

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра механики, мехатроники и робототехники



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе

О.Г. Локтионова

16.01. 2017 г.

КОМПЬЮТЕРНЫЕ СИСТЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

методические указания по выполнению практической и
самостоятельной работы
для студентов направления
15.03.06 Мехатроника и робототехника

Курск 2017

УДК 681.323

Составитель: Лушников Б.В.

Рецензент:

Кандидат технических наук, доцент Юго-Западного государственного университета *С.И. Савин*

Компьютерные системы математического моделирования: методические указания по выполнению практической и самостоятельной работы для студентов направления 15.03.06 Мехатроника и робототехника / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Б.В. Лушников. - Курск, 2017. 36 с.

Изложены теоретические предпосылки, задания и примеры решения задач по дисциплине «Компьютерные системы математического моделирования».

Методические указания предназначены для студентов направления 15.03.06 «Мехатроника и робототехника» всех форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . Формат 60x84 1/16.
Усл.печ.л. Уч.-изд.л. Тираж 30 экз. Заказ. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

1. Практическое занятие №1

МЕТОДИКА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ПАКЕТЕ MATCAD. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1.1 КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Инженерные и научные задачи часто связаны с решением дифференциальных уравнений, так как с помощью последних описываются многие физические явления. Соответственно процессы в технических устройствах так же описываются дифференциальными уравнениями.

Природа этих процессов различна. При анализе тепловых режимов аппаратуры рассчитывают тепловые потоки, при изучении электромагнитных процессов - электрические и магнитные поля, при оценке прочности изделий вычисляют механические напряжения и деформации.

К сожалению, для многих практически важных случаев задачи, описываемые дифференциальными уравнениями, весьма сложны, и получить их точное решение оказывается затруднительно или невозможно. Эти трудности могут быть связаны с видом уравнения, например, с его нелинейным характером. Однако решить подобные сложные задачи также, как и более простые можно с помощью компьютера. Поэтому методы решения дифференциальных уравнений на ЭВМ широко применяются в инженерной практике.

1.1.1. Задача Коши и краевая задача

Методы решения задач, содержащих обыкновенные дифференциальные уравнения, зависят от их математической формулировки. Рассмотрим их.

1.1.1.1. Классификация уравнений

Дифференциальные уравнения принято делить на две группы: *обыкновенные дифференциальные уравнения* и *уравнения в частных производных*.

В данной лабораторной работе рассматриваются методы решения задач, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Эти уравнения содержат только одну независимую переменную, в качестве которой может выступать время или пространственная координата. Иначе говоря, в таких уравнениях все функции зависят только от одной переменной и их производные по этой переменной являются полными.

Уравнения в частных производных содержат более одной независимой переменной. Этими переменными могут быть, например, одновременно пространственные координаты и время или только пространственные координаты для статической задачи. В таких уравнениях производные от функций по любой из независимых переменных являются частными. Кроме того, уравнение может

содержать смешанные производные. Подобного рода задачи и методы их решения будут рассмотрены в следующей работе.

1.1.1.2 Задача Коши

Важным элементом задач, содержащих дифференциальные уравнения, являются дополнительные условия, которые необходимы для получения количественного решения.

Применительно к обыкновенным дифференциальным уравнениям различают два вида задач: *задачу с начальными условиями (задачу Коши)* и *задачу с краевыми условиями (краевую задачу)*.

Задачу Коши можно сформулировать следующим образом. Дано обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{du(x)}{dx} = f(x, u) \quad (1)$$

и начальное условие

$$u(x_0) = u_0 \quad (2)$$

Требуется найти функцию $u(x)$, удовлетворяющую уравнению (1) и начальному условию (2).

На практике подобные задачи обычно связаны с расчётом переходных электрических, нестационарных тепловых или механических процессов при заданном в некоторый начальный момент времени исходном состоянии системы. Формулировка краевой задачи будет рассмотрена в п. 1.4.

1.1.2. Одношаговые методы решения задачи Коши

К одношаговым относятся метод Эйлера (первого порядка), его модификация (второго порядка) и методы Рунге-Кутты (более высоких порядков).

1.1.2.1. Метод Эйлера

Этот метод является простейшим численным методом решения задачи Коши. Рассмотрим его на примере решения обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка (1) с соответствующим начальным условием (2).

Расчетную формулу метода Эйлера можно получить, используя разложение функции $u(x)$ в ряд Тейлора в окрестности некоторой точки x_i :

$$u(x_i + h) = u(x_i) + h \frac{du(x_i)}{dx} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2u(x_i)}{dx^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{d^3u(x_i)}{dx^3} + \dots \quad (3)$$

Если приращение h мало (то есть $h \ll x_i$), то члены ряда, начиная со слагаемого, включающего h во второй степени, могут быть отброшены как малые величины. Тогда из (3) в первом приближении получим

$$u(x_i + h) = u(x_i) + h \frac{du(x_i)}{dx}$$

Воспользуемся формулой (4), применив ее к единственной известной из условия задачи точке x_0 . Найдем в x_0 производную $du(x_0)/dx$, подставив (2) в (1):

$$\frac{du(x_0)}{dx} = f[x_0, u(x_0)] = f(x_0, u_0)$$

Подставив последнее выражение в (4) и полагая $x_i = x_0$, получим

$$u(x_0 + h) = u(x_0) + hf(x_0, u(x_0))$$

или, сокращая обозначения, в окончательном виде

$$u_1 = u_0 + hf(x_0, u_0).$$

Таким образом, (4) при известном значении функции $u_0 = u(x_0)$ в начальной точке x_0 позволяет найти приближенное значение $u_1 = u(x_1)$ при малом смещении h от x_0 . На рис. 1 графически показан начальный шаг решения методом Эйлера.

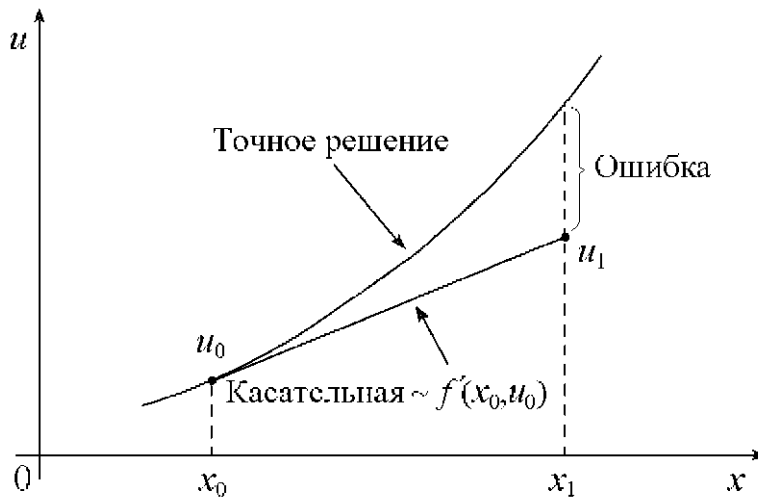


Рис. 1. Метод Эйлера

Решение можно продолжить, используя найденное значение функции u_1 для вычисления следующего значения - u_2 . Распространяя эти рассуждения на последующие точки, запишем расчетную формулу метода Эйлера в виде

$$u_{i+1} = u_i + hf(x_i, u_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Из рис. 1 видно, что ошибка метода Эйлера на шаге связана с используемой линейной аппроксимацией $u(x)$. Хотя тангенс угла наклона касательной к кривой точного решения в точке (x_0, u_0) известен и равен $du(x_0)/dx$, он изменяется при смещении от x_0 до x_1 . Следовательно, при сохранении начального наклона касательной на всем интервале h расчет u_1 выполняется с погрешностью.

Ошибка метода Эйлера на каждом шаге имеет порядок h^2 , так как члены, содержащие h во второй и более высоких степенях, отбрасываются - см. (3) и (4). Уменьшая h можно снизить локальную ошибку на шаге.

1.1.2.2 Модифицированный метод Эйлера

Точность метода Эйлера можно существенно повысить, улучшив аппроксимацию $u(x)$ на рассчитываемом шаге. Для этого при разложении $u(x)$ в ряд Тейлора учтем дополнительно слагаемое, содержащее h^2 и $d^2u(x_i)/dx^2$ в (3). Определим вторую производную, аппроксимировав ее конечной разностью:

$$\frac{d^2u(x_i)}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{du(x_i)}{dx} \right) \approx \frac{\Delta u'}{\Delta x} = \frac{u'(x_i+h) - u'(x_i)}{h}, \quad (6)$$

где $\Delta x = h$, $u'(x_i + h) = du(x_i + h)/dx$ и $u'(x_i) = du(x_i)/dx$.

Подставляя полученное выражение в (3) и отбрасывая члены ряда, начиная со слагаемого, содержащего h^3 , запишем

$$u(x_i + h) = u(x_i) + \frac{h}{2} \left[\frac{du(x_i)}{dx} + \frac{du(x_i + h)}{dx} \right]$$

Заменяя в последнем выражении производные с помощью (1) так же, как это было сделано в п.1.2.1, и, используя сокращенные обозначения, получим расчетную формулу модифицированного метода Эйлера

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2} [f(x_i, u_i) + f(x_{i+1}, u_{i+1})]. \quad (7)$$

Соотношение (7) дает решение для u_{i+1} в неявном виде, поскольку u_{i+1} присутствует одновременно в левой и правой его частях. Следует отметить, что использование неявных методов оправдано тем, что они, как правило, более устойчивы, чем явные.

Формула (7) может рассматриваться и как явное решение, если в ее правую часть подставить значение u_{i+1}^* , рассчитав его предварительно методом Эйлера по формуле (5). При этом значение u_{i+1}^* является *прогнозом*, а уточнение результата по формуле (7) - его *коррекцией*. Непосредственная подстановка формулы Эйлера (5) в правую часть (7) дает расчетное соотношение *метода Эйлера-Коши* (или *метода Хьюна*).

Графически модифицированный метод Эйлера представлен на рис. 2. Из рис. 2 видно, что поправка, учитывающая изменение наклона кривой $u(x)$ заметно уменьшает ошибку на шаге h .

Модифицированный метод Эйлера обеспечивает второй порядок точности. Ошибка на каждом шаге при использовании этого метода пропорциональна h^3 . Повышение точности достигается за счет дополнительных затрат машинного времени при расчете каждого шага.

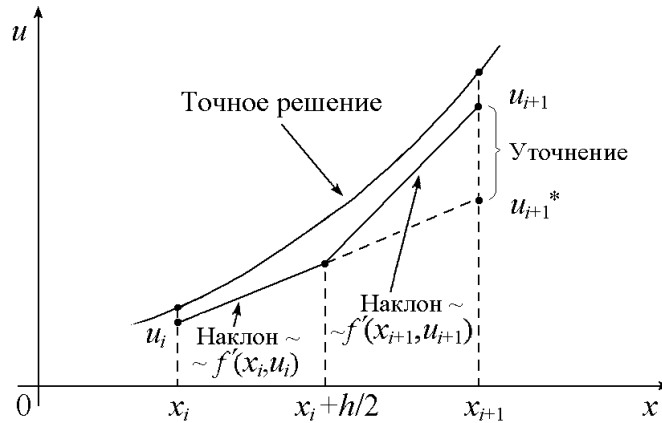


Рис. 2. Модифицированный метод Эйлера

Дальнейшее снижение погрешности решения можно получить за счет использования лучшей аппроксимации $u(x)$, учитывающей слагаемые высоких порядков. Эта идея положена в основу методов Рунге-Кутты.

1.1.2.3 Метод Рунге-Кутты четвертого порядка

В модифицированном методе Эйлера для получения второй производной $d^2u(x_i)/dx^2$ используется конечно-разностная формула (6), включающая значения первой производной $u'(x_i)$ и $u'(x_i+h)$ в начальной и конечной точках шага. Если подобным же образом вычислить третью производную, рассчитав предварительно вторую производную в двух точках шага, то можно с помощью (3) построить расчетную формулу метода третьего порядка точности. Для этого потребуется определить первую производную $u'(x)$ в дополнительной промежуточной точке между x_i и $x_i + h$.

Аналогичные рассуждения позволяют вывести расчетные формулы методов более высоких порядков, обеспечивающих заметное снижение погрешности решения. Однако на практике их реализация требует существенного повышения объема вычислений с использованием дополнительных промежуточных точек на каждом шаге.

Существуют и другие способы построения численных методов с высоким порядком точности. Один из них, применяемый при построении группы методов Рунге-Кутты, заключается в аппроксимации решения дифференциального уравнения суммой

$$u(x_i + h) \approx \xi(x_i, h) = u(x_i) + \sum_{n=1}^p A_n k_n(h), \quad (8)$$

где A_n - коэффициенты разложения, k_n - последовательность функций

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_i, u_i), \\ k_2 &= hf(x_i + \alpha_2 h, u_i + \beta_{21} k_1), \\ k_3 &= hf(x_i + \alpha_3 h, u_i + \beta_{31} k_1 + \beta_{32} k_2), \\ &\dots, \\ k_p &= hf(x_i + \alpha_p h, u_i + \beta_{p,1} k_1 + \dots + \beta_{p,p-1} k_{p-1}), \end{aligned} \quad (9)$$

$\alpha_n, \beta_{nm}, 0 < m < n \leq p$ - некоторые параметры.

Неизвестные параметры A_n, α_n и β_{nm} можно выбрать из условия

$$\psi(0) = \psi'(0) = \psi''(0) = \dots = \psi^{(K)}(0) = 0, \quad (10)$$

где функция $\psi(h) = u(x_i + h) - \xi(x_i, h)$ показывает отклонение приближенного решения $\xi(x_i, h)$ от точного $u(x_i + h)$. Увеличение параметра p в (8) позволяет сделать погрешность, связанную с заменой точного решения приближенным, как угодно малой.

Предположим, что $p = 1$. Тогда, подставляя (8) в (10), из условия $\psi(0) = \psi'(0) = 0$ получим $A_1 = 1$ и $\psi''(0) \neq 0$, откуда

$$u(x_i + h) \approx u(x_i) + \sum_{n=1}^p A_n k_n(h) = u_i + k_i = u_i + hf(x_i, u_i),$$

что соответствует формуле Эйлера (5). Таким же образом можно получить формулы более высоких порядков точности, которые называют методами Рунге-Кутты.

Одним из наиболее известных является вариант метода Рунге-Кутты, соответствующий $p = 4$. Это метод четвертого порядка точности, для которого ошибка на шаге имеет порядок h^5 . Его расчетные формулы имеют следующий вид:

$$u_{i+1} = u_i + \frac{k_1 + 2k_2 + 3k_3 + k_4}{6},$$

где

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_i, u_i), & k_2 &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{k_1}{2}\right), \\ k_3 &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{k_2}{2}\right), & k_4 &= hf(x_i + h, u_i + k_3). \end{aligned}$$

Рассмотренные выше метод Эйлера и его модификация по сути дела являются методами Рунге-Кутты первого и второго порядка соответственно. Несмотря на увеличение объема вычислений метод четвертого порядка имеет преимущество перед методами первого и второго порядков, так как он обеспечивает малую локальную ошибку. Это позволяет увеличивать шаг интегрирования h и, следовательно, сокращать время расчета.

1.1.2.4 Погрешность решения и выбор шага

Как было показано выше, порядок точности метода p определяет ошибку дискретизации $\sim h^{p+1}$. Знание порядка ошибки не обеспечивает ее прямую оценку. Получить такую оценку позволяет правило Рунге (формула двойного пересчета).

Пусть одношаговый метод имеет порядок точности p . Тогда погрешность, равная разности точного решения u_T и приближенного $u_{i+1,h}$, полученного численно с использованием шага h , имеет порядок $p+1$:

$$u_T - u_{i+1,h} \approx Ch^{p+1},$$

где C - константа, не зависящая от h . При расчете с уменьшенным вдвое шагом, равным $h/2$, погрешность изменится:

$$u_T - u_{i+1,h/2} \approx C\left(\frac{h}{2}\right)^{p+1}.$$

Вычитая последнее выражение из предыдущего, определим изменение

$$u_{i+1,h/2} - u_{i+1,h} \approx Ch^{p+1} - C\left(\frac{h}{2}\right)^{p+1} = C\left(\frac{h}{2}\right)^{p+1} (2^{p+1} - 1).$$

Выражая из последнего соотношения постоянную C и подставляя в предыдущую формулу, получим оценку погрешности по правилу Рунге

$$u_T - u_{i+1,h/2} \approx \frac{u_{i+1,h/2} - u_{i+1,h}}{2^{p+1} - 1}. \quad (11)$$

Ошибка дискретизации стремится к нулю при стремлении h к нулю. Следовательно, уменьшая шаг h можно сделать *локальную ошибку* (на шаге) сколь угодно малой. Однако при уменьшении h необходимо увеличить количество шагов. Поэтому сокращение h не приводит к такому же снижению *глобальной* (накапливаемой от шага к шагу) ошибки.

Малые ошибки, появившиеся в начале вычислений, могут совершенно исказить решение, если только не подобрать подходящий численный метод. Это явление иногда называют «*неустойчивостью*». Неустойчивость проявляется в катастрофическом нарастании погрешности решения вплоть до возникновения паразитных осцилляций кривой решения.

На практике уменьшению h препятствуют и ошибки округления, вызванные неточностью представления чисел в компьютере. При уменьшении шага, начиная с некоторого h_0 , вклад ошибок округления преобладает, что приводит к возрастанию погрешности решения (рис. 3). Обычно алгоритмы обеспечивают автоматический выбор шага. Для этого выполняется два пробных расчета - с заданным шагом h и с уменьшенным вдвое $h/2$.

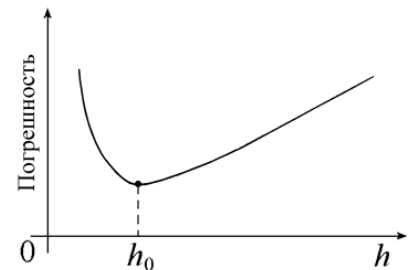


Рис. 3. Зависимость погрешности решения от h

В простейшем случае ограничиваются сравнением результатов решений

в одной и той же точке: $|u_{i+1,h/2} - u_{i+1,h}| < \delta$, где δ - некоторое малое положительное число, определяющее требования к точности. Более сложные оценки основываются на формулах подобных правилу Рунге. Если оценка показывает большую ошибку, алгоритм переходит на уменьшенный вдвое шаг.

1.1.3 Многошаговые методы решения задачи Коши

1.1.3.1. Многошаговые методы

Из вышеизложенного видно, что снижение погрешности решения задачи Коши может быть обеспечено использованием одношаговых методов высоких порядков точности. При этом в пределах каждого шага интегрирования приходится вводить промежуточные точки и увеличивать и объем вычислений.

Снизить вычислительные затраты без ухудшения погрешности можно, если на очередном шаге уточняющую информацию получать не за счет дополнительных точек, а из предыдущих шагов. Действительно, если в расчете использовать не только последнюю из известных точек решения, а еще и ряд предыдущих, можно более точно предсказать дальнейший ход кривой. Методы, реализующие эту идею, получили название *многошаговых*.

1.1.3.2 Метод Адамса

В простейшем случае многошаговый метод опирается только на две последние точки решения – (x_i, u_i) и (x_{i-1}, u_{i-1}) . Вычисление следующей точки строится на двух интервалах – от x_{i-1} до x_i и от x_i до x_{i+1} . В данном случае говорят, что метод является *двухшаговым*.

Для получения расчетной формулы двухшагового метода проинтегрируем обе части дифференциального уравнения (1) на интервале от x_i до x_{i+1} . Интегрирование левой части дает

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{du(x)}{dx} dx = u(x_{i+1}) - u(x_i) \approx u_{i+1} - u_i. \quad (12)$$

Для интегрирования правой части (1) заменим $f(x, u) = f(x, u(x))$ на интерполяционный многочлен $F(x)$. Для двух известных точек x_{i-1} и x_i может быть построен линейный многочлен, совпадающий с кривой решения в точках (x_{i-1}, u_{i-1}) и (x_i, u_i) :

$$F(x) = \frac{x-x_{i-1}}{h} f(x_i, u_i) - \frac{x-x_i}{h} f(x_{i-1}, u_{i-1}).$$

Тогда интегрирование правой части дает

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} F(x) dx = \frac{h}{2} [3f(x_i, u_i) - f(x_{i-1}, u_{i-1})]. \quad (13)$$

Приравнявая правые части (12) и (13) и применяя сокращенные обозначения $f_i \equiv f(x_i, u_i)$, $f_{i+1} \equiv f(x_{i+1}, u_{i+1})$, запишем формулу двухшагового метода

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2} [3f_i - f_{i-1}].$$

Аналогично, учитывая большее число предыдущих точек решения можно построить формулы экстраполяционного метода Адамса-Башфорта:

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{12} [23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2}];$$

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{24} [55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}].$$

Первая соответствует *трехшаговому*, а вторая - *четырёхшаговому* методу.

1.1.3.3 Методы прогноза и коррекции (предиктор-корректор)

Аналогичные вышеприведенным выражения можно получить, включая в интерполяционный многочлен рассчитываемую точку x_{i+1} как известную. Этот подход дает формулы метода Адамса-Моултона:

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2} [f_{i+1} + f_{i-1}];$$

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{12} [5f_{i+1} + 8f_i - f_{i-1}];$$

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{12} [9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}].$$

Данный метод является неявным, то есть требует решения уравнения относительно u_{i+1} , что представляется неудобным. Тем не менее, неявные формулы применяются на практике, так как позволяют повысить устойчивость решения и существенно увеличить шаг.

Обычно решение строится в два этапа. Сначала по явной схеме определяют *прогноз* u_{i+1} , например, по формуле Адамса-Башфорта. На втором этапе производится *коррекция* u_{i+1} по неявной формуле. Далее, многократно используя неявную формулу, можно дополнительно уточнять u_{i+1} подобно тому, как это делается в методе простой итерации. Однако обычно ограничиваются единственной итерацией. Описанный алгоритм многошаговых методов получил название *метода прогноза и коррекции*.

1.1.3.4 Общая характеристика многошаговых методов

По сравнению с одношаговыми многошаговые методы требуют меньшего объема вычислений (сравните формулы Рунге-Кутты и Адамса-Башфорта). К недостаткам многошаговых методов относится трудность смены шага, так как расчетные формулы не учитывают эту возможность. Данная проблема решена в многозначных методах, использующих иную экстраполяцию решения.

Кроме того, многошаговые методы не обладают свойством *самостартования*, так как требуют задания ряда предыдущих точек. В то же

время любой из одношаговых методов способен стартовать из единственной начальной точки.

1.1.4 Краевая задача и метод стрельбы

1.1.4.1 Краевая задача

В краевой задаче требуется найти решение обыкновенного дифференциального уравнения с дополнительными условиями, заданными при нескольких различных значениях независимой переменной.

Например, для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f\left(x, u, \frac{du}{dx}\right), \quad (14)$$

эти условия задаются в двух разных точках $x = a$ и $x = b$:

$$u(a) = A, \quad \text{и} \quad u(b) = B. \quad (15)$$

Поскольку эти точки определяют границы области $a < x < b$, в которой обычно и отыскивается решение, поставленные в них дополнительные условия называют *граничными* или *краевыми*. В инженерной практике, например, такая задача может быть связана с расчетом прогиба стержня при заданном способе закрепления его концов.

Одним из методов решения краевой задачи является метод конечных разностей. Другим способом решения краевой задачи является ее приведение к задаче Коши путем замены дополнительных условий. Рассмотрим метод стрельбы, использующий этот подход.

1.1.4.2 Метод стрельбы

Итак, если дана краевая задача, например, в вышеприведенной формулировке, то в методе стрельбы она заменяется задачей Коши для того же уравнения (14) но с начальными условиями

$$u(a) = A, \quad \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=a} = k = \operatorname{tg} \theta. \quad (16)$$

Здесь $u(a)$ - точка, которая является началом кривой решения $u(x)$ дифференциального уравнения, θ - угол наклона касательной к этой кривой в начальной точке.

Считая решение задачи Коши зависящим от начального условия $du/dx|_{x=a} = tg\theta$, будем подбирать такое значение θ , при котором кривая решения $u(x)$ в точке b даст совпадающий с (15) результат $u(b)=B$. Если это условие будет выполнено, то решение задачи Коши совпадет с решением краевой задачи.

Применительно к описанному подходу название "метод стрельбы" вполне оправдано, поскольку в нем производится как бы "пристрелка" по углу наклона кривой $u(x)$ в начальной точке.

Чтобы сократить количество попыток при поиске решения $u(x)$, применяют различные стратегии подбора параметра θ . Например, при использовании метода половинного деления действуют следующим образом. Вначале выполняют два пробных расчета при значениях параметра θ равных θ_1 и θ_2 . Эти значения выбирают таким образом, чтобы при $\theta = \theta_1$ решение давало в точке $x=b$ "перелет", то есть $u(b) > B$, а при $\theta = \theta_2$ - "недолет", то есть $u(b) < B$.

Далее, используя в начальном условии (15) значение $\theta_3 = (\theta_1 + \theta_2) / 2$, вновь численно решают задачу Коши. Из трех полученных решений отбрасывают то, которое дает в точке $x=b$ наибольшее отклонение от B . Затем от двух оставшихся значений параметра θ находят среднее θ_4 и вновь выполняют с этим значением расчет.

Повторение описанного процесса прекращают, когда разность двух последовательно найденных значений θ станет меньше некоторого заданного малого числа или достаточно малым будет отклонение $u(b)$ от B . Подобный алгоритм может быть построен и с использованием метода Ньютона.

1.1.4.3 Метод стрельбы для линейного дифференциального уравнения

Если обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка является линейным, то есть имеет вид

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f_1(x) \frac{du}{dx} + f_2(x)u + f_3(x)$$

при граничных условиях (15), то поиск решения методом стрельбы существенно упрощается.

Выполнив два "пристрелочных" расчета при θ_1 и θ_2 , как это было описано ранее, получим два решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$. Если $u_1(b) = B_1$ и $u_2(b) = B_2$, причем $B_1 \neq B_2$, то решением краевой задачи будет линейная комбинация двух решений

$$u(x) = \frac{1}{B_1 - B_2} [(B - B_2)u_1(x) + (B_1 - B)u_2(x)].$$

Подставляя в это выражение при $x = a$ значения $u_1(a) = u_1(a) = A$ и при $x = b$ значения $u_1(b) = B_1, u_2(b) = B_2$, нетрудно убедиться, что оно удовлетворяет обоим исходным граничным условиям задачи.

1.1.5 Примеры решения задачи Коши

1.1.5.1 Решение задачи Коши в MathCAD

Рассмотрим в качестве примера расчет переходного процесса в последовательном электрическом колебательном контуре.

Свободные колебания тока в контуре описываются уравнением

$$L \frac{d^2 I(t)}{dt^2} + R \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} I(t) = 0,$$

где J - ток, L - индуктивность контурной катушки, R - сопротивление потерь контура, C - емкость конденсатора. Примем $R = 5$ Ом, $L = 10^{-5}$ Гн и $C = 10^{-9}$ Ф.

Используя обозначения $z_0 = I$ и $z_1 = dz_0/dt = dI/dt$, преобразуем исходное уравнение в систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{dz_0}{dt} = z_1 \\ \frac{dz_1}{dt} = -\frac{1}{L} \left(R z_1 + \frac{1}{C} z_0 \right). \end{cases} \quad (17)$$

Приняв в качестве начальных условий $I = 1$ мА и $dI/dt = 0$, запишем

решение в пакете MathCAD следующим образом:

$$R:=5 \quad L:=10^{-5} \quad C:=10^{-9} \quad t_0:=0 \quad t_k:=5 \cdot 10^{-6} \quad N1:=500$$

$$F(t,z):=\begin{pmatrix} z_1 \\ -\frac{R}{L} \cdot z_1 - \frac{1}{L \cdot C} \cdot z_0 \end{pmatrix} \quad F1:=\text{rkfixed}\left[\begin{pmatrix} 10^{-3} \\ 0 \end{pmatrix}, t_0, t_k, N1, f\right]$$

В этом примере использована функция `rkfixed`. Она вычисляет решение системы, содержащей обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка методом Рунге-Кутты с фиксированным шагом интегрирования.

Обращение к функции выполняется следующим образом:

$$F := \text{rkfixed}(Z0, t_0, t_k, N, f),$$

где F - выходные данные, возвращаемые функцией, $Z0$ - вектор начальных значений, размерность которого должна соответствовать порядку решаемой системы, $t0$ - начальное значение аргумента, tk - верхний предел изменения аргумента, N - количество рассчитываемых точек на интервале от $t0$ до tk , f - имя функции, описывающей правую часть системы дифференциальных уравнений.

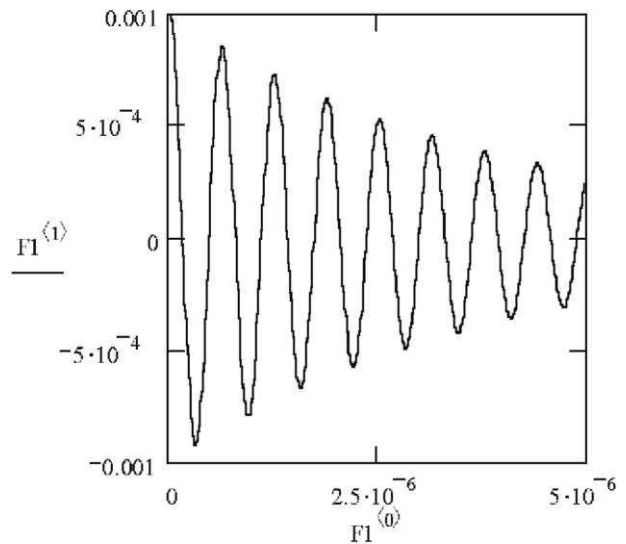
Из приведенного примера видно, как записывается функция $f(t,z)$ в документе MathCAD. Имя зависимой переменной z должно совпадать с именами ее компонент, присутствующих в правой части формулы $f(t,z)$. Сами дифференциальные уравнения в предварительно приводятся к каноническому виду (17) так, чтобы в левой части каждого из них находилась только производная по одной из компонент z . Первым в системе должно записываться уравнение, определенное для производной от нулевой компоненты z , то есть от z_0 , затем – от z_1 и так далее. Следует отметить, что отсчет индексов в MathCAD определяется параметром ORIGIN и обычно по умолчанию начинается с нуля.

Функция `rkfixed` возвращает найденное решение в виде двумерного массива (см. рис. 4, а). В приведенном примере результат передается переменной $F1$. Значения независимой переменной t размещаются в нулевом столбце $F1^{<0>}$ массива. Они изменяются в пределах от $t0$ до tk с шагом $(tk - t0) / N$. В приведенном примере $t0 = 0$, $tk = 5 \cdot 10^{-6}$ с, $N = N1 = 500$, поэтому шаг изменения аргумента равен $(tk - t0) / N1 = 5 \cdot 10^{-6} / 500 = 10^{-8}$ с.

Найденное численно решение $z_0(t)$ и первая производная $z_1(t)$ записываются соответственно в первом и во втором столбцах – $F1^{<1>}$ и $F1^{<2>}$. Результат решения методом Рунге-Кутты показан графически на рис. 4, б.

	0	1	2
0	0	$1 \cdot 10^{-3}$	0
1	$1 \cdot 10^{-8}$	$9.95 \cdot 10^{-4}$	-995.842
2	$2 \cdot 10^{-8}$	$9.801 \cdot 10^{-4}$	$-1.977 \cdot 10^3$
3	$3 \cdot 10^{-8}$	$9.556 \cdot 10^{-4}$	$-2.933 \cdot 10^3$
4	$4 \cdot 10^{-8}$	$9.216 \cdot 10^{-4}$	$-3.855 \cdot 10^3$
5	$5 \cdot 10^{-8}$	$8.786 \cdot 10^{-4}$	$-4.735 \cdot 10^3$
6	$6 \cdot 10^{-8}$	$8.271 \cdot 10^{-4}$	$-5.563 \cdot 10^3$
7	$7 \cdot 10^{-8}$	$7.675 \cdot 10^{-4}$	$-6.331 \cdot 10^3$
8	$8 \cdot 10^{-8}$	$7.007 \cdot 10^{-4}$	$-7.032 \cdot 10^3$
9	$9 \cdot 10^{-8}$	$6.271 \cdot 10^{-4}$	$-7.66 \cdot 10^3$
10	$1 \cdot 10^{-7}$	$5.477 \cdot 10^{-4}$	$-8.208 \cdot 10^3$

а



б

Рис. 4. Решение задачи Коши в MathCAD

Выполним аналогичный расчет с уменьшенным вдвое шагом при $N = N2 = 1000$ и оценим погрешность решения по правилу Рунге (11):

$$N2 := \text{rkfixed}\left[\left(\begin{matrix} 10^{-3} \\ 0 \end{matrix}\right), t0, tk, N2, f\right] \quad \Delta_i := \frac{|(F2^{<1>})_{2,i} - (F1^{<1>})_i|}{2^{p-1}} \quad \max(\Delta) = 7.7 \times 10^{-10}$$

Таким образом, погрешность решения Δ при шаге $h/2$ не превышает 10^{-9} .

Рассмотрим решение этой же задачи методом Эйлера с использованием рекурсивной процедуры. Изменив для удобства записи обозначения переменных $z_0 \rightarrow Y_0$ и $z_1 \rightarrow Y_1$, преобразуем систему уравнений (17):

$$\begin{cases} \frac{dY_0}{dt} = Y_1 \\ \frac{dY_1}{dt} = -\frac{R}{L}Y_1 - \frac{1}{LC}Y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{Y_{0,i+1} - Y_{0,i}}{\Delta t} \approx Y_{1,i} \\ \frac{Y_{1,i+1} - Y_{1,i}}{\Delta t} \approx -\frac{R}{L}Y_{1,i} - \frac{1}{LC}Y_{0,i} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y_{0,i+1} \approx Y_{0,i} + \Delta t Y_{1,i} \\ Y_{1,i+1} \approx Y_{1,i} - \Delta t \left(\frac{R}{L}Y_{1,i} + \frac{1}{LC}Y_{0,i} \right) \end{cases}$$

Здесь использована замена производных на их приближенные аналоги $dY/dt \approx \Delta Y/\Delta t$. Благодаря этому решение задачи можно представить в MathCAD следующим образом:

$$R := 5 \quad L := 10^{-5} \quad C := 10^{-9} \quad \Delta t := 1 \cdot 10^{-10} \quad t := 0 .. 50000 - 1$$

$$\begin{pmatrix} t_0 \\ Y_{0,0} \\ Y_{1,0} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 10^{-3} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t_{i+1} \\ Y_{0,i+1} \\ Y_{1,i+1} \end{pmatrix} := \begin{bmatrix} t_i + \Delta t \\ Y_{0,i} + \Delta t \cdot Y_{1,i} \\ Y_{1,i} - \Delta t \cdot \left(\frac{R}{L} \cdot Y_{1,i} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot Y_{0,i} \right) \end{bmatrix}$$

В данной записи, соответствующей методу Эйлера (5), параметр Δt – шаг интегрирования, i – счетчик точек решения. Начальные значения переменных t , Y_0 и Y_1 заданы одновременным присваиванием. Используемая в примере рекурсивная ("возвратная") процедура вычисляет последующие точки решения с индексом $i+1$ из предыдущих с индексом i .

Рассчитанные методом Эйлера зависимости $Y_0(t)$ приведены на рис. 5.

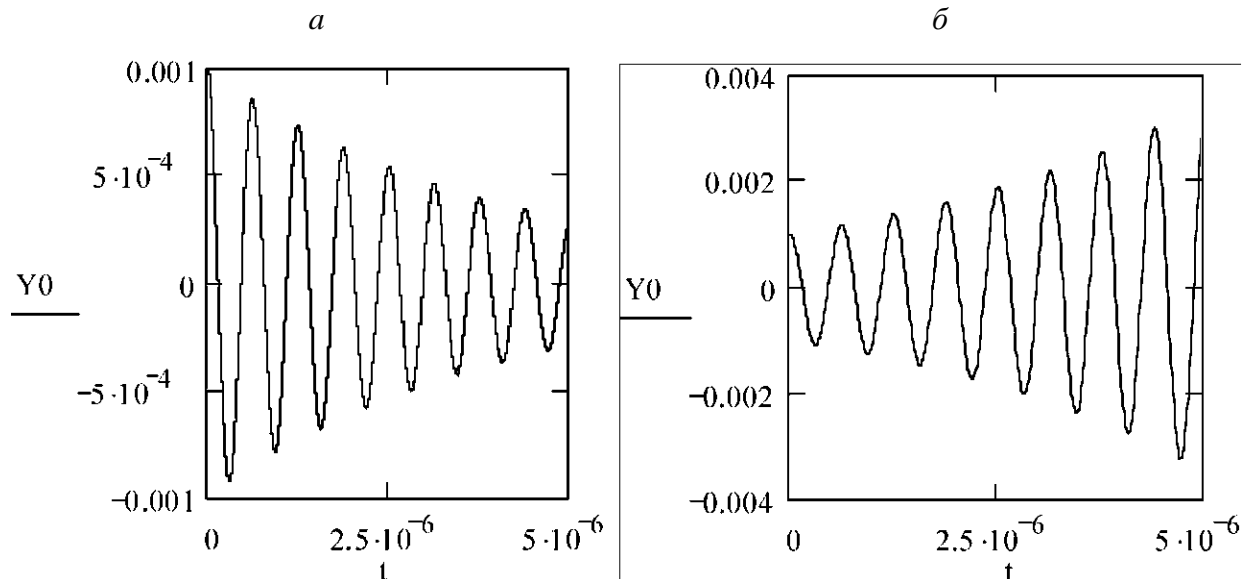


Рис. 5. Расчет методом Эйлера

Зависимость, представленная на рис. 5, *a* получена при $\Delta t = h = 10^{-10}$ с, а на рис. 5, *б* – при $\Delta t = h = 7 \cdot 10^{-9}$ с. В последнем случае неприемлемый с физической точки зрения результат объясняется выбором слишком большого шага интегрирования (см. п. 1.2.4). Метод Эйлера дает корректный результат при $h = 10^{-10}$ с, то есть расчете порядка 50000 точек. Однако оценка погрешности такого решения по правилу Рунге дает $\Delta \sim 1,5 \cdot 10^{-3}$.

Кроме `rkfixed` в MathCAD имеется еще ряд функций, обеспечивающих решение задачи Коши. К ним относятся `odesolve`, `rkadapt`, `Bulstoer`, `Stiffb` и `Stiffc`. Функции `rkadapt` и `Bulstoer` предназначены для решения задач с гладкими функциями и медленно меняющимися решениями, `Stiffb` и `Stiffc` – для задач с жесткими системами. Функция `sbval` позволяет привести краевую задачу к задаче Коши и решить ее методом стрельбы.

2. Практическое занятие №2

МЕТОДИКА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ПАКЕТЕ SIMULINK/MATLAB

2. 1 Решение задача Коши в MATLAB

В MATLAB имеется ряд функций для решения задачи Коши. Одна из них – ode45 – использует метод Рунге-Кутты четвертого-пятого порядка точности с автоматическим выбором размера шага.

Обращение к ode45 выполняется следующим образом (синтаксис приведен для версии 6.X):

$$[T, Y] = \text{ode45}(\text{ODEFUN}, \text{TSPAN}, Y0)$$

Входные параметры процедуры ode45:

ODEFUN - имя функции (в виде строчной переменной), задающей правую часть системы дифференциальных уравнений. Уравнения должны быть записаны в нормальной форме $u' = \text{ODEFUN}(T, Y)$, где u' - вычисляемый вектор-столбец производных;

TSPAN = [T0 TFINAL] - вектор, задающий интервал изменения независимой переменной. T0 - начальная точка, TFINAL - последнее значение аргумента, при котором завершается расчёт;

Y0 - вектор начальных значений зависимых переменных.

Выходные параметры ode45:

T - вектор, содержащий отсчёты аргумента в точках решения;

Y - массив, содержащий вычисленные значения u' и u' в точках, соответствующих отсчетам независимой переменной в T.

Требования к точности и другие параметры численного решения задаются в MATLAB по умолчанию. Изменить эти настройки позволяет дополнительный аргумент OPTIONS (см. help ODESET).

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее колебания в нелинейной системе (например, автогенераторе), и известное как уравнение Ван-дер-Поля:

$$u'' + (u^2 - b) u' + u = 0 ,$$

где u , u' и u'' - функция, её первая и вторая производные по времени t , b - произвольный параметр. Параметр b определяет потери в системе, а слагаемое u^2 в скобках - её нелинейные свойства (например, рабочие характеристики активного элемента автогенератора).

Данное дифференциальное уравнение второго порядка можно привести к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} y_1' = (1 - y_2^2)y_1 - y_2 \\ y_2' = y_1 \end{cases} ,$$

где $y_1 = u'$ и $y_2 = u$, а параметр b принят равным единице.

Для выполнения расчётов воспользуемся внешней функцией `vdp1`, записанной в `m`-файле `vdp1.m`. Эта функция, вычисляющая правую часть уравнения Ван-дер-Поля, имеет следующий вид:

```
function dydt = vdp1(t,y)
dydt = [y(2); (1-y(1)^2)*y(2)-y(1)] .
```

Для получения решения дифференциального уравнения, описываемого функцией `vdp1` на интервале $0 < t < 20$, при начальных условиях $y_1 = u' = 2$ и $y_2 = u = 0$, следует ввести в MATLAB следующую строку:

```
[t,y]=ode45(@vdp1,[0 20],[2 0]).
```

На рис. 6, *а* представлены рассчитанные функцией `ode45` и построенные с помощью команды `plot` зависимости $y_2(t) = u(t)$ и $y_1(t) = u'(t)$.

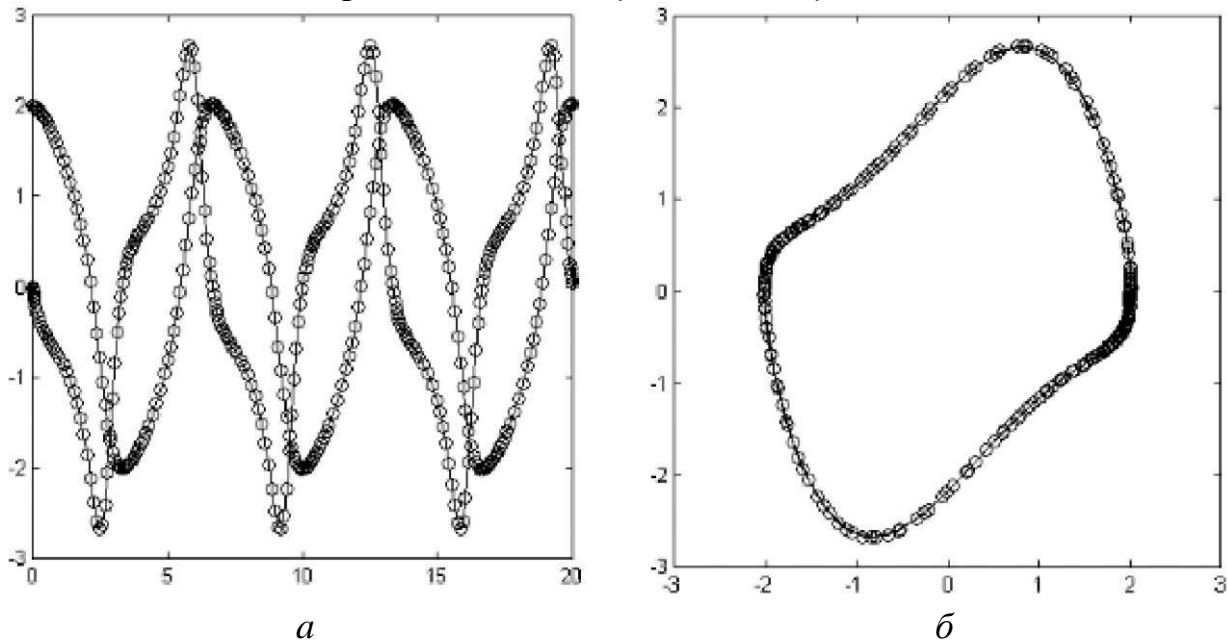


Рис. 6. Результаты решения уравнения Ван-дер-Поля

График на рис. 6, *а* показывает, что с течением времени колебания в системе нарастают. Однако в дальнейшем рост амплитуды колебаний замедляется и система переходит в устойчивое состояние, описываемое фазовыми кривыми y_2 (y_1), представленными на рис. 6, *б*.

Кроме рассмотренной функции `ode45` MATLAB содержит ряд других функций для решения задачи Коши - см. `ode23`, `ode113`, `ode15s`, `ode23s`, `ode23t`, `ode23tb`.

2.2 УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ РАБОТЫ

2.2.1. Подготовка к работе

Изучите методы решения уравнений на ЭВМ, используя указанную литературу. Обратите особое внимание на следующие вопросы:

1. Различие обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных;
2. Отличие формулировок задачи Коши и краевой задачи;
3. Свойства одно- и многошаговых методов решения задачи Коши;
4. Решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

2.2.2. Порядок выполнения работы

1. Формализуйте задачу для решения на ЭВМ. При необходимости произведите ее нормировку и другие преобразования, облегчающие решение на ЭВМ.
2. Выберите программную реализацию решения (с помощью специальных процедур в MATLAB, MathCAD или в виде отдельной программы).
3. Выполните расчет на ЭВМ, используя разные шаги интегрирования, оцените погрешность полученного решения.
4. Оформите отчет по работе.

2.2.3. Содержание отчета

1. Цель работы.
2. Задание.
3. Описание метода решения - сведения из теории (формулы, алгоритм).
4. Распечатка решения задачи на ЭВМ, включая графики и комментарии.
5. Краткие выводы по работе.

2.2.4. Контрольные вопросы

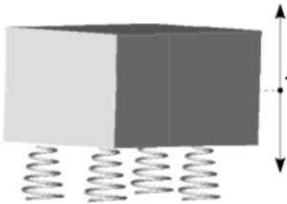
1. Приведите примеры задач с обыкновенными дифференциальными уравнениями. Чем отличаются формулировки задачи Коши и краевой задачи?
2. Назовите основные различия, достоинства и недостатки одношаговых и многошаговых методов решения задачи Коши.
3. Опишите решение задачи Коши методом Эйлера.
4. Опишите решение задачи Коши модифицированным методом Эйлера.
5. Опишите решение задачи Коши методом Рунге-Кутты.
6. Что такое порядок точности метода и как он связан с его эффективностью? Приведите примеры методов разных порядков.
7. Как влияет размер шага при решении задачи Коши на погрешность результата? Как работает процедура автоматического выбора шага?
8. Составьте алгоритм решения задачи Коши для системы двух уравнений первого порядка методом Эйлера.
9. Опишите процедуру решения задачи Коши для уравнения второго порядка одношаговым методом.
10. Поясните понятие устойчивости решения задачи Коши.
11. Опишите решение задачи одним из многошаговых методов.
12. Опишите решение задачи Коши методом предиктор-корректор.
13. Приведите схему решения краевой задачи методом стрельбы с использованием метода деления отрезка пополам.

14. Приведите схему решения краевой задачи методом стрельбы для линейного дифференциального уравнения.
15. Расскажите об особенностях представления чисел в ЭВМ.
16. Для чего используется нормировка уравнений при решении на ЭВМ?
17. Опишите источники погрешностей при решении задач на ЭВМ.

2.3 ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Ниже приведены варианты заданий. Каждое из заданий включает ряд вариантов, отличающихся друг от друга набором исходных данных. Все параметры в формулах, если не оговорено иное, следует записывать в системе СИ.

Задание 1. Для защиты от вибрации приборный блок установлен специальные на упругие опоры (амортизаторы). Его движение на амортизаторах



на амортизаторах $x(t)$ при отсутствии боковых и крутильных колебаний описывается дифференциальным уравнением вида

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

где x - отклонение блока от исходного положения, t - время, m - масса блока, d^2x/dt^2 - ускорение, β - коэффициент трения (в амортизаторах), dx/dt - скорость движения при колебаниях блока, kx - слагаемое, отвечающее за сопротивление упругих элементов (пружин), k - коэффициент жесткости амортизаторов. Суммарная жесткость пружин зависит от деформации x : $k = k_0 (1 + ax^2)$.

Решите уравнение при следующих данных: $\beta = 0,5$ кг/с; начальные условия $x = 1$ см, $dx/dt = 0$ при $t = 0$. Остальные параметры заданы в таблице.

Параметр	В а р и а н т					
	1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
m , кг	12	5	7	9,5	15	4
k_0 , Н/м	0,5	1	1,5	1	2	2
a , 1/м ²	1	-0,5	2	2	+3	-0,5

Получите точки решения, охватывающие не менее пяти периодов колебаний, и постройте по ним соответствующий участок зависимости $x(t)$.

Задание 2. Приборный блок установлен на упругие опоры (амортизаторы). Его вертикальные колебания описывается дифференциальным уравнением, приведенным в задании 1.

Амортизаторы имеют встроенные демпфирующие элементы. Поэтому коэффициент трения β в системе зависит от деформации x : $\beta = \beta_0 (1 + ax^2)$.

Решите уравнение для следующих исходных данных: коэффициент трения $k = 1$ Н/м; начальные условия $x = 1,5$ см и $dx/dt = 0$ при $t = 0$. Остальные параметры заданы в таблице.

Параметр	В а р и а н т					
	2-1	2-2	2-3	2-4	2-5	2-6
m , кг	5	10	8,5	7	3	12
β_0 , кг/с	1,5	1	0,5	0,5	0,3	1
a , 1/м ²	0,5	1	1,5	0,2	0,3	0,3

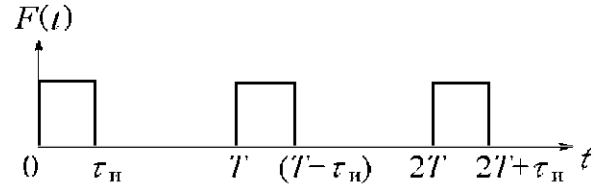
Получите начальные точки решения, охватывающие несколько периодов колебаний, и постройте по ним соответствующий участок зависимости $x(t)$.

Задание 3. Вертикальные колебания механической системы (см. задание 1) под действием вынуждающей силы описывается уравнением вида

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

где x - отклонение системы от исходного положения, t - время, m - масса блока, β - коэффициент трения, k - коэффициент жесткости амортизаторов.

Внешнее воздействие представляет собой периодическую последовательность ударных импульсов $F(t)$

$$F(t) = \begin{cases} F_m & \text{при } nT \leq t < nT + \tau_{\text{и}}, \\ 0 & \text{при } nT + \tau_{\text{и}} \leq t < (n+1)T, \end{cases}$$


где $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$

Решите уравнение для следующих данных: масса $m = 1$ кг; коэффициент трения $\beta = 0,5$ кг/с, коэффициент жесткости $k = 5$ Н/м. Начальные условия $x = 0$ и $dx/dt = 0$ при $t = 0$. Остальные параметры даны в таблице.

Параметр	В а р и а н т					
	3-1	3-2	3-3	3-4	3-5	3-6
$\tau_{\text{и}}, \text{с}$	0,5	1	0,1	0,3	0,2	1,2
$T, \text{с}$	1,5	2	1	1,5	2,5	1,7
$F_m, \text{Н}$	3000	2500	2000	3000	2500	2000

Получите начальные точки решения, охватывающие не менее трех периодов колебаний. Постройте зависимости $F(t)$ и $x(t)$.

Задание 4. Вертикальные колебания механической системы (см. задание 1) под действием последовательности полусинусоидальных импульсов описывается дифференциальным уравнением вида

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + kx = |F_m \cos(\omega t)|,$$

где x - отклонение системы от исходного положения, t - время, m - масса блока, β - коэффициент трения, k - коэффициент жесткости амортизаторов, F_m и ω - параметры вынуждающей силы.

Решите уравнение для следующих данных: масса $m = 3$ кг; коэффициент трения $\beta = 1$ кг/с, коэффициент жесткости $k = \text{Н/м}$. Начальные условия $x = 0$ и $dx/dt = 0$ при $t = 0$. Остальные параметры даны в таблице.

Параметр	В а р и а н т					
	4-1	4-2	4-3	4-4	4-5	4-6
$m, \text{кг}$	2	3	1,5	14	2,5	3
$F_m, \text{Н}$	150	1960	980	720	250	170

Получите участок решения $x(t)$, на котором устанавливаются устойчивые колебания в системе. Постройте зависимости $F(t) = |F_m \cos(\omega t)|$ и $x(t)$.

Задание 5. Прогиб однородной балки под собственным весом при консольном закреплении описывается дифференциальным уравнением



$$y'' = -\frac{PL^2}{EJ} \left(\frac{1}{L} - \frac{x}{L^2} \right) [1 + (y')^2]^{3/2}$$

где L – длина балки, P – удельный вес балки (на единицу длины), EJ – жесткость балки, x – координата ($0 < x < L$). Задавшись начальными условиями $y = 0$ и $y' = 0$ при $x = 0$, получите точки решения $y(x)$ на всей длине балки для указанных параметров.

Параметр	В а р и а н т					
	5-1	5-2	5-3	5-4	5-5	5-6
$L, \text{ м}$	1,5	1	0,9	2	2,5	1

Задание 6. Количество особей в популяциях двух видов, взаимодействующих между собой по типу жертва - хищник, равно соответственно x и y . Изменение популяций во времени описывается системой дифференциальных уравнений (модель Лотки-Вольтерра)



$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy, \\ \frac{dy}{dt} = -cy + dxy, \end{cases}$$

где t – время, ax – скорость размножения жертв, bxy – скорость их истребления с учетом частоты встреч с хищниками, cy – скорость вымирания хищников, dxy – скорость размножения хищников в присутствии жертв.

Задавшись параметрами a, b, c, d и приняв начальные условия x_0, y_0 при $t = 0$, решите задачу. Получите участок решения, на котором наблюдаются повторяющиеся колебания численности популяций. Постройте соответствующие графики $x(t), y(t)$ и $y(x)$.

Параметр	В а р и а н т					
	6-1	6-2	6-3	6-4	6-5	6-6
a	0,15	0,2	3,2	0,2	0,15	0,1
b	0,0001	0,001	2,1	0,001	0,02	0,01
c	1	2,1	1,8	3,1	5	2,7
d	0,005	0,01	1	0,01	0,001	0,002
x_0	200	500	5	1000	10000	1000
y_0	50	150	3	500	200	50

Задание 7. Развитие популяций хищников и их жертв описывается моделью Холлинга-Тэннера:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a \left(1 - \frac{x}{k_1}\right) x - \frac{b}{k_2+x} xy, \\ \frac{dy}{dt} = \left(c - d \frac{y}{x}\right) y, \end{cases}$$



где x и y – относительная численность жертв и хищников соответственно, t – время, ax – скорость размножения жертв, ax/k_1 – учитывает конкуренцию жертв из-за пищи, $bxy/(k_2+x)$ – скорость истребления жертв хищниками с учетом насыщения последних, cy – скорость размножения хищников, cdy^2/x – учитывает вымирание хищников при недостатке пищи x .

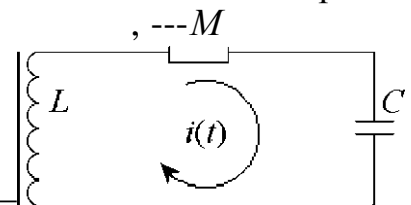
Используя заданные в таблице параметры и начальные условия x_0, y_0 получите участок решения, описывающий колебания $x(t)$ и $y(t)$.

Параметр	В а р и а н т					
	7-1	7-2	7-3	7-4	7-5	7-6
x_0	20	35	7	32	15	50
y_0	5	7	3	17	2	5
a	1,5	1,7	2,7	1,1	2,4	1,6
b	1,5	4,2	3,1	2,9	4,1	5,6
c	0,1	0,6	0,2	0,09	0,08	0,2
d	0,1	0,13	0,05	0,15	0,08	0,1
k_1	8	9,3	7,6	12	5,9	13,5
k_2	1	2,1	2,5	1,5	2,1	1,8

Задание 8. Свободные колебания тока в последовательном электрическом колебательном контуре описываются дифференциальным уравнением

$$L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = 0$$

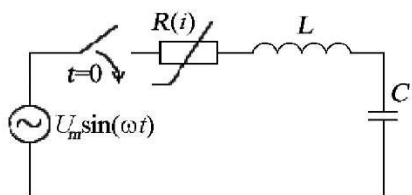
где i – ток, L – индуктивность катушки, R – сопротивление потерь контура, C – емкость конденсатора. Предполагается, индуктивность катушки зависит от протекающего через нее тока: $L = L_0(1 - k i^2)$, где k – коэффициент.



Рассчитайте и постройте график зависимости $i(t)$, охватывающий не менее пяти периодов колебаний, для начальных условий $di/dt = 0$ и $i = 10$ мА при $t = 0$. Остальные параметры указаны в таблице.

Параметр	В а р и а н т					
	8-1	8-2	8-3	8-4	8-5	8-6
R , Ом	1	0,5	1	2	1,5	2
C , мкФ	0,001	0,01	0,1	0,047	0,0068	0,068
L_0 , мкГн	1	5	10	50	50	10
k , 1/А ²	$5 \cdot 10^3$	$9 \cdot 10^3$	10^3	$5 \cdot 10^3$	$4 \cdot 10^2$	10^3

Задание 9. Вынужденные колебания тока в электрическом колебательном контуре (см. рисунок) описываются дифференциальным уравнением



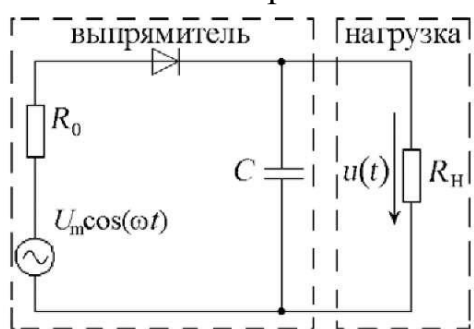
$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = U_m \omega \cos(\omega t),$$

где i – ток, L – индуктивность катушки, R – сопротивление потерь, C – емкость конденсатора, U_m – амплитуда напряжения генератора, $\omega = 2\pi f$ – угловая частота. Сопротивление нелинейного резистора зависит от протекающего через него тока: $R = R_0 (1 + k i^2)$, где k – коэффициент.

Рассчитайте и постройте графики зависимостей $u(t) = U_m \sin(\omega t)$ и $i(t)$, охватывающие несколько периодов колебаний, для $U_m = 1$ В и начальных условий $di/dt = 0$ и $i = 0$ при $t = 0$. Остальные данные приведены в таблице.

Параметр	В а р и а н т					
	9-1	9-2	9-3	9-4	9-5	9-6
R_0 , Ом	2	3	5	3	7,5	1
L , мкГн	1	5	10	50	2	10
C , мкФ	0,001	0,01	0,1	0,047	0,0047	0,068
f , Гц	10^6	$5 \cdot 10^6$	10^5	$2 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^6$	$6 \cdot 10^4$
k , $1/\text{A}^2$	$8 \cdot 10^{10}$	$2 \cdot 10^{14}$	10^{14}	$5 \cdot 10^{10}$	$4 \cdot 10^{15}$	$7 \cdot 10^{12}$

Задание 10. На выходе однополупериодного диодного выпрямителя для ослабления пульсаций напряжения параллельно нагрузке включен конденсатор. Зависимость напряжения u на выходе выпрямителя от времени t описывается



дифференциальным уравнением

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{C} \left(\frac{U_m \cos(\omega t) - u}{R_0 + R_D} - \frac{u}{R_H} \right),$$

где C – емкость конденсатора, R_H – сопротивление нагрузки, R_0 – выходное сопротивление источника переменного напряжения (трансформатора), R_D – сопротивление диода,

U_m – амплитуда переменного напряжения, $c = 2\pi f$ – угловая частота.

Рассчитайте и постройте графики зависимостей $u_0(t) = U_m \cos(\omega t)$ и $u(t)$ при $U_m = 12$ В, $f = 50$ Гц для приведенных в таблице параметров. Начальное условие $u(t=0) = 0$. В расчете используйте аппроксимации

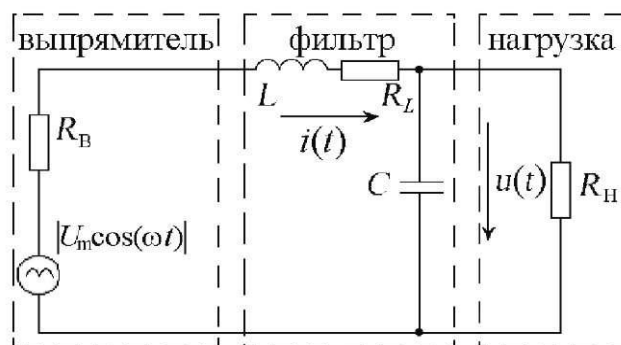
$$R_0 + R_D = \begin{cases} 10^5, & \text{если } u > U_m \cos(\omega t), \\ 5, & \text{если } u \leq U_m \cos(\omega t). \end{cases}$$

Параметр	В а р и а н т					
	10-1	10-2	10-3	10-4	10-5	10-6
R_H , Ом	200	310	170	100	75	180
C , мкФ	2000	500	200	470	5000	680

Задание 11. Напряжение с выхода двухполупериодного диодного выпрямителя подается на нагрузку через LC-фильтр, ослабляющий нежелательные пульсации. Зависимости напряжения u на выходе фильтра и общий ток i в цепи от времени t описываются системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{1}{C} \left(i - \frac{u}{R_H} \right), \\ \frac{di}{dt} = \frac{1}{L} [|U_m \cos(\omega t)| - iR_0 - u], \end{cases}$$

где L и C – индуктивность дросселя и емкость конденсатора фильтра, R_H – сопротивление нагрузки, $R_0 = R_B + R_L$, R_B – выходное сопротивление выпрямителя, R_L – сопротивление обмотки дросселя, U_m – амплитуда пульсирующего напряжения на выходе выпрямителя, $\omega = 2\pi f$ – угловая частота.



Рассчитайте и постройте графики зависимостей $u_B(t) = |U_m \cos(\omega t)|$, $u(t)$ и $i(t)$. Исходные данные: $U_m = 12$ В и $f = 50$ Гц. Начальные условия $u(t = 0) = 0$, $i(t = 0) = 0$. Параметры R_0 , R_H , L и C приведены в таблице.

Параметр	В а р и а н т					
	11-1	11-2	11-3	11-4	11-5	11-6
R_0 , Ом	20	75	35	120	90	20
R_H , Ом	500	1000	750	1000	2000	1000
L , Гн	0,5	0,7	0,1	1	1,2	0,05
C , мкФ	100	40	200	50	100	1000

Задача 12. Уравнение Ван-дер-Поля, описывающее колебания в нелинейной системе (например, автогенераторе), имеет следующий вид:

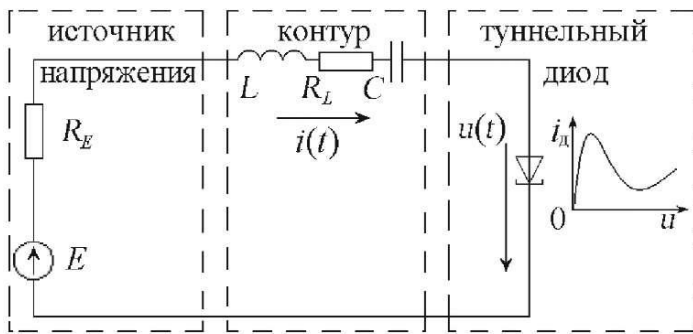
$$y'' + (y^2 - b)y' + y = 0$$

где y , y' и y'' – функция, её первая и вторая производные по времени t . Постоянная b определяет потери в системе. Нелинейные свойства системы, например рабочие характеристики активного элемента генератора, учитываются слагаемым y^2 .

Задавшись указанными в таблице начальными условиями и параметром b , решите уравнение и постройте графики зависимостей $y(t)$ и $y'(t)$, охватывающие несколько периодов колебаний.

Параметр	В а р и а н т					
	12-1	12-2	12-3	12-4	12-5	12-6
$y(0)$	1	0	1	2	2	-3
$y'(0)$	1	1	-2	1	3	20
b	7	$3y$	y	y'	$1,5y'$	0

Задание 13. Генератор, выполненный на туннельном диоде, содержит последовательный электрический LC-контур и источник постоянного напряжения E . Колебания напряжения $u(t)$ и тока $i(t)$ в генераторе описываются



системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{1}{C} [i - i_D(u)], \\ \frac{di}{dt} = \frac{1}{L} [E - iR_0 - u], \end{cases}$$

где t – время, L и C – индуктивность катушки и емкость конденсатора контура, $R_0 = R_E + R_L$, R_E – внутреннее сопротивление источника питания, R_L – сопротивление обмотки катушки индуктивности.

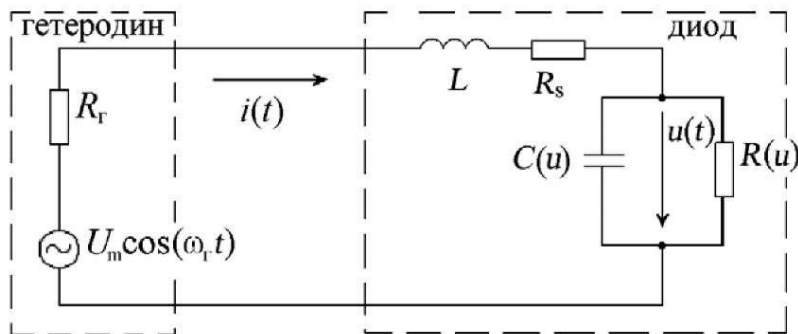
N -образная вольт-амперная характеристика туннельного диода $i_D(u)$ описывается формулой

$$i_D(u) = (0,6u - 14u^3 + 20u^4)\exp(-10u) + 0,02[\exp(u) - 1].$$

Рассчитайте и постройте графики зависимостей $u(t)$ и $i(t)$. Начальные условия $u(t=0) = 0$, $i(t=0) = 0$. Параметры E , R_0 , L и C даны в таблице.

Параметр	В а р и а н т					
	13-1	13-2	13-3	13-4	13-5	13-6
E , В	0,27	0,3	0,22	0,18	0,36	0,19
R_0 , Ом	7	4,2	3,5	4,8	11,3	5,2
L , нГн	20	$7 \cdot 10^3$	$1,5 \cdot 10^4$	10	17	200
C , пФ	12	2200	130	12	27	120

Задание 14. При расчете преобразователя частоты на диоде с барьером Шоттки используется эквивалентная схема, показанная на рисунке.



Элементы $U_m \cos(\omega_r t)$ и на рисунке относятся к гетеродину, напряжение с которого поступает на смесительный диод. Диод представлен эквивалентной схемой, содержащей следующие элементы: L – индуктивность выводов, R_s – омическое сопротивление потерь, $C(u)$ и $R(u)$ – емкость и сопротивление

барьерной области диода, зависящие от обратного смещения на его переходе. Зависимости напряжения u на барьере диода и тока i в общей цепи от времени t могут быть найдены из нелинейной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{1}{C(u)} \left[i - \frac{u}{R(u)} \right], \\ \frac{di}{dt} = \frac{1}{L} [U_m \cos(\omega_r t) - u - i(R_s + R_r)]. \end{cases}$$

Решите систему уравнений при следующих данных: $R_r = 50$ Ом, $L = 1,2$ нГн, $R_s = 6$ Ом. Начальные условия: $u(t) = 0$, $i(t) = 0$ при $t = 0$. Амплитуда U_m и частота f_z колебаний гетеродина указаны в таблице.

Параметр	В а р и а н т					
	14-1	14-2	14-3	14-4	14-5	14-6
L , нГн	1,2	1,5	1,7	1,4	2,2	1,1
R_s , Ом	6	5,5	4,7	5,8	4,8	7
U_m , В	0,65	0,55	0,7	0,8	0,9	0,97
f_z , ГГц	9	14	11	8,2	12	16

В расчете применяйте следующие аппроксимации зависимостей $R(u)$ и $C(u)$ для диода с барьером Шоттки. Для вольт-амперной характеристики используйте формулу

$$i_d(u) = \frac{u}{R(u)} = i_0 [\exp(bu) - 1],$$

где $i_0 = 5 \cdot 10^{-13}$ А, $b = 28$ 1/В. Зависимость $C(u)$ описывается формулой

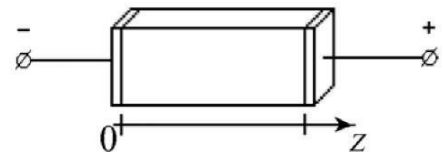
$$C(u) = \frac{C_0}{\sqrt{1 - u/\varphi}},$$

где $C_0 = 0,14$ пФ, $\varphi = 0,85$ В – высота потенциального барьера.

Рассчитайте несколько периодов колебаний и постройте графики зависимостей $u_r(t) = U_m \cos(\omega_r t)$, $u(t)$ и $i(t)$.

Задание 15. Распределение напряженности электрического поля в полупроводнике описывается уравнением Пуассона. Для одномерного случая, когда изменение поля рассматривается только по координате z (вдоль полупроводникового образца), это уравнение можно привести к следующему виду:

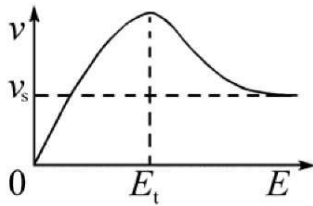
$$\frac{dE}{dz} = \frac{1}{\varepsilon_1} \left(\frac{j}{v} - qN_0 \right),$$



где ε_1 – диэлектрическая (решеточная) проницаемость полупроводника, j – плотность тока вдоль оси Oz , v – дрейфовая скорость электронов вдоль оси Oz , $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл – элементарный заряд, N_0 – уровень легирования полупроводника.

В полупроводнике типа арсенида галлия зависимость дрейфовой скорости v от напряженности электрического поля E существенно нелинейная.

Характеристика $v(E)$ описывается аппроксимацией:



$$v(E) = \frac{\mu_0 E + v_s (E/E_t)^4}{1 + (E/E_t)^4},$$

где $\mu_0 = 0,6 \text{ м}^2/\text{В}\cdot\text{с}$, $v_s = 10^5 \text{ м/с}$, $E_t = 3,5 \cdot 10^5 \text{ В/м}$.

Решите уравнение при следующих данных: диэлектрическая проницаемость $\epsilon_1 = 12,5\epsilon_0 = 12,5 \times 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$, поперечное сечение образца $S = 2,5 \text{ мкм} \times 300 \text{ мкм}$. Ток $i = j S$, протекающий через образец, и начальное значение $E(z)$ при $z = 0$ указаны в таблице.

Рассчитайте зависимость $E(z)$ на участке структуры длиной не менее 50 мкм и найдите соответствующее распределение концентрации свободных носителей заряда $n(z) = j/qv [E(z)]$.

Параметр	В а р и а н т					
	15-1	15-2	15-3	15-4	15-5	15-6
$N_0, \text{ м}^{-3}$	$5 \cdot 10^{20}$	$4,5 \cdot 10^{20}$	$5,3 \cdot 10^{20}$	$4 \cdot 10^{20}$	$5,7 \cdot 10^{20}$	$4,1 \cdot 10^{20}$
$i, \text{ мА}$	5,5	8,3	6,7	7,45	10,6	7,62
$E(0), \text{ В/м}$	$0,1 \cdot 10^5$	$3,7 \cdot 10^5$	$2,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	$3,5 \cdot 10^5$	$3,6 \cdot 10^5$

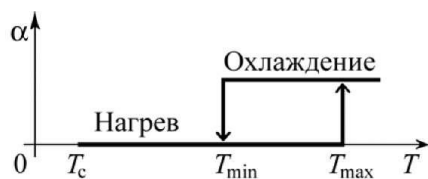
Задание 16. Для охлаждения микропроцессора используется металлический теплоотводящий радиатор. Процесс передачи тепла от радиатора в окружающий воздух описывается дифференциальным уравнением

$$cm \frac{dT}{dt} = P - \alpha S (T - T_c),$$

где m и c – масса и удельная теплоемкость материала радиатора, T – температура радиатора, t – время, P – выделяемая микропроцессором мощность, $\alpha S (T - T_c)$ – отводимое тепло, α – коэффициент теплоотдачи конвекцией,

S – площадь поверхности радиатора, T_c – температура окружающей среды.

Радиатор снабжен вентилятором, который автоматически включается если температура процессора и радиатора превышает допустимый предел, то есть $T > T_{\max}$, и останавливается, если $T < T_{\min}$. Включение обдува эквивалентно изменению коэффициента теплоотдачи α по следующему закону:



$$\alpha = \begin{cases} \alpha_0, & \text{если } T \leq T_{\min} \text{ или } T < T_{\max} \text{ при } dT/dt > 0, \\ \alpha_1, & \text{если } T \geq T_{\max} \text{ или } T > T_{\min} \text{ при } dT/dt < 0, \end{cases}$$

Где α_0 – коэффициент теплоотдачи при выключенном вентиляторе, α_1 – коэффициент теплоотдачи при обдуве.

Рассчитайте участок зависимости $T(t)$, на котором система охлаждения выходит на рабочий режим $T_{min} < T(t) < T_{max}$. Параметры радиатора: $c = 950$ Дж/кг·К, $m = 0,05$ кг, $S = 0,04$ м². Начальную температуру процессора примите равной $T(t=0) = T_c = 293$ К. Прочие данные указаны в таблице.

Параметр	В а р и а н т					
	16-1	16-2	16-3	16-4	16-5	16-6
P , Вт	42	55	27	65	43	22
$\alpha 0$, Вт/м ² ·К	17	15	12	25	21	9
$\alpha 1$, Вт/м ² ·К	80	95	35	82	160	75
T_{min} , К	313	308	313	313	308	303
T_{max} , К	353	343	343	353	343	343

Задание 17. Работа системы автоматического регулирования температуры нагревателя описывается дифференциальным уравнением

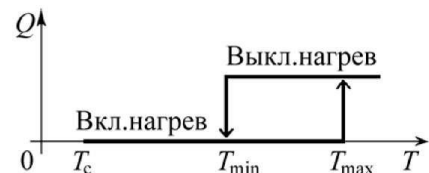
$$cm \frac{dT}{dt} = Q_{вх} - \alpha S(T - T_c),$$

где c и m – удельная теплоемкость и масса нагревателя, T – температура нагревателя, t – время, $Q_{вх}$ – вырабатываемое нагревателем тепло, α – приведенный коэффициент теплоотдачи, S – площадь поверхности нагревателя, T_c – температура окружающей среды.

Для поддержания температуры T заданных пределах $T_{min} < T < T_{max}$ нагреватель мощностью P переключается по следующему закону:

$$Q_{вх} = \begin{cases} P, & \text{если } T \leq T_{min} \text{ или } T < T_{max} \text{ при } dT/dt > 0, \\ 0, & \text{если } T \geq T_{max} \text{ или } T > T_{min} \text{ при } dT/dt < 0, \end{cases}$$

где T_{min} и T_{max} – минимальное и максимальное значения температуры.



Рассчитайте участок зависимости $T(t)$, на котором нагреватель выходит на рабочий режим при начальной его температуре $T(t=0) = T_c$ и $T_{min} = 290$ К, $T_{max} = 295$ К. Мощность P и другие параметры даны в таблице.

Параметр	В а р и а н т					
	17-1	17-2	17-3	17-4	17-5	17-6
P , Вт	2000	250	350	1000	750	500
cm , Дж/К	240	140	100	270	700	470
αS , Вт/К	15	5	8	10	5	7
T_c , К	288	263	275	233	278	293
T_{min} , К	290	290	300	290	313	303
T_{max} , К	295	305	315	325	328	333

Задание 18. Для защиты электрических цепей от перегрузки используются плавкие предохранители. Процесс нагрева плавкого элемента до его разрушения описывается уравнением теплового баланса

$$(c_1 m_1 + c_2 m_2) \frac{dT}{dt} + \alpha S(T - T_C) = i^2 R_0 [1 + \beta(T - T_0)] ,$$

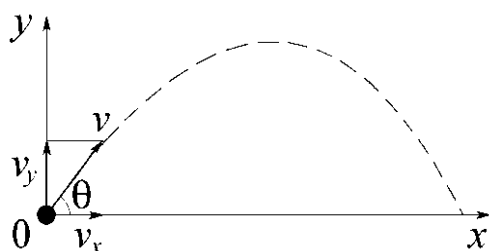
где c_1 и m_1 – удельная теплоемкость и масса плавкого элемента, c_2 и m_2 – удельная теплоемкость и масса среды, в которой находится элемент, T – температура элемента, t – время, α – коэффициент теплоотдачи, S – поверхность охлаждения, T_C – температура окружающей среды, i – ток, протекающий через элемент, R_0 – электрическое сопротивление элемента при $T_0 = 293$ К, β – температурный коэффициент сопротивления.

Эффективность защиты зависит от того, насколько быстро при перегрузке плавкий элемент предохранителя разорвет электрическую цепь.

Рассчитайте зависимость $T(t)$ при начальном условии $T(t=0) = T_C = 293$ К. Слагаемое $c_2 m_2$ в уравнении полагайте равным нулю. Определите время, за которое перегорает предохранитель, если температура плавления его рабочего элемента равна 1373 К.

Параметр	В а р и а н т					
	18-1	18-2	18-3	18-4	18-5	18-6
$c_1 m_1$, Дж/К	$1,7 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$3,3 \cdot 10^{-4}$	$4,4 \cdot 10^{-5}$	$8 \cdot 10^{-4}$	$1,4 \cdot 10^{-3}$
αS , Вт/К	$3 \cdot 10^{-5}$	$3,5 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-5}$	$1,2 \cdot 10^{-5}$	$6 \cdot 10^{-5}$	$7 \cdot 10^{-5}$
R_0 , Ом	0,04	0,014	0,017	0,14	0,006	0,004
i , А	1	2	1,5	0,5	3	5
β , 1/К	0,05	0,06	0,05	0,04	0,07	0,08

Задание 19. Движение снаряда, выпущенного под углом θ к горизонту (см. рисунок), описывается системой дифференциальных уравнений, являющихся уравнениями баланса сил, действующих вдоль координат x и y :



$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k v_x , \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = -k v_y - g m , \end{cases}$$

где $v_x = v \cos\theta$ и $v_y = v \sin\theta$ – горизонтальная и вертикальная составляющая скорости снаряда $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, t – время, k – коэффициент трения, учитывающий сопротивление воздуха, m – масса снаряда, $g \approx 9,8$ м/с² – ускорение свободного падения.

С учетом $v_x = dx/dt$ и $v_y = dy/dt$ исходная система уравнений приводится к следующему виду:

$$\begin{cases} dx/dt = v_x , \\ dv_x/dt = -k/m \cdot v_x , \\ dy/dt = v_y , \\ dv_y/dt = -k/m \cdot v_y - g , \end{cases}$$

Рассчитайте зависимости $x(t)$ и $y(t)$. Постройте траекторию снаряда $y(x)$ из точки $x(t=0)=0$ и $y(t=0)=0$ при заданных k , m , θ и начальной скорости $v(t=0)$.

Параметр	В а р и а н т					
	19-1	19-2	19-3	19-4	19-5	19-6
k , кг/с	1,4	0,05	2,9	1	2	1,8
m , кг	15	0,3	110	42	85	52
$v(t=0)$, м/с	300	10	350	140	300	330
θ , град	15	45	25	33	20	45

Задание 20. Процесс производства, хранения и сбыта товара описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = O - k_1 T(S - V) , \\ \frac{dV}{dt} = k_1 T(S - V) - k_2 V , \\ \frac{dD}{dt} = C k_1 T(S - V) - \frac{O}{C} - k_3 T , \end{cases}$$

где T – количество товара на рынке, V – количество не потребленного товара у покупателей, D – доход в единицу времени, O – объем выпуска товара, k_1 – коэффициент скорости продаж, S – потенциальный спрос (объем товара, удовлетворяющий потребность при отсутствии ажиотажного спроса), C – условная цена товара ($C > 1$), k_2 – коэффициент потребления товара, k_3 – плата за хранение единицы товара. Переменные T , O , V , D и параметры S и C измеряются в условных денежных единицах.

Рассчитайте зависимости $T(t)$, $V(t)$ и $D(t)$ при начальном условии $D(t=0) = 0$. Остальные данные приведены в таблице.

Параметр	В а р и а н т					
	20-1	20-2	20-3	20-4	20-5	20-6
$T(t=0)$	3	10	15	4	12	7
$V(t=0)$	3	20	5	11	12	5
O	11,7	7	21	15	18	32,6
S	15,5	3	18	15	21	18
C	1,2	1,3	1,5	1,1	1,2	1,2
k_1	0,02	0,03	0,2	0,5	0,05	0,02
k_2	3	2	1,1	2	1,3	2,6
k_3	0,01	0,001	0,1	0,05	0,12	0,04

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черный А.А. Математическое моделирование: Учебное пособие. - Пенза: Изд-во ПГУ, 2011. - 256 с . [Электронный ресурс]. <http://window.edu.ru/>
2. . Дьяконов, В.П. MATLAB 6/6.1/6.5 + Simulink 4/5. Основы применения/ В.П. Дьяконов . М.: СОЛОН-Пресс, 2004. 768 с.
3. Дьяконов, В.П. VisSim+Mathcad+MATLAB. Визуальное математическое моделирование. – М.: СОЛОН-Пресс, 2004. – 384 с.
4. Дьяков, В.П. Mathcad 2001. Учебный курс. СПб.: ПИТЕР, 2001. 324с.
5. Семененко, М.Г. Введение в математическое моделирование. М.: Солон-Р, 2002. 206 с.
6. Бенькович, Е.С. Практическое моделирование динамических систем. СПб.: БХВ-Петербург, 2002. 223 с.
7. Карлащук, В.И. Электронная библиотека на IBM PC. М.: Солон, 1999.
8. Глазырин, А.С. Математическое моделирование электромеханических систем. Аналитические методы: учебное пособие / А.С. Глазырин. - Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2009. - 216 с.
9. <https://www.gnu.org>.