснения к формулам). Значения параметров взять в таблице соответствующего варианта из строки, указанной преподавателем.
3. Выполнить подстановку записанных параметров во все исходные формулы, используя процедуру subs.
4. Вычислить по всем полученным формулам значения усилий, перемещений, углов поворота, прогибов при $\alpha=\pi/4$, z=4, $\psi=\pi$ (в зависимости от варианта). Вычисления довести до числа.
5. Для вариантов №1-9 построить 2D графики изменения усилий от вершины к основанию (смотри пояснения к формулам). Для вариантов №10, 11 построить 3D графики изменения усилий по поверхности оболочки в зависимости от изменения параметра α от вершины к основанию (см. пояснения к формулам) и параметра ψ от 0 до 2π.
6. Оформить расчет с использованием блоков документа, добавив текстовые пояснения к формулам такие же, как в задании и разобранном ниже примере, и скрыв «лишние» детали вычислений.

Пример выполнения расчета (для одной формулы), приведен на рис. 15 и 16. На рисунке 15 изображен файл расчета в виде набора командных строк и текстовых блоков. В строке №1 введена исходная формула. В строках №2-4 – заданы значения параметров, строках №5-6 – формула с подставленными в нее значениями параметров. В строке №7 задано значение параметра α, а строке №8 – значение, вычисленное по формуле после подстановки в нее этого параметра. Далее создан график изменения усилия N в зависимости от параметра α (график выражения, полученного в строке №5).

3. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬСТВА, СВОДЯЩИХСЯ К СИСТЕМАМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

Цели работы:

1. Изучить и научиться практически применять метод простой итерации для решения задач, имеющих вид линейных алгебраических уравнений.
2. Овладеть другими методами решения задач, имеющих вид линейных алгебраических уравнений в системе Maple.
3. Ознакомится с возможностями применения элементов программирования при решении задач в системе Maple.

1. Решение задач, имеющих вид линейных алгебраических уравнений методом простой итерации

При решении методом простой итерации системы уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

из каждого уравнения этой системы выражают одну из неизвестных величин x_1, x_2 и x_3. В результате получается новая система уравнений, имеющая вид:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}} + \dfrac{b_1}{a_{11}}; \\ x_2 = \dfrac{-a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}} + \dfrac{b_2}{a_{22}}; \\ x_3 = \dfrac{-a_{31}x_1 - a_{23}x_2}{a_{33}} + \dfrac{b_3}{a_{33}}. \end{cases}$$

> $N = \frac{1}{2} \cdot p_z \cdot R \cdot \left(1 - \frac{sin^2(\alpha_1)}{sin^2(\alpha)}\right)$

$$N = \frac{p_z\, R\left(1 - \frac{\sin(\alpha_1)^2}{\sin(\alpha)^2}\right)}{2} \qquad (1)$$

Для

> $p_z = 10000$

$$p_z = 10000 \qquad (2)$$

> $R = 80$

$$R = 80 \qquad (3)$$

и

> $\alpha_1 = \frac{\pi}{20}$

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{20} \qquad (4)$$

получим:

> $subs(\mathbf{(2)}, \mathbf{(3)}, \mathbf{(4)}, \mathbf{(1)})$

$$N = 400000 - \frac{400000 \sin\left(\frac{\pi}{20}\right)^2}{\sin(\alpha)^2} \qquad (5)$$

или

> $evalf(\mathbf{(5)})$

$$N = 400000. - \frac{9788.696748}{\sin(\alpha)^2} \qquad (6)$$

В точке с

> $\alpha = \frac{\pi}{4}$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \qquad (7)$$

усилия равны:

> $evalf(subs(\mathbf{(7)}, \mathbf{(6)}))$

$$N = 380422.6065 \qquad (8)$$

График изменения усилия N_1

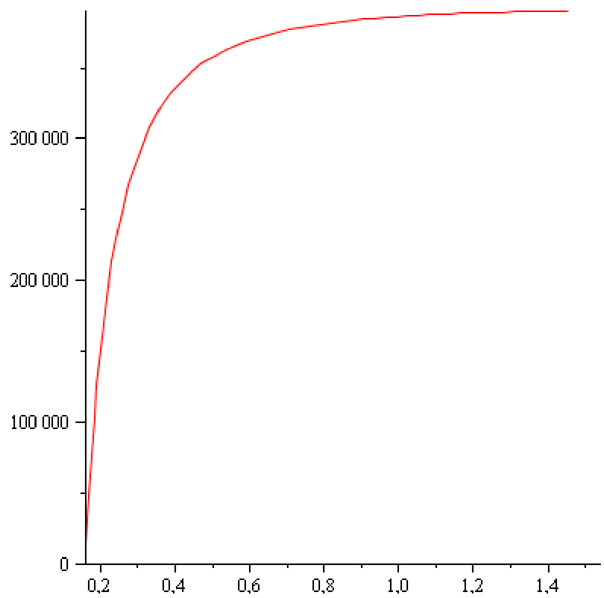


Рис. 15. Файл расчета в исходном виде

$$N = \frac{1}{2} \cdot p_z \cdot R \cdot \left(1 - \frac{sin^2(\alpha_1)}{sin^2(\alpha)}\right)$$

Для $p_z = 10000$, $R = 80$ и $\alpha_1 = \frac{\pi}{20}$ получим:

$$N = 400000 - \frac{400000 \sin\left(\frac{\pi}{20}\right)^2}{\sin(\alpha)^2}$$

или

$$N = 400000. - \frac{9788.696748}{\sin(\alpha)^2}$$

В точке с $\alpha = \frac{\pi}{4}$ усиля равны: $N = 380422.6065$

График изменения усилия N_1

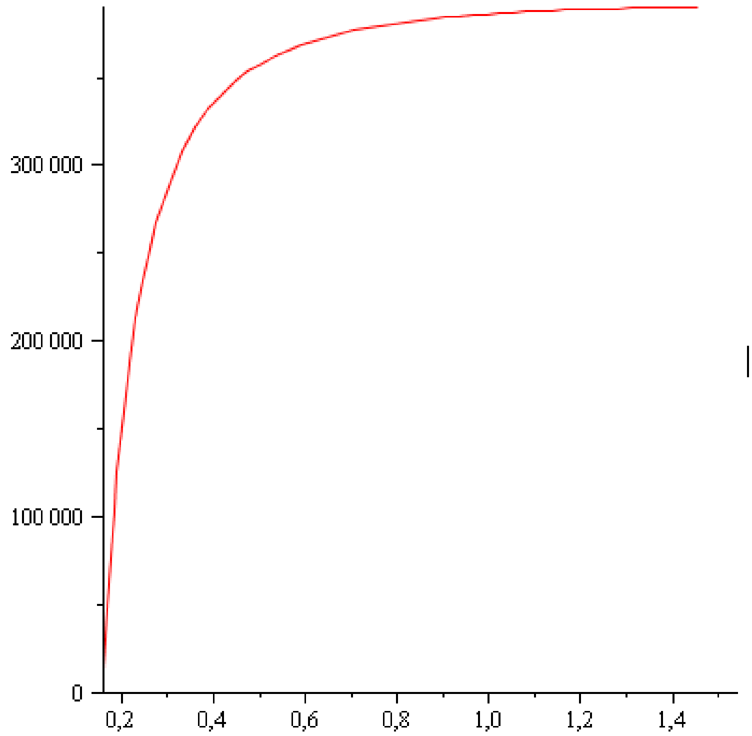


Рис. 16. Файл расчета в конечном виде.

В случае если заранее известны некоторые приближенные значения x_1, x_2, x_3 (исходные значения), при помощи этих уравнений можно осуществлять их уточнение. Для этого исходные значения подставляются в правую часть уравнений. В результате получаются новые, уточненные значения x_1, x_2, x_3. Если повторно применить эти формулы, подставив найденные x_1, x_2, x_3 в их правую часть, можно получить еще более точные значения.

Каждое вычисление по этим формулам, приводящее к уточнению решения, называется итерацией.

Уточнение значений можно осуществлять сколько угодно раз, вплоть до бесконечности, пока исходные (подставляемые в правую часть) и уточненные значения не будут равны друг другу. Обычно уточнение выполняют до тех пор, пока разница между исходными и уточненными значениями не превысит некоторой заранее установленной величины ε, которая характеризует точность вычислений. Чем ε меньше, тем выше точность вычисленных значений x_1, x_2, x_3. Это условие записывается в виде:

$|\bar{x}_1 - x_1| < \varepsilon$, $|\bar{x}_2 - x_2| < \varepsilon$, $|\bar{x}_3 - x_3| < \varepsilon$,

где x_1, x_2, x_3 - исходные значения, $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$ - уточненные значения.

Достоинство метода простой итерации – то, что для вычисления значений x_1, x_2, x_3 используются достаточно простые формулы, которые не меняют своего вида в процессе вычислений. Это позволяет выполнять расчеты достаточно быстро. Однако для получения более-менее точного результата необходимо выполнить значительное число итераций. Этот метод становится эффективным лишь при решении систем линейных алгебраических уравнений большой размерности.

Пример решения системы линейных алгебраических уравнений методом простой итерации в Maple:

Исходная система уравнений с неизвестными a, b, c и d имеет вид:

$$\begin{cases} 10a + 2b + 1c - d = 12 \\ 2a - 20b + 2d = 13 \\ 3b + 8c + 5d = -3 \\ 5a - 3b - 1c + 6d = 0 \end{cases}$$

В системе Maple необходимо набрать каждое уравнение в отдельной командной строке (рис. 17)

Затем, из каждого уравнения при помощи процедуры «isolate» последовательно необходимо выразить каждую их неизвестных величин: a, b, c, d. В качестве параметров процедуры, записываемых в скобках, должна быть сделана ссылка на исходное уравнение, затем, через запятую - имя искомой величины (рис. 18).

Полученные уравнения – и есть уравнения метода простой итерации.

> $10 \cdot a + 2 \cdot b + 1 \cdot c - d = 12$

$$10\,a + 2\,b + c - d = 12 \qquad (1)$$

> $2 \cdot a - 20 \cdot b + 2 \cdot d = 13$

$$2\,a - 20\,b + 2\,d = 13 \qquad (2)$$

> $3 \cdot b + 8 \cdot c + 5 \cdot d = -3$

$$3\,b + 8\,c + 5\,d = -3 \qquad (3)$$

> $5 \cdot a - 3 \cdot b - c + 6 \cdot d = 0$

$$5\,a - 3\,b - c + 6\,d = 0 \qquad (4)$$

Рис. 17 Исходные уравнения в Maple

> $isolate(\mathbf{(1)}, a)$

$$a = \frac{6}{5} - \frac{b}{5} - \frac{c}{10} + \frac{d}{10}$$

> $isolate(\mathbf{(2)}, b)$

$$b = -\frac{13}{20} + \frac{a}{10} + \frac{d}{10}$$

> $isolate(\mathbf{(3)}, c)$

$$c = -\frac{3}{8} - \frac{3\,b}{8} - \frac{5\,d}{8}$$

> $isolate(\mathbf{(4)}, d)$

$$d = -\frac{5\,a}{6} + \frac{b}{2} + \frac{c}{6}$$

Рис.18. Выделение неизвестных из исходных уравнений.

Для удобства организации вычислений по этим формулам, лучше записать их в матричном виде: X = A X + B, где X –вектор искомых величин a, b, c и d; A – матрица коэффициентов при искомых величинах; B – вектор свободных коэффициентов.

Вектор X записывается в Maple как показано на рис. 19.

Для создания матрицы или вектора используется панель «Matrix» в левой части окна программы. Нажатием на кнопку «Choose» выбирается размер матрицы или вектора, затем нажимается кнопка «Insert Matrix» или «Insert Vector» для вставки ее (его) в текст.

$$> X := \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

Рис.19. Вектор X.

Матрица A формируется следующим способом. Каждая строка матрицы соответствует уравнению системы (рис.18), каждый столбец – искомой величине (a, b, c или d) в правой части этих уравнений. Последовательность следования строк матрицы соответствует последовательности записи уравнений (рис.18), а последовательность следования столбцов – последовательности перечисления искомых величин в векторе X (рис. 19). В качестве элементов матрицы записывается число (или математическое выражение), на которое умножается искомая величина (a, b, c или d) в правой части уравнения (рис. 18), с учетом знака. При отсутствии какой-либо искомой величины в рассматриваемом уравнении, считается, что соответствующий ей элемент равен нулю.

Вектор B составляется из оставшихся (свободных) слагаемых в правой части уравнениях (рис. 18) - тех, которые не умножаются ни на какую из искомых величин.

В нашем случае матрица A и вектор B записываются, как показано на рис.20.

$$> A := \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & 0 & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & -\frac{3}{8} & 0 & -\frac{5}{8} \\ -\frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 \end{bmatrix}$$

$$> B := \begin{bmatrix} \frac{6}{5} \\ -\frac{13}{20} \\ -\frac{3}{8} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Рис.20. Матрица A и вектор B.

Для проверки правильности составления матриц и векторов запишем в отдельной командной строке выражение: X = A X + B

В результате должно быть вычислено выражение, имеющее одинаковую с уравнениями метода простой итерации (рис.18) построчную структуру.

Для начала вычисления по формулам метода простой итерации необходимо указать начальные значения искомых величин a, b, c и d путем записи этих значений в векторе X, который обозначим как X0 (рис. 21).

$$> X0 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Рис.21. Вектор X0.

Вычисляем уточненные значения вектора X по формулам простой итерации (рис. 22).

$$> X := A\,X0 + B$$

$$X := \begin{bmatrix} \frac{6}{5} \\ -\frac{13}{20} \\ -\frac{3}{8} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Рис.22. Вычисление уточненного вектора X.

Вычисляем разницу между уточненными и исходными значениями вектора X по модулю (рис. 23).

$$> |evalf(X - X0)|$$

$$\begin{bmatrix} 1.200000000 \\ 0.6500000000 \\ 0.3750000000 \\ 0. \end{bmatrix} \qquad (15)$$

Рис.23. Разница между уточненными и исходными значениями X.

При помощи команды, изображенной на рис. 24, находим максимальное значение в этом векторе.

```
> max(op(convert((15), list)))
```

$$1.200000000$$

Рис.24. Максимальное значение в векторе.

Это значение необходимо сравнить с числом ε, устанавливающим точность получаемых результатов. Предположим, что ε=0,1.

Поскольку 1.2 > ε=0.1, полученный вектор X значений неточен, и его необходимо уточнить. Для этого обозначим его как X0 (рис.25).

```
> X0 := evalf(X)
```

$$X0 := \begin{bmatrix} 1.200000000 \\ -0.6500000000 \\ -0.3750000000 \\ 0. \end{bmatrix}$$

Рис.25. Назначение вектору X0 значения равного X.

Далее действия повторяются, начиная с шага, изображенного на рис.23 – идут последующие итерации (см. рис.26, 27). Итерации выполняются до тех пор, пока максимальное значение в векторе разницы между исходными и уточненными значениями не будет меньше ε=0,1. Для рассматриваемой системы уравнений вычисления прекращаются после 6 повторений (итераций).

Полученное в последней, 6-й итерации максимальное значение из вектора X равно 0,03876441380 (рис.27). Это значение меньше ε=0,1.

Следовательно, последнее полученное значение вектора X – будет являться решением исходной системы уравнений с установленной нами величиной ε точностью. В векторе X первый элемент будет значением искомой величины a, второй – b, третий – c, четвертый – d. Т.е. (см. рис. 27):

a=1.15479499478000004, b=−0.650331270799999972,

c= 0.585769700599999998, d= −1.174176658399999996.

> $X := A\,X0 + B$

$$X := \begin{bmatrix} 1.36749999999999994 \\ -.530000000000000026 \\ -.131249999999999978 \\ -1.38749999999999996 \end{bmatrix}$$

> $|evalf(X - X0)|$

$$\begin{bmatrix} 0.1675000000 \\ 0.1200000000 \\ 0.2437500000 \\ 1.387500000 \end{bmatrix}$$

> $\max(op(convert((19), list)))$

$$1.387500000$$

> $X0 := evalf(X)$

$$X0 := \begin{bmatrix} 1.36749999999999994 \\ -.530000000000000026 \\ -.131250000000000005 \\ -1.38749999999999996 \end{bmatrix}$$

Рис.26. Выполнение 2-й итерации.

Для проверки правильности решения системы уравнений подставим найденные значения в исходные уравнения (1) - (4). В этом случае их можно так же записать их в матричном виде как:

Е Х – С=0.

Матрица Е и вектор С формируются таким же образом, как А и В, но только на основе левой части исходных уравнений (рис. 17), и в нашем случае они будут иметь вид, показанный на рис. 28.

После записи Е и С в Maple, в отдельной командной строке запишем систему уравнений в матричном виде:

$$E\,X - C = 0$$

Если полученные нами ранее значения в векторе Х верны, в результате вычисления этого выражения числа в левой и правой части должны практически совпадать.

2. Решение системы уравнений методом Гаусса при помощи встроенной команды системы Maple.

Для решения систем уравнений в Maple удобней всего использовать метод Гаусса, реализованный в виде процедуры “solve”. В качестве параметров этой процедуры должны быть записаны:

1. список уравнений системы (или ссылок на них),

2. список искомых величин.

> $X := A\,X0 + B$

$$X := \begin{bmatrix} 1.18037499999999994 \\ -.652000000000000024 \\ 0.690937499999999982 \\ -1.42645833333333338 \end{bmatrix}$$

> $|evalf(X-X0)|$

$$\begin{bmatrix} 0.1871250000 \\ 0.1220000000 \\ 0.8221875000 \\ 0.03895833333 \end{bmatrix}$$

> $\max(op(convert(\text{(23)}, list)))$

$$0.8221875000$$

> $X0 := evalf(X)$

$$X0 := \begin{bmatrix} 1.18037499999999994 \\ -.652000000000000024 \\ 0.690937499999999982 \\ -1.42645833300000002 \end{bmatrix}$$

Далее следуют итерации 4-5, содержание которых опущено
Последняя, 6-я итерация:

> $X := A\,X0 + B$

$$X := \begin{bmatrix} 1.15479499478000004 \\ -.650331270799999972 \\ 0.585769700599999998 \\ -1.17417665839999996 \end{bmatrix}$$

> $|evalf(X-X0)|$

$$\begin{bmatrix} 0.01542593178 \\ 0.007251645800 \\ 0.03876441380 \\ 0.03149488740 \end{bmatrix}$$

> $\max(op(convert(\text{(35)}, list)))$

$$0.03876441380$$

Рис.27. Выполнение итераций с 3-ю по 6-ю.

$$E := \begin{bmatrix} 10 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -20 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 8 & 5 \\ 5 & -3 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$C := \begin{bmatrix} -12 \\ -13 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Рис.28. Матрица Е и вектор С.

Для решения системы уравнений (1) – (4) вызов процедуры будет иметь вид:
solve([**(1),(2),(3),(4)**], [a,b,c,d]),
где **(1),(2),(3),(4)** – ссылки на соответствующие строки (см. рис. 17), a,b,c,d – искомые величины.

Однако результат этих вычислений будет отображен в виде обыкновенных дробей. Для получения результатов в виде десятичных дробей необходимо использовать процедуру evalf (см. лабораторную работу №1).

3. Использование элементов программирования при организации вычислений в Maple.

Для выполнения повторяющихся вычислений в Maple могут применятся операторы:
do … **end do;** – для организации бесконечного цикла.
for ... **from** ... **to** ... **do** … **end do;** – для организации цикла со счетчиком.
Для проверки получаемых результатов и изменения хода решения используется оператор проверки условий **if** … **then** … **else** … **end if**;
При применении операторов для организации циклов, условий необходимо учитывать следующие особенности Maple:
1. все вычисляемые выражения вместе с операторами для организации циклов, проверки условий необходимо записывать в одной командной строке. При этом для переноса курсора на новую строку внутри командной строки можно использовать сочетание клавиш «Shift»+ «Enter».

2. каждая команда или математическое выражение внутри командной строки отделяются друг от друга символом «;».
3. нельзя использовать ссылки на номера результатов вычислений. Вместо этого необходимо вычисляемое выражение присваивать какому-либо имени и использовать это имя для ссылки на результат вычисления выражений.

Для проверки условий используется оператор «if...then...else...end if;»:
if *условие* **then** *выражения, вычисляемые при выполнении условия*; **else** *выражения, вычисляемые при невыполнении условия*; **end if;**

Условие записывается в виде равенства или неравенства. Для записи $\leq$ используется два символа: <=. Для записи $\geq$: >=. Для записи $\neq$: <>.
Пример:
if a>0 then b:=b+a; else b:=b-a; end if;
Этот оператор выполняется следующим образом:
Если значения a больше нуля, то значение a прибавляется к b.
При значениях a меньше или равных нулю значение a вычитается из b.

Для выполнения определенного числа однотипных действий (вычислений) используется оператор:
for *имя параметра цикла(счетчика)* **from** *начальное значение параметра* **to** *конечное значение* **do** *повторяющиеся действия*; **end do**;
Значение параметра цикла в процессе вычислений увеличивается на 1 после выполнения действий внутри цикла. Это значение может быть использовано в вычислениях внутри цикла, например, в качестве индекса.
Например: for i from 1 to 5 do $a:=a+b_i$; end do;
Выражение $a:=a+b_i$ повторяется 5 раз. При этом параметр цикла i изменяется от 1 до 5. В результате, к значению a будут поочередно прибавлены b_1, b_2, b_3, b_4, b_5.

Для выполнения однотипных вычислений, когда число повторений заранее неизвестно и цикл прекращается при выполнении какого-либо условия, используется оператор для организации бесконечных циклов совместно с оператором проверки условия:
do *повторяющиеся действия*;
if *условие прекращения цикла* **then** break; **end if;**

end do;

Цикл выполняется до тех пор, пока условие прекращения цикла не выполнится. В этом случае будет исполнена команда break, прерывающая вычисления в цикле.

Для решения системы уравнений методом простой итерации можно использовать эту конструкцию.

Перед записью командной строки с циклом вычислений необходимо в отдельной командной строке указать начальные значения вектора X0 и величины ε (рис. 29). Далее записывается цикл вычислений. Последняя строка «X;» служит для отображения результатов расчета - значений вектора X.

$$X0 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\varepsilon := 0.1$

do
$X := A\,X0 + B;$
$r := |evalf(X - X0)|;$
$e := \max(op(convert(r,\ list)));$
if $|e| < \varepsilon$ **then break**; **end if**;
$X0 := evalf(X);$
end do;
$X;$

Рис.29. Решение системы уравнений методом простой итерации с применением элементов программирования.

Индивидуальное задание для выполнения лабораторной работы № 3

Система алгебраических уравнений представляет собой набор уравнений равновесия конструкции, изображенной на рис.30, и служащий для определения опорных реакций:

$\sum X = 0\ ;\sum M_1 = 0\ ;\sum M_2 = 0$,

или:

$V_1 + V_2 - F = 0;$

$F \cdot \dfrac{c}{2} - M + q \cdot a \cdot \dfrac{a}{2} - H \cdot b - V_2 \cdot c = 0;$

$$q \cdot a \cdot \frac{a}{2} + M + F \cdot \frac{c}{2} - V \cdot_1 c +$$

$$+ H \cdot (b + a) = 0,$$

где
a=4 м,
b=1 м,
c=3 м,
q=10+N/2 кН,
F=25–N кН,
M=5+N кНм, ε=0.01
N – номер варианта.
H, V_1, V_2 – искомые опорные реакции.

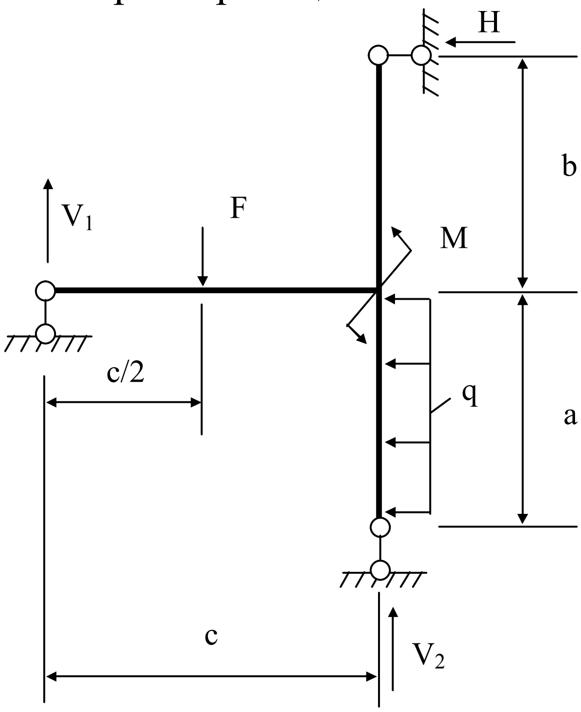


Рис. 30 Расчетная схема конструкции.

Необходимо:

1. решить систему уравнений методом простой итерации (без привлечения элементов программирования),
2. решить систему методом Гаусса в Maple,
3. решить систему уравнений методом простой итерации с использованием элементов программирования.
4. оформить работу, скопировав результаты в Word и добавив исходные данные с рисунком и пояснения, касающиеся хода решения задачи.

4. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ИЗГИБА БАЛКИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Цели работы:

1. Освоение метода конечных разностей на примере решения задачи изгиба балки.
2. Приобретение навыков решения дифференциальных уравнений методом конечных разностей в системе Maple.

Исходные данные:

1. N – номер варианта.
2. Длина балки L=(5+N/10) м.
3. Модуль упругости материала из которого изготовлена балка: $E=2\ 10^5$ МПа - для четного N, $E=0.6\ 10^5$ МПа - для нечетного N.
4. Поперечное сечение балки – прямоугольник высотой 100 мм и шириной 50 мм. Момент инерции такого сечения равен $J_z = 4.17 \cdot 10^{-6}$ м^4.
5. Нагрузка на балку – распределенная, меняющаяся по линейному закону (рис.31). Такой закон распределения описывается формулой

$$q(x) = q_A + \frac{q_B - q_A}{L} x, \qquad \text{(а)}$$

где x – координата точки, где определяется интенсивность нагрузки, q_A, q_B - интенсивность распределенной нагрузки в начале и конце балки соответственно.

Значения интенсивностей: q_A=1+N/5 кН/м, q_B=5-N/5 кН/м.

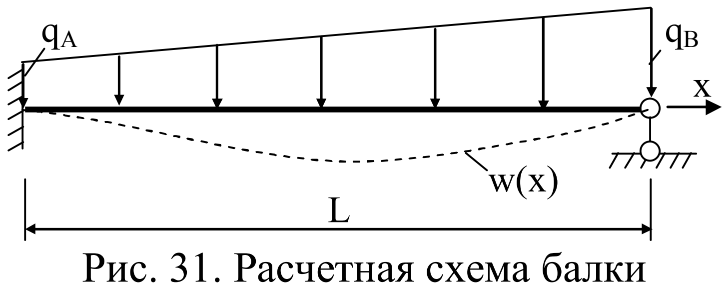


Рис. 31. Расчетная схема балки

Необходимо определить прогиб балки в середине балки и на расстоянии $\frac{1}{4}L$ от опор.

Дифференциальное уравнение изгиба балки:

$$EJ_z \frac{d^4 w(x)}{dx^4} = q(x), \qquad \text{(б)}$$

где w(x) - функция, описывающая распределение прогибов балки вдоль ее оси,

q(x) –функция, описывающая закон распределения нагрузки вдоль оси балки,

E – модуль упругости материала балки, J_z - момент инерции поперечного сечения балки.

Граничные условия задачи задаются в точках, где расположены опоры, т.е. в точках с координатой x=0 и x=L:

Жесткая заделка: $\left.\dfrac{d^2 w(x)}{d\,x^2}\right|_{x=0} = 0,$

$$\left. w(x)\right|_{x=0} = 0. \qquad \text{(в)}$$

Шарнирная опора: $\left.\dfrac{dw(x)}{d\,x}\right|_{x=L} = 0,$

$$\left. w(x)\right|_{x=L} = 0. \qquad \text{(г)}$$

Здесь черта со значением координаты x, записанным внизу обозначает, что выражение вычисляется в точке с указанной координатой.

Порядок выполнения работы:

1. Решение задачи изгиба балки методом конечных разностей поэтапно

1. Разбиваем балку по длине узлами на 4 части, как показано на рис. 32.

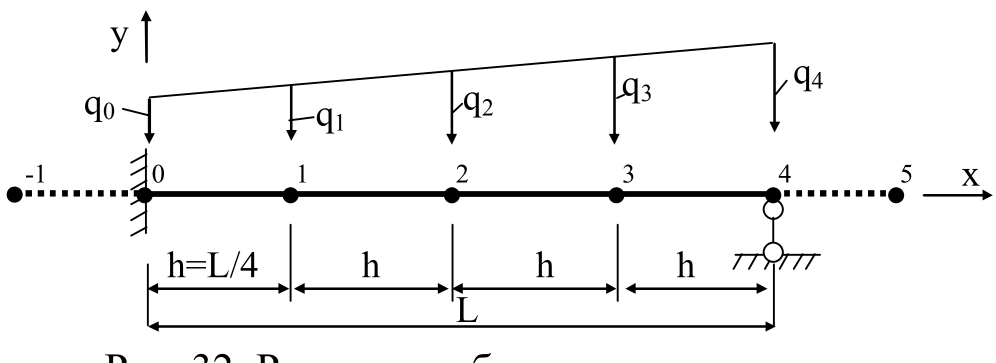


Рис. 32. Разделение балки узлами на участки

Кроме того, вводятся дополнительные, «фиктивные» узлы с номерами «-1» и «5», необходимые для учета граничных условий.

2. Заменяем производные функции *w(x)* и значения функций *w(x)* и *q(x)* в дифференциальном уравнении (б) их конечно-разностными выражениями, которые записываются для некоторого *i*-го узла как:

$$\frac{d^4w(x)}{dx^4} = \frac{w_{i+2} - 4w_{i+1} + 6w_i - 4w_{i-1} + w_{i-2}}{h^4},$$
$$\frac{d^3w(x)}{dx^3} = \frac{w_{i+2} - 2w_{i+1} + 2w_{i-1} + w_{i-2}}{2h^3},$$
$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} = \frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{h^2},$$
$$\frac{dw(x)}{dx} = \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h},$$
$$w(x) = w_i,$$
$$q(x) = q_i.$$

Записываем полученное после подстановки этих выражений в (2) конечно-разностное уравнение в Maple.

3. Подставляя в общее конечно-разностное выражение значения i для узлов от 1 до 3, получим три конечно-разностных выражения. Например, для получения конечно-разностного выражения для узла №1 в Maple необходимо записать выражение: $subs(i = 1,(1))$, где (1) – ссылка на конечно-разностное выражение, полученное в предыдущем пункте. Таким же образом записываются выражения для узлов 2 и 3.

4. Вычисляем значения интенсивности нагрузки q_i в узлах с i от 1 до 3. Для этого используем формулу (а), записав в Maple отдельной командной строкой ее правую часть: $q_A \mathrm{C}\ \frac{q_B \mathrm{K}\ q_A}{L}\ x$.

Последовательно подставим в это выражение значения x для узлов 1-3 командой subs. Результат вычислений присвоим величинам q_1, q_2, q_3.

Например: для вычисления q_1 (см. рис.32) необходимо записать в Maple выражение $q_1 := subs(x = \frac{L}{4},(2))$, где (2) – ссылка на строку с формулой $q_A \mathrm{C}\ \frac{q_B \mathrm{K}\ q_A}{L}\ x$.

5. Заменяем производные в граничных условиях (в) и (г) конечными разностями таким же образом, как это делалось для дифференциального уравнения изгиба балки (см. п.2). Выражения записываем только для тех узлов, в которых находятся соответствующие опоры, т.е 0 и 4. В конечно-разностных выражения значения индекса i в этом случае можно сразу заменять на значения 0

или 4 соответственно. В результате получаем четыре конечно-разностных выражения граничных условий.

6. Присваиваем именам всех используемых в задаче величин (L, E, q_A, q_B, J_z, N, h) их значения в соответствии с исходными данными.

7. Решаем полученную линейную систему уравнений, состоящую из трех конечно-разностных уравнений для узлов №1, 2, 3 балки (п.2) и четырех конечно-разностных уравнений граничных условий (п.5). Искомыми величинами являются значения функции прогибов в узлах w_i с индексами *i* от -1 до 5. Для решения используем процедуру Maple solve([*ссылки на конечно-разностные уравнения, перечисленные через запятую*], [*все неизвестные узловые величины, перечисленные через запятую*]). Результат решения задачи должен быть получен в численном виде.

8. Вычерчиваем вручную по полученным численным значениям w эпюру прогибов. Значения прогибов в фиктивных узлах с номерами «-1» и «5» при этом во внимание не принимаются. Общий вид эпюры показан на рис.33.

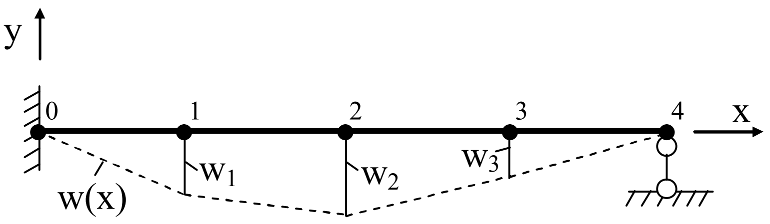


Рис.33. Общий вид эпюры прогибов в балке.

2. Решение задачи изгиба балки методом конечных разностей с использованием встроенной процедуры Maple

1. Записать дифференциальное уравнение изгиба балки (б) и граничные условия (в), (г), каждое в отдельной командной строке. В правую часть уравнения изгиба балки необходимо сразу подставить функцию q(x), пользуясь выражением (а).

Для ввода обозначения производной и вертикальной черты в выражениях для граничных условий использовать соответственно кнопки $\frac{d}{dx} f$ и $f(x)\Big|_{x=a}$ на панели инструментов «Expression».

Причем, значение функции в Maple всегда записывается после дроби с обозначением производной (вместо символа *f* зеленого цвета), а не в числителе (как например, записано в формуле (б)).

Для правильного ввода функции необходимо выделить символ *f* зеленого цвета и записать обозначение функции.

При записи граничных условий необходимо сначала создать вертикальную черту, а затем, выделив символы *f* (x) записать требуемое математическое выражение.

2. Решить задачу при помощи процедуры Maple:
R := dsolve(convert([*ссылки на диф. уравнение и все граничные условия через запятую*], D), numeric).

3. Вывести значения прогибов и их производных в точках x=0, x=0.25 L, x=0.5 L, x=0.75 L введя последовательно в Maple выражения: R(0), R(0.25 L), R(0.5 L), R(0.75 L). Сравнить их со значениями прогибов, полученными в узлах 1, 2 и 3 в первой части работы. Различие в значениях должно быть небольшим.

4. Построить график изменения прогибов по длине командой plots[odeplot](R, [x, w(x)], 0..L).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Карпов В.В., Коробейников А.В. Математические модели задач строительного профиля и численные методы их исследования. СПб: АСВ, 2003.

2. Ступишин Л.Ю., Бредихин В.В. Основы автоматизации информационных процессов и численные методы решения задач строительства на ЭВМ. Курск: Курск. гос. техн. ун-т, 1999. – 151 с.

3. Турчак Л.И. Основы численных методов. М: Наука, 1987 – 320 с.

4. Васильев А.Н. Maple 8. Самоучитель.

5. Дьяконов В.П. Maple 9 в математике, физике и образовании, 2004.