

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна

Должность: проректор по учебной работе

Дата подписания: 15.02.2023 13:47:34

Уникальный программный ключ:

0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1c11eabbf73e943df4a4851fda56d089

## МИНОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИИ

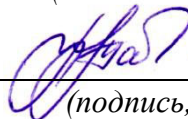
Юго-Западный государственный университет

УТВЕРЖДАЮ:

Заведующий кафедрой

информационной безопасности

*(наименование ф-та полностью)*



М.О. Таныгин

*(подпись, инициалы, фамилия)*

« 29 » августа 2022 г.

ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА  
для текущего контроля успеваемости  
и промежуточной аттестации обучающихся  
по дисциплине

Методы оптимизации

*(наименование дисциплины)*

10.03.01 Информационная безопасность

*(код и наименование ОПОП ВО)*

# 1 ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ

## 1.1 ВОПРОСЫ ДЛЯ УСТНОГО ОПРОСА

Раздел (тема) дисциплины: «Методологические основы оптимизации. Условия экстремума гладких функций»

- 1. Как ставится задача оптимизации?
- 2. Что такое целевая функция?
- 3. Что такое допустимая точка и допустимое множество?
- 4. Как сводится задача максимизации к задаче минимизации?
- 5. Как называется одним словом задача максимизации и минимизации целевой функции?
- 6. Какая задача называется задачей на условный экстремум?
- 7. Какая задача называется задачей на безусловный экстремум?
- 8. Какая точка называется точкой глобального (абсолютного) минимума?
- 9. Какая точка называется точкой локального (относительного) минимума?
- 10. Что называется поверхностью (линией) уровня?
- 11. Что называется градиентом и антиградиентом дифференцируемой функции?
- 12. Что называется матрицей Гессе дважды дифференцируемой функции?
- 13. Как можно записать приращение дважды непрерывно-дифференцируемой функции с помощью градиента и матрицы Гессе этой функции?
- 14. Какая квадратичная форма (матрица Гессе) называется положительно и отрицательно определенной?
- 15. Какая квадратичная форма (матрица Гессе) называется положительно и отрицательно полуопределенной?

- 16. Какая квадратичная форма (матрица Гессе) называется неопределенной?
- 17. Какая функция называется выпуклой? Приведите примеры.
- 18. Какая функция называется строго выпуклой? Приведите примеры.
- 19. Какая функция называется сильно выпуклой?
- 20. Что называется угловыми минорами симметричной матрицы?
- 21. Что называется главными минорами симметричной матрицы?
- 22. Сформулируйте критерий положительной определенности симметричной матрицы в терминах её угловых миноров.
- 23. Сформулируйте критерий отрицательной определенности симметричной матрицы в терминах её угловых миноров.
- 24. Сформулируйте критерий положительной полуопределённости симметричной матрицы в терминах её главных миноров.
- 25. Сформулируйте критерий отрицательной полуопределённости симметричной матрицы в терминах её главных миноров.
- 26. Как ставится задача на безусловный экстремум?
- 27. Сформулируйте необходимые условия экстремума первого порядка.
- 28. Какие точки называются стационарными?
- 29. Сформулируйте необходимые условия минимума (максимума) второго порядка.
- 30. Сформулируйте необходимое условие минимума (максимума) второго порядка в терминах главных миноров матрицы Гессе.
- 31. Сформулируйте достаточные условия экстремума второго порядка.
- 32. Сформулируйте достаточные условия минимума (максимума) второго порядка в терминах угловых миноров матрицы Гессе.
- 33. Опишите стратегию поиска глобального безусловного экстремума.

**Раздел (тема) дисциплины: «Численные методы одномерной минимизации»**

- 1. Для решения какой задачи предназначены методы одномерного поиска?
- 2. Дайте определения минимума и максимума функции одной переменной.
- 3. Дайте определение стационарной точки.
- 4. Дайте определение интервала неопределенности.
- 5. Из каких этапов состоит большинство методов одномерного поиска?
- 6. Какое наименьшее количество точек на графике функции надо знать, чтобы определить интервал неопределенности?
- 7. Какое наименьшее количество точек внутри интервала неопределенности необходимо определить, чтобы уменьшить этот интервал?
- 8. Сформулируйте правило исключения интервалов.
- 9. Чем отличается пассивная стратегия поиска?
- 10. Какое назначение метода равномерного поиска?
- 11. Опишите метод равномерного поиска.
- 12. Как оценивается эффективность метода равномерного поиска?
- 13. Какие преимущества и недостатки метода равномерного поиска?
- 14. Чем отличаются последовательные методы одномерного поиска?
- 15. Какое назначение метода дихотомии?
- 16. Какие основные принципы метода дихотомии?
- 17. Опишите метод дихотомии.
- 18. Как оценивается эффективность метода дихотомии?
- 19. Какого порядка метод дихотомии?
- 20. В чем заключаются преимущества и недостатки метода дихотомии?
- 21. Какая задача привела к открытию золотого сечения?
- 22. Выведите уравнение золотого сечения.
- 23. Приведите численное представление золотого сечения.

- 24 Укажите алгебраические свойства золотого сечения.
- 25. Какова особенность золотой прогрессии?
- 26. Какое назначение метода золотого сечения?
- 27. Опишите метод золотого сечения.
- 28. Как начинается поиск минимума в методе золотого сечения?
- 29. Как оценивается эффективность метода золотого сечения?
- 30. Какого порядка метод золотого сечения?
- 31. Какие преимущества и недостатки метода золотого сечения?
- 32. Какое назначение метода ломаных?
- 33. Опишите метод ломаных.
- 34. Уменьшение значения константы Липшица приводит к замедлению метода ломаных. Объясните этот факт с помощью геометрической иллюстрации.
- 35. Покажите, что если в методе ломаных используется ошибочно заниженное значение константы Липшица, то задача минимизации будет решена неверно.

**Раздел (тема) дисциплины: «Численные методы безусловной минимизации функции многих переменных»**

- 1. Дайте определение направления спуска.
- 2. Какие методы многомерной минимизации функций называются методами спуска?
- 3. Запишите условие точного одномерного поиска в многомерном пространстве.
- 4. Приведите формулы итерации метода спуска.
- 5. Составьте алгоритм метода спуска.
- 7. Дайте определение направления наискорейшего спуска. Опишите метод наискорейшего спуска.
- 8. По какому принципу задается направление шага в методе наискорейшего спуска?

- 9. Как вычисляется величина шага в методе наискорейшего спуска?
- 10. Как заканчиваются вычисления в методе наискорейшего спуска?
- 11. Какого порядка метод наискорейшего спуска?
- 12. Составьте алгоритм метода наискорейшего спуска.
- 13. Какова особенность траектории поиска для метода наискорейшего спуска?
- 14. Укажите достоинства и недостатки метода наискорейшего спуска.
- 15. Представьте в общем виде положительно определенную квадратичную функцию.
- 16. Запишите формулу для градиента квадратичной функции.
- 17. Приведите свойства квадратичной функции.
- 18. Выведите условие точного одномерного поиска для функции многих переменных.
- 19. Выведите условие точного одномерного поиска для квадратичной функции многих переменных.
- 20. Дайте определение сопряженных направлений.
- 21. В чем заключается основная идея метода сопряженных направлений для квадратичной функции многих переменных?
- 22. Запишите итерационные формулы метода сопряженных градиентов для квадратичной функции многих переменных.
- 23. Опишите метод сопряженных градиентов для квадратичной функции многих переменных.
- 24. По какому принципу задаются направление и шаг в методе сопряженных градиентов для квадратичной функции многих переменных?
- 25. Какого порядка метод сопряженных градиентов?
- 26. Запишите формулу Флетчера- Ривса.
- 27. Запишите итерационные формулы метода Флетчера - Ривса.
- 28. Опишите метод Флетчера - Ривса.

- 29. Как вычисляется величина шага в методе Флетчера - Ривса?
- 30. Как заканчиваются вычисления в методе Флетчера - Ривса?
- 31. Какого порядка метод Флетчера - Ривса?
- 32. Составьте алгоритм метода Флетчера- Ривса.
- 33. Составьте алгоритм экономного метода Флетчера - Ривса.
- 34. Укажите достоинства и недостатки метода Флетчера - Ривса.
- 35. Дайте определение рестарта в методе Флетчера - Ривса.
- 36. Обоснуйте необходимость применения рестартов в методе Флетчера - Ривса.
- 37. Раскройте роль рестартов в повышении эффективности метода Флетчера - Ривса.
- 38. В чем заключается основная идея метода Ньютона?
- 39. Представьте функцию многих переменных рядом Тейлора, ограничиваясь слагаемым второго порядка малости.
- 40. Выведите формулу метода Ньютона.
- 41. Дайте определение метода Ньютона для решения задачи безусловной минимизации функции многих переменных.
- 42. Приведите различные формулы метода Ньютона.
- 43. Запишите итерационные формулы метода Ньютона. Опишите метод Ньютона.
- 44. Какой принцип задания направления шага в методе Ньютона?
- 45. Как вычисляется величина шага в методе Ньютона?
- 46. Как заканчиваются вычисления в методе Ньютона?
- 47. Какого порядка метод Ньютона?
- 48. Составьте алгоритм метода Ньютона.
- 49. При каком условии направление поиска в методе Ньютона будет направлением спуска?
- 50. Какое другое название метода Ньютона вы знаете?

- 51. Укажите достоинства и недостатки метода Ньютона.
- 52. Обоснуйте метод Ньютона с одномерным поиском.
- 53. Запишите формулы метода Ньютона с одномерным поиском.
- 54. Опишите метод Ньютона с одномерным поиском.
- 55. Как находят шаг в методе Ньютона с одномерным поиском?
- 56. Как заканчиваются вычисления в методе Ньютона с одномерным поиском?
- 57. Какого порядка метод Ньютона с одномерным поиском?
- 58. Составьте алгоритм метода Ньютона с одномерным поиском.
- 59. Укажите достоинства и недостатки метода Ньютона с одномерным поиском.
- 60. Приведите формулу метода Марквардта.
- 61. Какой принцип задания направления в методе Марквардта?
- 62. Как задаются параметры в методе Марквардта?
- 63. Запишите итерационные формулы метода Марквардта.
- 64. Опишите метод Марквардта.
- 65. Как вычисляется величина шага в методе Марквардта?
- 66. Как заканчиваются вычисления в методе Марквардта?
- 67. Какого порядка метод Марквардта?
- 68. Составьте алгоритм метода Марквардта.
- 68. Укажите достоинства и недостатки метода Марквардта.
- 70. Обоснуйте метод Марквардта с одномерным поиском.
- 71. Запишите итерационные формулы метода Марквардта с одномерным поиском.
- 72. Опишите метод Марквардта с одномерным поиском.
- 73. Как находят шаг в методе Марквардта с одномерным поиском?
- 74. Как заканчивают метод Марквардта с одномерным поиском?



- 75. Какого порядка метод Марквардта с одномерным поиском?
- 76. Дайте алгоритм метода Марквардта с одномерным поиском.
- 77. Укажите достоинства и недостатки метода Марквардта с одномерным поиском.
- 78. В чем заключается основная идея метода Пауэлла?
- 79. Запишите итерационные формулы метода Пауэлла.
- 80. Опишите метод Пауэлла.
- 81. По какому принципу задается направление шага в методе Пауэлла?
- 82. Как вычисляется величина шага в методе Пауэлла?
- 83. Как заканчиваются вычисления в методе Пауэлла?
- 84. Какого порядка метод Пауэлла?
- 85. Составьте алгоритм метода Пауэлла.
- 86. Укажите достоинства и недостатки метода Пауэлла.  
метод поиска по симплексу, метод Хука-Дживса
- 87. Опишите метод Хука-Дживса.
- 88. По какому принципу определяется направление спуска в методе Хука-Дживса?
- 89. Как проводится исследующий поиск?
- 90. Как проводится поиск по образцу?
- 91. Какого порядка метод Хука-Дживса?
- 92. Составьте алгоритм метода Хука-Дживса.
- 93. Укажите достоинства и недостатки метода Хука-Дживса.
- 94. Опишите метод деформируемого многогранника (поиска по симплексу).
- 95. Как задается координаты вершин многогранника?
- 96. Как проводится операция «отражения»?
- 97. Опишите операцию «растяжения»?

- 98. Опишите операцию «редукции»?
- 99. Какого порядка метод деформируемого многогранника?
- 100. Составьте алгоритм деформируемого многогранника.
- 101. Укажите достоинства и недостатки метода деформируемого многогранника.

**Раздел (тема) дисциплины: «Численные методы условной оптимизации»**

- 1. Сформулируйте принципы построения алгоритмов условной оптимизации.
- 2. Опишите метод штрафов.
- 3. Какая функция называется вспомогательной и как она строится?
- 4. Какая функция называется штрафной?
- 5. Как строится штрафная функция?
- 6. Составьте алгоритм условной минимизации методом штрафов.
- 7. Обсудите сходимость метода штрафов.
- 8. Укажите достоинства и недостатки метода штрафов.
- 9. Опишите метод барьерных функций.
- 10. Что такое обратная и логарифмическая штрафная функция?
- 11. Составьте алгоритм условной минимизации методом барьерных функций.
- 12. Как формулируется сходимость метода барьерных функций? Укажите достоинства и недостатки метода барьерных функций.
- 13. В чем состоит идея комбинированного метода штрафных функций.
- 14. Опишите стратегию поиска.
- 15. Составьте алгоритм условной минимизации комбинированным методом штрафных функций.
- 16. Укажите достоинства и недостатки метода комбинированного метода штрафных функций.

**Шкала оценивания:** балльная

### Критерии оценки

Оценка «**7 баллов**» выставляется обучающемуся, если он демонстрирует глубокое знание содержания вопроса, дает точные определения основных понятий, аргументированно и логически стройно излагает учебный материал, иллюстрирует свой ответ актуальными примерами (типовыми и нестандартными), в том числе самостоятельно найденными, не нуждается в уточняющих и (или) дополнительных вопросах преподавателя.

Оценка «**5 баллов**» выставляется обучающемуся, если он владеет содержанием вопроса, но допускает некоторые недочеты при ответе, допускает незначительные неточности при определении основных понятий, недостаточно аргументированно и (или) логически стройно излагает учебный материал, иллюстрирует свой ответ типовыми примерами.

Оценка «**3 балла**» выставляется обучающемуся, если он освоил основные положения контролируемой темы, но недостаточно четко дает определение основных понятий и дефиниций, затрудняется при ответах на дополнительные вопросы, приводит недостаточное количество примеров для иллюстрирования своего ответа, нуждается в уточняющих и (или) дополнительных вопросах преподавателя.

Оценка «**0 баллов**» выставляется обучающемуся, если он не владеет содержанием вопроса или допускает грубые ошибки, затрудняется дать основные определения, не может привести или приводит неправильные примеры, не отвечает на уточняющие и (или) дополнительные вопросы преподавателя или допускает при ответе на них грубые ошибки

## 1.2 КЕЙС-ЗАДАЧИ

**1.** Найдите значение  $a$ , при котором достигает максимума функция

$f(a) = \exp(-(x_1^2 + x_2^2)/2)$ , где  $x_1, x_2$  — корни квадратного уравнения  $x^2 + ax + 3a - 1 = 0$ .

**2.** Требуется спроектировать емкость в виде прямого кругового цилиндра фиксированного объема  $V$ , имеющего наименьшую длину швов.

(а) Постройте графики целевой функции и функции ограничения.

(б) Проиллюстрируйте решение задачи графически.

**3.** Требуется спроектировать емкость в виде прямой призмы (без крышки), на изготовление которой будет затрачено наименьшее количество листового материала. Основанием призмы является квадрат с стороной  $a$ .

Объем призмы фиксирован и равен  $1 \text{ см}^3$ .

*Указание к задаче:* Объем призмы  $V = SH$ , где  $S$  – площадь основания,  $H$  – высота.

4. Требуется поставить палатку в форме правильной четырехугольной пирамиды, имеющей боковую поверхность  $S_{\text{бок}} = 6\sqrt{3} \text{ м}^2$ . Каковы должны быть размеры палатки (сторона основания  $a$  и высота  $H$ ), чтобы объем палатки был наибольший? Проиллюстрируйте решение задачи графически.

5. Требуется изготовить полотняный шатер, имеющий форму кругового конуса заданной вместимости  $V = 9\pi/2 \text{ м}^3$ . Каковы должны быть размеры конуса (высота  $H$  и радиус основания  $R$ ), чтобы на шатер ушло наименьшее количество полотна?

*Указание:* Площадь кругового сектора  $S = \frac{Lr}{2}$ ,  $L$  – длина дуги,  $r$  – радиус сектора.

6. Цистерна имеет форму прямого круглого цилиндра, завершено с одной стороны полушарием. Вместимость цистерны  $V = 40\pi/3 \text{ м}^3$ . Найдите радиус  $R$  цилиндра, при котором цистерна будет иметь наименьшую полную поверхность.

*Указание:* Объем шара  $V = 4\pi R^3/3$ , площадь поверхности шара  $S = 4\pi R^2$ .

6. Требуется изготовить коническую воронку с образующей  $L$ , равной 20 м. Какова должна быть высота воронки  $H$ , чтобы ее объем был наибольшим?

7. Требуется спроектировать емкость в виде прямой призмы (без крышки), имеющей наименьшую длину швов. Основанием призмы является равносторонний треугольник с стороной  $a$ . Объем призмы фиксирован и равен  $1 \text{ см}^3$ .

*Указание к задаче:* Объем призмы  $V = SH$ , где  $S$  – площадь основания  $S = \frac{a^2\sqrt{4}}{4}$ ,  $H$  – высота.

8. Из куска проволоки, длиной  $L$  требуется согнуть прямоугольник так, чтобы его площадь была наибольшей.

9. (задача Евклида). В заданный треугольник  $ABC$  с высотой  $H$  и осно-

ванием  $b$  вписать параллелограмм наибольшей площади, стороны которого параллельны двум сторонам треугольника.

*Указание к задаче:* Условие, что параллелограмм вписан в треугольник, определяется  $(H - h)/H = a/b$ , где  $a$  и  $h$  – основание и высота параллелограмма.

**10.** Найдите стороны прямоугольника, вписанного в окружность радиуса  $R$  и имеющего наибольшую площадь  $S$ .

*Указание к задаче:* Условие, что прямоугольник вписан в окружность радиуса  $R$ , определяется  $a^2 + b^2 = 4R^2$ , где  $a$  и  $b$  – стороны прямоугольника.

**11.** В прямой круговой конус вписан прямой круговой цилиндр так, что основания конуса и цилиндра лежат в одной плоскости. Найдите наибольшую возможную часть объема конуса, занятую цилиндром.

*Указание к задаче:* Условие, что прямой круговой конус вписан прямой круговой цилиндр, определяется равенством  $r/R = (H - h)/H$ , где  $r$ ,  $h$  – радиус основания и высота цилиндра;  $H$ ,  $R$  – высота и радиус основания конуса.

**Общие указания:**

(а) **Пирамида называется правильной**, если основание ее – правильный многоугольник и высота падает в центр основания. В правильной пирамиде все боковые ребра равны, а все боковые грани – равные равнобедренные треугольники. Высота боковой грани называется **апофемой** правильной пирамиды.

(б) **Формула площади боковой поверхности** правильной пирамиды:

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}P \cdot L,$$

$P$  – периметр основания;  $L$  – апофема (перпендикуляр, опущенный из вершины на ребро основания).

(в) **Апофема** правильной пирамиды  $L = \sqrt{H^2 + r^2}$ , где  $H$  – высота пирамиды,  $r$  – радиус вписанной окружности в правильный многоугольник (основание правильной пирамиды).

(г) **Объем**  $V$  всякой пирамиды равен

$$V = \frac{1}{3}SH,$$

где  $S$  – площадь основания,  $H$  – высота пирамиды.

**12.** Проверить, являются ли точки  $\mathbf{x}_* = (2, 0, 1)^T$  и  $\mathbf{x}_* = (0, 0, 0)^T$  точками безусловного экстремума функции:  $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_1x_3$ .

**13.** Проверить, являются ли точки  $\mathbf{x}_* = (0, 0)^T$ ,  $\mathbf{x}_* = (1, 1)^T$ ,  $\mathbf{x}_* = (-1, -1)^T$  точками безусловного экстремума функции:  $f(\mathbf{x}) = x_1^4 + x_2^4 - (x_1 + x_2)^2$ .

**14.** Найти безусловный экстремум функции  $f(\mathbf{x}) = 2x_1^3 + 4x_1x_2^2 - 10x_1x_2 + x_2^2$ .

**15.** Найти безусловный экстремум функции  $f(\mathbf{x}) = x_1^3 - x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 + 3x_2 - 4$ .

**16.** Методом *деления интервала пополам* решите задачу одномерной минимизации:

$$f(x) = x^3 - \sin x, L_0 = [0; 1].$$

**17.** Методом *деления интервала пополам* решите задачу одномерной минимизации:

$$f(x) = x^4 + x^2 + x + 1, L_0 = [-1; 0].$$

**18.** Методом *дихотомии* решите задачу одномерной минимизации:

$$f(x) = x \sin(1/x), L_0 = [0.2; 1.0].$$

**19.** Методом *дихотомии* решите задачу минимизации:

$$f(x) = x \sin x + 2 \cos x, L_0 = [-6; -4].$$

**20.** Методом *золотого сечения* решите задачу одномерной минимизации:

$$f(x) = 10x \ln x - \frac{x^2}{2}, L_0 = [0.1; 1.0];$$

**21.** Методом *золотого сечения* решите задачу минимизации:

$$f(x) = e^x - \frac{x^3}{3} + 2x, L_0 = [-2.5; -1.0].$$

**22.** Методом *ломаных* решите задачу минимизации:

$$f(x) = x^2 - 2x - 2 \cos x, L_0 = [-0.5; 1.0].$$

**23.** Методом *ломаных* решите задачу минимизации:  $f(x) = (x - 1)^2 \sin x$ ,  $L_0 = [-2.0; 3.0]$ ю

**24.** Методом *ломаных* решите задачу минимизации:  $f(x) = x^4 + e^x$ ,  $L_0 = [0.0; 1.0]$ .

*Указания.* Для каждого реализованного метода оценить число итераций, необходимое для определения точки минимума  $x_*$  с заданной точностью.  $\varepsilon$  ( $\varepsilon \approx \sqrt{\text{masheps}}$ ). Провести сравнение методов. Алгоритм метода ломаных проиллюстрировать графически.

**25.** Применить метод наискорейшего градиентного спуска для минимизации квадратичной функции (выполните 2 итерации)

$f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 + x_1$ , при начальном приближении  $x_0 = (0, 0)^T$ ;

**26.** Применить метод наискорейшего градиентного спуска для минимизации скалярной квадратичной функции

$f(x) = \frac{1}{2}ax^2 + bx + c$ , где  $a > 0, b, c$  – произвольные константы.

**27.** Сформулируйте теоретическое обоснование сходимости градиентного метода с постоянным шагом  $\alpha_k = \alpha$  для функции  $f(x)$ :

$$x_{k+1} = x_k - \alpha f'(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

Т.е. найдите такие  $\alpha$ , для которых последовательность  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ , определяемая формулой (1), сходится к точке минимума функции  $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 + bx + c$ .

**28.** Проверьте полученное условие сходимости численно для заданных значений  $a, b, c$ :  $a = 3, b = -6, c = 1$ . Оцените скорость сходимости в зависимости от величины  $\alpha$ .

**29.** Решить задачу минимизации функции

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T A \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x}$$

методом наискорейшего градиентного спуска. Построить линии уровня с указанием траектории движения. Варианты:

$$A = \begin{bmatrix} N & -N \\ -N & N + 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3N - 1 \\ 5N + 3 \end{bmatrix}.$$

Параметр  $N$  равен номеру студента в списке группы.

**30.** Решить численно задачу минимизации квадратичной функции методом сопряженных градиентов. Построить график функции и линии уровня:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T A \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x},$$

$$A = \begin{bmatrix} N & -N \\ -N & N + 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} N - 1 \\ N + 3 \end{bmatrix}.$$

Параметр  $N$  равен номеру студента в списке группы.

**31.** Решить численно задачу минимизации методом Ньютона-Рафсона:

$$f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 + x_1;$$

**32.** Решить численно задачу минимизации методом Ньютона-Рафсона:

$$f(x_1, x_2) = 64x_1^2 + 64x_1x_2 + 126x_2^2 - 10x_1 + 30x_2 + 13.$$

**33.** Решить численно задачу минимизации функции методом Ньютона-Рафсона:

$$f(x_1, x_2) = 129x_1^2 - 256x_1x_2 + 129x_2^2 - 51x_1 - 149x_2 - 27.$$

**34.** Решить численно задачу минимизации функции методом Ньютона-Рафсона:

$$f(x_1, x_2) = 254x_1^2 + 506x_1x_2 + 254x_2^2 + 50x_1 + 130x_2 - 111.$$

**35.** Решить численно задачу функции методом Ньютона-Рафсона:

$$f(x_1, x_2) = 151x_1^2 - 300x_1x_2 + 151x_2^2 + 33x_1 + 99x_2 + 48.$$

**36.** Решить численно задачу функции методом Ньютона-Рафсона:

$$f(x_1, x_2) = 85x_1^2 + 168x_1x_2 + 85x_2^2 + 29x_1 - 51x_2 + 83.$$

**37.**

Решить численно задачу минимизации функции методом Ньютона-Рафсона:

$$f(x_1, x_2) = 211x_1^2 - 420x_1x_2 + 211x_2^2 - 192x_1 + 52x_2 - 25.$$

**38.** Решить численно задачу минимизации функции методом Ньютона-Рафсона:

$$f(x_1, x_2) = 194x_1^2 + 376x_1x_2 + 19x_2^2 + 31x_1 - 229x_2 + 4.$$

**39.**

Решить численно задачу минимизации функции методом Ньютона-Рафсона:

$$f(x_1, x_2) = 45x_1^2 - 88x_1x_2 + 45x_2^2 + 102x_1 + 268x_2 - 21.$$

**40.** Решить численно задачу минимизации функции методом Ньютона-Рафсона:

$$f(x_1, x_2) = 99x_1^2 + 196x_1x_2 + 99x_2^2 - 95x_1 - 9x_2 + 9.$$

**41.** Решить численно задачу минимизации функции методом Ньютона-Рафсона:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1 - 4x_2, x_0 = (0, 0)^T.$$

**42.** Методом барьерных функций найти условный минимум (использовать логарифмическую штрафную функцию)  $f(x) = 3x^2 - x, x - 2 \leq 0$ .

**43.** Методом штрафных функций найти условный максимум  $f(x) = -4x_1^2 - 8x_1 + x_2 + 3, -x_1 - x_2 = 2$

**44.** Методом штрафных функций найти условный максимум

$$f(x) = x_1 - 2x_2^2 + 4x_2, 3x_1 + 2x_2 = -6.$$

**45.** Методом штрафных функций найти условный максимум



$$f(x) = -8x_1 + 4x_1^2 - x_2^2 + 12x_2 - 7, \quad 2x_1 + 3x_2 = -6.$$

45. Методом барьерных функций найти условный минимум

$$f(x) = 4/x_1 + 9/x_2 + x_1 + x_2$$

$$, \quad x_1 + x_2 \leq 6, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

### Шкала оценивания: балльная

#### Критерии оценки

Оценка «**3 балла**» выставляется обучающемуся, если задача решена правильно, в установленное преподавателем время или с опережением времени, при этом обучающимся предложено нестандартное или наиболее эффективное (или наиболее рациональное, или оптимальное) ее решение.

Оценка «**2 балла**» выставляется обучающемуся, если задача решена правильно, в установленное преподавателем время, типовым способом; допускается наличие несущественных недочетов.

Оценка «**1,5 балл**» выставляется обучающемуся, если при решении задачи допущены ошибки некритического характера и (или) превышено установленное преподавателем время.

Оценка «**0 баллов**» выставляется обучающемуся, если задача не решена или при ее решении допущены ошибки критического характера.

## 2 ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ

### 2.1 ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

- 1. Как ставится задача оптимизации?
- 2. Что такое целевая функция?
- 3. Что такое допустимая точка и допустимое множество?
- 4. Как сводится задача максимизации к задаче минимизации?
- 5. Как называется одним словом задача максимизации и минимизации целевой функции?
- 6. Какая задача называется задачей на условный экстремум?
- 7. Какая задача называется задачей на безусловный экстремум?

- 8. Какая точка называется точкой глобального (абсолютного) минимума?
- 9. Какая точка называется точкой локального (относительного) минимума?
- 10. Что называется поверхностью (линией) уровня?
- 11. Что называется градиентом и антиградиентом дифференцируемой функции?
- 12. Что называется матрицей Гессе дважды дифференцируемой функции?
- 13. Как можно записать приращение дважды непрерывно-дифференцируемой функции с помощью градиента и матрицы Гессе этой функции?
- 14. Какая квадратичная форма (матрица Гессе) называется положительно и отрицательно определенной?
- 15. Какая квадратичная форма (матрица Гессе) называется положительно и отрицательно полуопределенной?
- 16. Какая квадратичная форма (матрица Гессе) называется неопределенной?
- 17. Какая функция называется выпуклой? Приведите примеры.
- 18. Какая функция называется строго выпуклой? Приведите примеры.
- 19. Какая функция называется сильно выпуклой?
- 20. Что называется угловыми минорами симметричной матрицы?
- 21. Что называется главными минорами симметричной матрицы?
- 22. Сформулируйте критерий положительной определенности симметричной матрицы в терминах её угловых миноров.
- 23. Сформулируйте критерий отрицательной определенности симметричной матрицы в терминах её угловых миноров.
- 24. Сформулируйте критерий положительной полуопределённости симметричной матрицы в терминах её главных миноров.
- 25. Сформулируйте критерий отрицательной полуопределённости симметричной матрицы в терминах её главных миноров.

- 26. Как ставится задача на безусловный экстремум?
- 27. Сформулируйте необходимые условия экстремума первого порядка.
- 28. Какие точки называются стационарными?
- 29. Сформулируйте необходимые условия минимума (максимума) второго порядка.
- 30. Сформулируйте необходимое условие минимума (максимума) второго порядка в терминах главных миноров матрицы Гессе.
- 31. Сформулируйте достаточные условия экстремума второго порядка.
- 32. Сформулируйте достаточные условия минимума (максимума) второго порядка в терминах угловых миноров матрицы Гессе.
- 33. Опишите стратегию поиска глобального безусловного экстремума.
- 34. Пусть  $f(x)$  — дифференцируемая унимодальная функция на отрезке  $[a, b]$ . Оцените точность  $\varepsilon(M)$  при определении минимума  $f(x)$  методом равномерного поиска в результате вычисления  $M$  значений  $f(x)$ .
- 35. Интервал неопределенности минимума унимодальной функции.
- 36. Метод равномерного поиска.
- 37. Метод дихотомии.
- 38. Метод деления интервала пополам.
- 39. Золотое сечение и его свойства.
- 40. Метод золотого сечения.
- 41. Метод ломаных.
- 42. Зависит ли точность определения точки минимума, которую гарантируют методы дихотомии, золотого сечения в результате  $M$  вычислений, от конкретной функции?
- 43. Покажите, что погрешность определения точки минимума функции  $f(x)$  методом равномерного не превосходит величины  $\varepsilon_n = \frac{b-a}{n}$ .

- 44. Покажите, что в методе дихотомии число итераций, необходимое для определения точки минимума с точностью  $\varepsilon$ , определяется формулой

$$n \geq \log_2 \frac{b - a - \delta}{2\varepsilon - \delta}.$$

- 45. Покажите, что число итераций, необходимое для достижения заданной точности  $\varepsilon$  определения точки минимума на отрезке  $[a, b]$ , в методе золотого сечения оценивается формулой

$$n \geq \ln \frac{2\varepsilon}{b - a} / \ln \Phi, \quad \Phi = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

- 46. Зависит ли точность определения точки минимума, которую гарантируют метод квадратичной интерполяции в результате  $M$  вычислений, от конкретной функции?
- 47. Что такое золотое сечение отрезка? Чему равна величина  $\Phi$ ? Перечислите свойства золотого сечения отрезка, на которых базируется правило вычисления пробных точек в алгоритме минимизации.
- 48. Является ли условие  $f'(x_*) = 0$  достаточным, для того чтобы число  $x_*$  было точкой минимума унимодальной, но невыпуклой функции  $f(x)$ ?
- 49. Получите итерационную формулу метода Ньютона.
- 50. Получите итерационную формулу метода хорд.
- 51. Объясните работу алгоритма метода бисекции. Выполните одну итерацию.
- 52. Объясните работу алгоритма метода ломаных.
- 53. Известно, что увеличение константы Липшица  $L$  приводит к замедлению сходимости метода ломаных. Объясните почему с помощью геометрической иллюстрации.
- 54. Укажите класс функций, для которых точное определение точки минимума гарантировано в результате всего одной итерации метода Ньютона.
- 55. Дайте определение квадратичной функции.
- 56. Чему равны градиент и матрица Гессе квадратичной функции?

- 57. Выпишите матрицу Гессе  $A$  и градиент квадратичной функции  $f(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2 + x_3$ .
- 58. Дайте определение производной по направлению.
- 59. Какие направления дифференцируемой в точке  $\mathbf{x}_k$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  функции  $f(\mathbf{x})$  называются направлениями убывания?
- 60. Когда говорят, что в итерационном процессе

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha S_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

производится исчерпывающий спуск?

- 61. Покажите, что если в итерационном процессе

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha S_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

выбор шага производится исчерпывающим спуском,

$$(\nabla f(\mathbf{x}_k), S_k) = 0.$$

- 63. В чем состоит идея метода наискорейшего градиентного спуска?
- 64. Сформулируйте идею метода сопряженных градиентов.
- 65. Метод Пауэлла.
- 66. Метод Флетчера-Ривса
- 67. Выпишите итерационную формулу метода Ньютона-Рафсона.
- 68. Сформулируйте общий принцип построения методов первого и второго порядков.
- 69. Сформулируйте стратегию построения алгоритма симплексного метода.
- 70. Опишите алгоритм отражения вершины в симплексном методе.
- 71. Зачем необходим и в чем заключается алгоритм редукции в симплексном методе.
- 72. Сформулируйте особенности минимизации методом Нельдера-Мида.
- 73. В чем состоит стратегия метода Хука-Дживса?
- 74. В чем состоит метод покоординатного поиска?

- 75. Какие алгоритмы случайного поиска вы знаете. В чем состоит стратегия методов случайного поиска?
- 76. Сформулируйте принципы построения алгоритмов условной оптимизации.
- 77. Какая функция называется штрафной?
- 78. Алгоритм поиска условного экстремума методом штрафных функций.
- 79. Какая функция называется барьерной?
- 80. Алгоритм поиска условного экстремума методом барьерных функций.

По вопросам 1-80 формируются вопросы в тестовой форме.

## 2.2 БАНК ВОПРОСОВ И ЗАДАНИЙ В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ

1. Что такое градиент  $\nabla f(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  функции и каков его геометрический смысл?

**Варианты ответов:**

$$(a) \quad \nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \dots \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (б) \quad \nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dots & & \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial^n x_n} \end{bmatrix}. \quad (в) \quad \nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} \\ \dots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

- (а) Направлен по нормали к поверхности уровня, проведенной в точке  $\mathbf{x}$ , и указывает направление наибольшего возрастания функции в данной точке.
- (б) Направлен по нормали к поверхности уровня, проведенной в точке  $\mathbf{x}$ , в сторону точки экстремума функции.
- (в) Направлен по нормали к поверхности уровня, проведенной в точке  $\mathbf{x}$ , и указывает направление наибольшего убывания функции в данной точке.

2. Метод золотого сечения: как выбираются пробные точки  $x_1$ ,  $x_2$  на отрезке неопределенности  $[a, b]$ ?

**Варианты ответов:**

$$(a) \quad x_1 = a + \frac{2}{3 + \sqrt{5}}(b - a), \quad x_2 = a + \frac{2}{1 - \sqrt{5}}(b - a).$$

$$(б) \quad x_1 = a + b - x_2, \quad x_2 = a + b - x_1 \quad \text{где} \quad x_2 = a + \frac{2}{1 + \sqrt{5}}(b - a).$$

$$(в) \quad x_1 = a + \frac{3 - \sqrt{5}}{2}(b - a), \quad x_2 = a + \frac{\sqrt{5} + 1}{2}(b - a).$$

3. Сформулируйте достаточное условие безусловного минимума функции многих переменных. Приведите критерий Сильвестра для проверки достаточного условия безусловного минимума.

**Варианты ответов:**

- (а)

$$\nabla f(\mathbf{x}_*) = 0, \quad H(\mathbf{x}_*) > 0.$$

Знаки угловых миноров определителя матрицы Гессе, вычисленной в точке минимума, строго положительны.

- (б)

$$\nabla f(\mathbf{x}_*) = 0 \quad \text{и} \quad H(\mathbf{x}_*) < 0.$$

Знаки угловых миноров определителя матрицы Гессе, вычисленной в точке минимума, чередуются, начиная с отрицательного.

- (в)

$$\nabla f(\mathbf{x}_*) = 0 \quad \text{и} \quad H(\mathbf{x}_*) \geq 0.$$

Все главные миноры определителя матрицы Гессе, вычисленной в точке минимума неотрицательны.

4. Постройте вспомогательную функцию  $\varphi(x, s_k)$  для поиска условного минимума функции  $f(x) = x_1^2 + x_1x_2$ ,  $x_1 + x_2 = 1$  методом штрафов.

**Варианты ответов:**

$$(a). \quad \varphi(x, s_k) = x_1^2 + x_1x_2 + \frac{s_k}{x_1 + x_2}.$$

$$(б). \quad \varphi(x, s_k) = x_1^2 + x_1x_2 + \frac{s_k}{2}(x_1 + x_2)^2.$$

$$(в). \quad \varphi(x, s_k) = x_1^2 + x_1x_2 + \frac{s_k}{2}(x_1 + x_2 - 1)^2.$$

5. Какая квадратичная форма  $x^T Ax$  (и матрица Гессе  $A$ ) называется положительно полуопределенной?

**Варианты ответов:**

(а) Если для любого ненулевого вектора  $x$  выполняется неравенство  $x^T Ax > 0$ .

(б) Если для любого ненулевого вектора  $x$  выполняется неравенство  $x^T Ax \geq 0$ .

(в) Если для любого  $x$  выполняется неравенство  $x^T Ax \geq 0$  и существует вектор  $x = 0$ , для которого  $x^T Ax = 0$ .

6. Запишите формулу метода Ньютона для минимизации функции одной переменной.

**Варианты ответов:**

(а)

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

(б)

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$



(в)

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_0)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

7. Что называется поверхностью уровня?

**Варианты ответов:**

(а) Это множество точек  $x \in \mathbb{R}^n$ , в которых функция  $f(x)$  и градиент  $\nabla f(x)$  принимают постоянные значения.

(б) Это множество точек  $x \in \mathbb{R}^n$ , в которых функция принимает постоянное значение:  $f(x) = c$ ,  $c = \text{const}$ .

(в) Это множество точек  $x \in \mathbb{R}^n$ , в которых функция принимает постоянное значение:  $f(x) = c$ ,  $c = \text{const}$ , а матрица Гессе является положительно-определенной.

8. Для функции  $f(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$  вычислить градиент в точке  $x_* = (1, 0)^T$ .

**Варианты ответов:**

(а)  $\nabla f(x_*) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

(б)  $\nabla f(x_*) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

(в)  $\nabla f(x_*) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

9. Для функции  $f(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$  найдите матрицу Гессе.

**Варианты ответов:**

$$(a) \quad H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$(б) \quad H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$(в) \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Установите знакоопределенность матрицы Гессе

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Варианты ответов:**

- (a)  $H > 0$ .
- (б)  $H < 0$ .
- (в)  $H \geq 0$ .

11. Найдите экстремум функции  $f(x) = 2x^8$ .

**Варианты ответов:**

- (a)  $x_* = 0$  – точка минимума.
- (б)  $x_* = 0$  – точка максимума.
- (в) функция не имеет экстремума.

12. Что называется угловыми минорами симметричной матрицы?

**Варианты ответов:**

(a) Определители  $m$ -ого порядка ( $m \leq n$ ), получающиеся из определителя матрицы  $A$  вычеркиванием каких-либо  $(n - m)$  строк и  $(n - m)$  столбцов с одними и теми же номерами.

(б) Определители

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(в) Определители  $m$ -ого порядка ( $m \leq n$ ), получающиеся из определителя матрицы  $A$  вычеркиванием каких-либо  $m$  строк и  $(m)$  столбцов с одними и теми же номерами.

13. Ненулевые векторы  $s^1, s^2, \dots, s^k$  называются сопряженными относительно матрицы  $A$ , если:

**Варианты ответов:**

- (а)  $(As^i, s^j) = 0, i \neq j, i, j = \overline{1, k}$ .
- (б)  $(As^i, s^j) = 0, i, j = \overline{1, k}$ .
- (в)  $(As^i, s^j) < 0, i \neq j, i, j = \overline{1, k}$ .

14. Дайте определение производной функции в точке  $x^k$  вдоль направления  $s^k$ .

**Варианты ответов:**

- (а)  $\frac{\partial f(x^k)}{\partial s^k} = \frac{(\nabla f(x^k), s^k)}{\|\nabla f(x^k)\|}$ .
- (б)  $\frac{\partial f(x^k)}{\partial s^k} = -\frac{(\nabla f(x^k), s^k)}{(\|\nabla f(x^k)\|)^2}$ .
- (в)  $\frac{\partial f(x^k)}{\partial s^k} = -\frac{(\nabla f(x^k), \nabla f(x^k))}{\|\nabla f(x^k)\|}$ .

15. Постройте целевую функцию для задачи. Требуется изготовить цилиндр объемом  $V$  с наибольшей поверхностью  $S$ . Какими должны быть радиус основания  $R$  и высота цилиндра  $H$ ?

**Варианты ответов:**

- (а)  $f(R) = 2\pi R^2 + 2\pi RH, V = \pi R^2 H, V = \text{const}$ .
- (б)  $f(R) = 2\pi R^2 + 2\pi RH, V = 2\pi R^2 H, V = \text{const}$ .
- (в)  $f(R) = \pi R^2 + \pi RH, V = \pi R^2 H, V = \text{const}$ .

16. Что такое матрица Гессе  $H(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  функции многих переменных?

**Варианты ответов:**

$$(a) \quad H(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \dots \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (б) \quad H(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dots & & \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}. \quad (в) \quad H(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} \\ \dots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

17. Чему равна длина интервала  $\Delta_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  неопределенности после 4-х итераций ( $k = 4$ ) методом дихотомии при заданном  $\delta > 0$ , если длина исходного интервала равна 16? ?

**Варианты ответов:**

$$(a) \quad \Delta_4 = 1 + \frac{15}{16}\delta.$$

$$(б) \quad \Delta_4 = 1/2 + \frac{15}{16}\delta.$$

$$(в) \quad \Delta_4 = 1 + \left(1 - \frac{1}{32}\right)\delta.$$

18. Запишите итерационную формулу метода наискорейшего градиентного спуска для минимизации квадратичной функции  $f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$ .

19. В какой последовательности численно решается задача одномерной оптимизации?

**Варианты ответов:**

(а) 1- находится начальный интервал неопределенности; 2 - выясняется максимум или минимум ищется, задача сводится к минимизации функции, если ищется максимум; 3 - выбирается численный метод минимизации; 4 - составляется алгоритм численного решения задачи и программа для ЭВМ; 5 - проводится расчет точки минимума.

(б) 1 - выясняется максимум или минимум ищется, задача сводится к минимизации функции, если ищется максимум; 2- находится начальный интервал неопределенности; 3 - выбирается численный метод минимизации; 4 -составляется алгоритм численного решения задачи и программа для ЭВМ; 5 - проводится расчет точки минимума.

(в) 1 - выясняется максимум или минимум ищется, задача сводится к минимизации функции, если ищется максимум; 2- находится начальный

интервал неопределенности; 3 - составляется алгоритм численного решения задачи и программа для ЭВМ; 4 - выбирается численный метод минимизации; 5 - проводится расчет точки минимума.

20. Найдите экстремум функции  $f(x) = x^7$ .

- (а)  $x_* = 0$  – точка минимума.
- (б)  $x_* = 0$  – точка максимума.
- (в) функция не имеет экстремума.

21. Какая квадратичная форма  $x^T Ax$  (матрица Гессе  $A$ ) называется положительно определенной?

**Варианты ответов:**

(а) Если для любого ненулевого вектора  $x$  выполняется неравенство  $x^T Ax > 0$ .

(б) Если для любого ненулевого вектора  $x$  выполняется неравенство  $x^T Ax \geq 0$ .

(в) Если для любого  $x$  выполняется неравенство  $x^T Ax \geq 0$  и существует вектор  $x = 0$ , для которого  $x^T Ax = 0$ .

22. Как выбираются пробные точки в методе золотого сечения?

**Варианты ответов:**

(а)

$$x_1 = a + L/4, \quad x_2 = b - L/4, \quad L = b - a.$$

(б)

$$x_1 = \frac{a+b}{2} - \frac{\delta}{2}, \quad x_2 = \frac{a+b}{2} + \frac{\delta}{2}.$$

(в)

$$x_1 = a + \frac{2}{3 + \sqrt{5}}(b - a), \quad x_2 = a + \frac{2}{1 + \sqrt{5}}(b - a).$$

23. Найти матрицу Гессе  $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  и классифицировать ее.

**Варианты ответов:**

$$(a) \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad H < 0.$$

$$(б) \quad H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad H > 0.$$

$$(в) \quad H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad H > 0.$$

24. Проверить знакоопределенность матрицы Гессе функции  $f(x) = x_1^3 + x_2^3 - x_1x_2 + 5$  в точке  $\mathbf{x} = (0, 0)$ .

**Варианты ответов:**

$$(a) \quad H > 0.$$

$$(б) \quad H < 0.$$

$$(в) \quad H \geq 0.$$

25. Постройте целевую функцию для задачи. Из всех прямоугольных треугольников, имеющих площадь равной  $S$ , требуется найти тот, периметр которого наименьший.

**Варианты ответов:**

$$(a) \quad f(a) = a + b + \sqrt{a^2 + b^2}, \quad S = \frac{1}{2}ab, \quad S = \text{const.}$$

$$(б) \quad f(a) = a + b + \sqrt{a^2 + b^2}, \quad S = \frac{a}{b}, \quad S = \text{const.}$$

$$(в) \quad f(a) = 2(a + b) + \sqrt{a^2 + b^2}, \quad S = \frac{1}{2}ab, \quad S = \text{const.}$$

26. Сформулируйте необходимые условия экстремума первого порядка.

**Варианты ответов:**

(a) Градиент функции  $f(x)$  в точке  $x_*$  локального минимума равен нулю, а матрица Гессе  $H(x_*)$  является положительно полуопределенной:  $\nabla f(x_*) = 0$  и  $H(x_*) \geq 0$ .

(б) Градиент функции  $f(x)$  в точке  $x_*$  локального минимума равен нулю:  $\nabla f(x_*) = 0$ .

(в) Градиент функции  $f(x)$  в точке  $x_*$  локального минимума равен нулю, а матрица Гессе  $H(x_*)$  является отрицательно определенной:  $\nabla f(x_*) = 0$  и  $H(x_*) < 0$ .

27. Какая точка называется стационарной?

**Варианты ответов:**

(а) Точка  $x_*$ , удовлетворяющая условию  $\nabla f(x_*) = 0$ .

(б) Точка  $x_*$ , удовлетворяющая условиям  $\nabla f(x_*) = 0$ ,  $H(x_*) < 0$ .

(в) Точка  $x_*$ , удовлетворяющая условиям  $\nabla f(x_*) = 0$ ,  $H(x_*) > 0$ .

29. Сформулируйте необходимое и достаточные условия минимума для функции одной переменной.

**Варианты ответов:**

(а)  $f'(x_*) = f''(x_*) = \dots f^{(m-1)}(x_*) = 0$ ,  $f^{(m)}(x_*) > 0$ ,  $m$  — четно.

(б)  $f'(x_*) = f''(x_*) = \dots f^{(m-1)}(x_*) = 0$ ,  $f^{(m)}(x_*) > 0$ ,  $m$  — нечетно.

(в)  $f'(x_*) = f''(x_*) = \dots f^{(m-1)}(x_*) = 0$ ,  $f^{(m)}(x_*) < 0$ ,  $m$  — четно.

30. Найти экстремум функции  $f(x) = x_1^2 + x_2^2$  на множестве  $\mathbb{R}^2$ .

**Варианты ответов:**

(а) В точке  $x_* = (0, 0)$  функция  $f(x)$  имеет глобальный минимум.

(б) В точке  $x_* = (0, 0)$  функция  $f(x)$  имеет глобальный максимум.

(в) Точка  $x_* = (0, 0)$  является точкой локального максимума.

31. Запишите итерационную процедуру, лежащую в основе градиентных методов.

**Варианты ответов:**

(а)  $x^{k+1} = x^k - \alpha_k \nabla f(x^k), f(x^{k+1}) < f(x^k).$

(б)  $x^{k+1} = x^k + \alpha_k \nabla f(x^k), f(x^{k+1}) < f(x^k).$

(в)  $x^{k+1} = x^k - \nabla f(x^k), f(x^{k+1}) < f(x^k).$

32. Сформулируйте достаточное условие безусловного максимума функции многих переменных. Приведите критерий Сильвестра для проверки достаточного условия безусловного максимума.

- (а)

$$\nabla f(\mathbf{x}_*) = 0, \quad H(\mathbf{x}_*) > 0.$$

Знаки угловых миноров определителя матрицы Гессе, вычисленной в точке минимума, строго положительны.

- (б)

$$\nabla f(\mathbf{x}_*) = 0 \quad \text{и} \quad H(\mathbf{x}_*) < 0.$$

Знаки угловых миноров определителя матрицы Гессе, вычисленной в точке минимума, чередуются, начиная с отрицательного.

- (в)

$$\nabla f(\mathbf{x}_*) = 0 \quad \text{и} \quad H(\mathbf{x}_*) \geq 0.$$

Все главные миноры определителя матрицы Гессе, вычисленной в точке минимума неотрицательны.

33. Чему равна длина интервала  $\Delta_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  неопределенности после 3-х итераций ( $k = 3$ ) методом золотого сечения, если длина исходного интервала равна 1?

(а)  $\Delta_3 = \frac{8}{(1 + \sqrt{5})^3}.$

(б)  $\Delta_3 = \frac{(\sqrt{5} + 1)^2}{8}.$

(в)  $\Delta_4 = \frac{8}{(\sqrt{5} - 1)^3}.$

3. Функция  $f(x) = x^5 - 1$  имеет две единственную стационарную точку  $x_* = 0$ . Определите, является ли  $x_* = 0$  точкой экстремума.



- (а)  $x_* = 0$  — точка максимума.
- (б)  $x_* = 0$  — точка минимума.
- (в)  $x_* = 0$  не является.

34. Постройте вспомогательную функцию  $\varphi(x, s_k)$  для поиска условного минимума функция  $f(x) = x^2$ ,  $x \geq 1$  с применением обратной штрафной функции.

- (а)

$$\varphi(x, s_k) = x^2 + \frac{s_k}{2}(x - 1)^2.$$

- (б)

$$\varphi(x, s_k) = x^2 - \frac{s_k}{(x - 1)}.$$

- (в)

$$\varphi(x, s_k) = x^2 - \frac{s_k}{(1 - x)}.$$

35. Как выбираются пробные точки  $x_1, x_2$  в методе дихотомии?

- (а)

$$x_1 = a + L/4, \quad x_2 = b - L/4, \quad L = b - a.$$

- (б)

$$x_1 = a + \frac{2}{1 + \sqrt{5}}(b - a), \quad x_2 = a + \frac{2}{3 + \sqrt{5}}(b - a).$$

- (в)

$$x_1 = a + \frac{2}{3 + \sqrt{5}}(b - a), \quad x_2 = a + \frac{2}{1 + \sqrt{5}}(b - a).$$

36. Какая квадратичная форма  $x^T Ax$  (матрица Гессе  $A$ ) называется отрицательно определенной?

(а) Если для любого ненулевого вектора  $x$  выполняется неравенство  $x^T Ax < 0$ .

(б) Если для любого ненулевого вектора  $x$  выполняется неравенство  $x^T Ax \leq 0$ .

(в) Если для любого  $x$  выполняется неравенство  $x^T Ax \leq 0$  и существует вектор  $x = 0$ , для которого  $x^T Ax = 0$ .

37. Проверить знакоопределенность матрицы Гессе квадратичной функции  $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3$ .

(а)  $H > 0$ .

(б)  $H < 0$ .

(в)  $H \geq 0$ .

38. Постройте целевую функцию для задачи. Требуется изготовить коническую воронку с образующей равной  $L$ . Каков должен быть радиус  $R$  основания конуса, чтобы объем воронки был наибольшим?

(а)  $f(R) = \frac{1}{3}\pi R^2 H$ ,  $H^2 + R^2 = L^2$ ,  $L = \text{const}$ .

(б)  $f(R) = \frac{\pi^2}{R} H$ ,  $H = \sqrt{L^2 - R^2}$ ,  $L = \text{const}$ .

(в)  $f(R) = \frac{1}{3}\pi R^2 H$ ,  $H = \sqrt{R^2 - L^2}$ ,  $L = \text{const}$ .

39. Чему равна величина шага исчерпывающего спуска в градиентном методе, если функции  $f(x)$  квадратичная?

(а)  $\alpha_k = -\frac{(\nabla f(x^k), s^k)}{(As^k, s^k)}$ ,  $s^k = -\nabla f(x^k)$ .

(б)  $\alpha_k = \frac{(\nabla f(x^k), s^k)}{(As^k, s^k)}$ ,  $s^k = -\nabla f(x^k)$ .

(в)  $\alpha_k = -\frac{(\nabla f(x^k), \nabla f(x^k))}{(A\nabla f(x^k), \nabla f(x^k))}$ .

40. Как записывается итерационный процесс метода сопряженных градиентов для минимизации неквадратичных функций?

(а)

$$\begin{aligned}x^{k+1} &= x^k + \alpha_k s^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, s^0 = -\nabla f(x^0), \\f(x^k + \alpha_k s^k) &= \min_{\alpha > 0} f(x^k + \alpha s^k), \\s^{k+1} &= -\nabla f(x^{k+1}) + \beta_k s^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ \beta_k &= \frac{\|\nabla f(x^{k+1})\|^2}{\|\nabla f(x^k)\|^2}.\end{aligned}$$

(б)

$$\begin{aligned}x^{k+1} &= x^k + \alpha_k s^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, s^0 = -\nabla f(x^0), \\f(x^k + \alpha_k s^k) &= \min_{\alpha > 0} f(x^k + \alpha s^k), \\s^{k+1} &= -\nabla f(x^{k+1}) + \beta_k s^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ \beta_k &= -\frac{\|\nabla f(x^k)\|^2}{\|\nabla f(x^{k+1})\|^2}.\end{aligned}$$

(в)

$$\begin{aligned}x^{k+1} &= x^k + \alpha_k s^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, s^0 = -\nabla f(x^0), \\f(x^k + \alpha_k s^k) &= \min_{\alpha > 0} f(x^k + \alpha s^k), \\s^{k+1} &= -\nabla f(x^{k+1}) + \beta_k s^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ \beta_k &= \frac{(A\nabla f(x^{k+1}), s^k)}{(As^k, s^k)}.\end{aligned}$$

41. Если в стационарной точке функции одной переменной вторая производная отрицательна, то эта точка является точкой:

(а) максимума;

(б) минимума;

(в) перегиба.

13. При реализации метода барьерных функций параметр  $s_k$  штрафа формируется как:

- (а) убывающая последовательность чисел;
- (б) возрастающая последовательность чисел;
- (в)  $s_k = \text{const}$ .

42. Как можно свести задачу максимизации к задаче минимизации?

$$(а) \quad x_* = \max_{x \in D} f(x) = \min_{x \in D} (-f(x)).$$

$$(б) \quad x_* = \max_{x \in D} f(x) = -\min_{x \in D} (f(x)).$$

$$(в) \quad x_* = -\max_{x \in D} f(x) = \min_{x \in D} (-f(x)).$$

43. Что называется главными минорами симметричной матрицы?

(а) Определители  $m$ -ого порядка ( $m \leq n$ ), получающиеся из определителя матрицы  $A$  вычеркиванием каких-либо  $(n - m)$  строк и  $(n - m)$  столбцов с одними и теми же номерами.

(б) Определители

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(в) Определители  $m$ -ого порядка ( $m \leq n$ ), получающиеся из определителя матрицы  $A$  вычеркиванием каких-либо  $m$  строк и  $(m)$  столбцов с одними и теми же номерами.

44. За какое число шагов метод сопряженных направлений позволяют найти точку минимума квадратичной функции  $n$  переменных?

- (а) не более чем за  $n$  шагов.
- (б) не более чем за  $2n$  шагов.
- (в) итерационный процесс не оканчивается за конечное число шагов.

45. Как можно записать приращение дважды непрерывно-дифференцируемой функции с помощью градиента и матрицы Гессе этой функции?

- (а)

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \nabla f(x)^T \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x^T H(x) \Delta x + O(\|\Delta x\|^2).$$

- (б)

$$f(x + \Delta x) = \nabla f(x)^T \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x^T H(x) \Delta x + O(\|\Delta x\|^2).$$

- (в)

$$f(x + \Delta x) + f(x) = \nabla f(x)^T \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x^T H(x) \Delta x + O(\|\Delta x\|^2).$$

46. Что называется поверхностью (линией) уровня?

- (а) Множество точек, в которых функция  $f(x)$  принимает постоянное значение.
- (б) Множество точек, в которых функция  $f(x)$  принимает постоянное значение и градиент функции в этих точках равен нулю.
- (в) Множество точек, в которых функция  $f(x)$  принимает постоянное значение и градиент функции в этих точках меняет направление.

47. Сформулируйте критерий отрицательной полуопределённости симметричной матрицы в терминах её главных миноров:

- (а) Главные миноры неотрицательны.
- (б) Главные миноры неоположительны.
- (в) Главные миноры четного порядка неотрицательны, а нечетного порядка – неположительны.

48. В методе дихотомии число итераций, необходимое для определения точки минимума с точностью  $\varepsilon$  на отрезке  $[a, b]$ , определяется формулой :

• (а)

$$n \geq \log_2 \frac{b - a - \delta}{2\varepsilon - \delta}.$$

• (б)

$$n \geq \ln \frac{2\varepsilon}{b - a} / \ln \Phi, \quad \Phi = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

• (в)

$$n \geq \ln \frac{b - a - \delta}{2\varepsilon - \delta}.$$

49. Как выбираются пробные точки  $x_1, x_2$  в методе деления интервала пополам?

(а)

$$x_1 = a + L/4, \quad x_2 = b - L/4, \quad L = b - a.$$

(б)

$$x_1 = \frac{a + b}{2} - \frac{\delta}{2}, \quad x_2 = \frac{a + b}{2} + \frac{\delta}{2}.$$

(в)

$$x_1 = a + \frac{2}{3 + \sqrt{5}}(b - a), \quad x_2 = a + \frac{2}{1 + \sqrt{5}}(b - a).$$

60. Какая квадратичная форма  $x^T A x$  (матрица Гессе  $A$ ) называется отрицательно полуопределенной?

(а) Если для любого ненулевого вектора  $x$  выполняется неравенство  $x^T A x < 0$ .

(б) Если для любого ненулевого вектора  $x$  выполняется неравенство  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} \leq 0$ , выполняется неравенство  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} \leq 0$ .

(в) Если для любого вектора  $x$  выполняется неравенство  $x^T A x \leq 0$  и существует вектор  $x = 0$ , для которого  $x^T A x = 0$ .

61. Проверить знакоопределенность матрицы Гессе квадратичной функции  $f(x) = x_1^2 - 5x_1x_2 + x_2^2$ .

(а)  $H > 0$ .

(б)  $H < 0$ .

(в)  $H \geq 0$

62. Для функции  $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^4 + x_1x_2$  вычислить антиградиент в точке  $\mathbf{x}^* = (0, 1)^T$ .

(а)  $\nabla f(x_*) = - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ . (б)  $\nabla f(x_*) = - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ . (в)  $\nabla f(x_*) = - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

63. Запишите итерационный процесс метода сопряженных градиентов, если функции  $f(x)$  квадратичная.

(а)

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k s^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, s^0 = -\nabla f(x^0),$$

$$\alpha_k = -\frac{(\nabla f(x^k), s^k)}{(As^k, s^k)}, \quad s^{k+1} = -\nabla f(x^{k+1}) + \beta_k s^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\beta_k = \frac{(A\nabla f(x^{k+1}), s^k)}{(As^k, s^k)}.$$

(б)

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k s^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, s^0 = -\nabla f(x^0),$$

$$\alpha_k = \frac{(\nabla f(x^k), s^k)}{(As^k, s^k)},$$

$$s^{k+1} = -\nabla f(x^{k+1}) + \beta_k s^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\beta_k = -\frac{(A\nabla f(x^{k+1}), s^k)}{(As^k, s^k)}.$$

(в)

$$\begin{aligned}
 x^{k+1} &= x^k + \alpha_k s^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, s^0 = -\nabla f(x^0), \\
 \alpha_k &= \frac{(A\nabla f(x^{k+1}), s^k)}{(As^k, s^k)}, \\
 s^{k+1} &= -\nabla f(x^{k+1}) + \beta_k s^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\
 \beta_k &= -\frac{(\nabla f(x^k), s^k)}{(As^k, s^k)}.
 \end{aligned}$$

64. Сформулируйте задачу безусловной оптимизации. Из всех прямоугольников, имеющих периметр равный  $P$ , найдите тот, площадь которого наибольшая.

(а)

$$f(a_*) = \max_a f(a), \quad f(a) = \frac{aP}{2} - a^2, \quad P = 2(a + b).$$

(б)

$$f(a_*) = \min_a f(a), \quad f(a) = a^2 - \frac{aP}{2}, \quad P = 2(a + b).$$

(в)

$$f(a_*) = \max_a f(a), \quad f(a) = a^2 - \frac{aP}{2}, \quad P = 2(a + b).$$

65. Чему равна длина интервала неопределенности при использовании метода золотого сечения, если реализовано 4 итераций, а длина исходного интервала равна 16?

(а)  $(\sqrt{5} - 1)^4$ .

(б)  $\frac{16}{(1 + \sqrt{5})^4}$ .

(в)  $16/(\sqrt{5} - 1)^4$ .

66. Если в стационарной точке функции одной переменной вторая и третья производные равны нулю, а четвертая производная отрицательна, то эта точка является точкой:



- (а) максимума.
- (б) минимума.
- (в) перегиба.

66. За какое число шагов метод сопряженных направлений позволяют найти точку минимума квадратичной функции двух переменных?

- (а) не более чем за 2 шага.
- (б) не более чем за 4 шагов.
- (в) итерационный процесс не оканчивается за конечное число шагов.

67. Найти матрицу Гессе  $f(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_2^2$  и классифицировать ее.

$$(а) \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad H < 0.$$

$$(б) \quad H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad H > 0.$$

$$(в) \quad H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad H \leq 0.$$

68. Найдите минимум функции  $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 - x_2$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$  методом Ньютона, если начальная точка  $\mathbf{x}_0 = (1, 2)^T$ .

$$(а) \quad \mathbf{x}_* = (-1/2, 1/2)^T.$$

$$(б) \quad \mathbf{x}_* = (1/2, -1/2)^T.$$

$$(в) \quad \mathbf{x}_* = (1/2, 1/2)^T.$$

69. Какие направления вектора  $S_k$  дифференцируемой в точке  $\mathbf{x}_k$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  функции  $f(\mathbf{x})$  называются направлениями убывания?

- (а) Если  $(\nabla f(\mathbf{x}_k), S_k) < 0$ .
- (б) Если  $(\nabla f(\mathbf{x}_k), S_k) > 0$ .
- (в) Если  $(\nabla f(\mathbf{x}_k), S_k) = 0$ .

70. Какая функция  $f(x)$ , заданная на отрезке  $[a, b]$ , называется сильно выпуклой?

- (а) Если для всех  $x_1, x_2 \in [a, b]$  и произвольного числа  $\alpha \in [0, 1]$  выполняется неравенство  $f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$ .
- (б) Если для всех  $x_1, x_2 \in [a, b]$  и произвольного числа  $\alpha \in [0, 1]$  выполняется неравенство  $f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \geq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$ .
- (в) Если для всех  $x_1, x_2 \in [a, b]$  и произвольного числа  $\alpha \in [0, 1]$  выполняется неравенство  $f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) < \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$ .

71. Найдите экстремум функции  $f(x) = x^9$ .

- (а) Не имеет экстремума.
- (б) Имеет максимум в точке  $x_* = 0$ .
- (в) Имеет минимум в точке  $x_* = 0$ .

72. Чему равна длина интервала  $\Delta_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  неопределенности после 4-х итераций ( $k = 4$ ) методом золотого сечения, если длина исходного интервала равна 16?

- (а)  $\Delta_4 = \sqrt{5} - 1$ .
- (б)  $\Delta_4 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ .
- (в)  $\Delta_4 = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$ .

73. Как выбираются пробные точки в методе дихотомии?

(а)

$$x_1 = a + L/4, \quad x_2 = b - L/4, \quad L = b - a.$$

(б)

$$x_1 = a + \frac{2}{1 + \sqrt{5}}(b - a), \quad x_2 = a + \frac{2}{3 + \sqrt{5}}(b - a).$$

(в)

$$x_1 = a + \frac{2}{3 + \sqrt{5}}(b - a), \quad x_2 = a + \frac{2}{1 + \sqrt{5}}(b - a).$$

74. Что называется матрицей Гессе дважды дифференцируемой функции  $f(\mathbf{x})$ ?

(а). Это  $n \times n$  матрица частных производных второго порядка, вычисленных в точке  $\mathbf{x}$ .

(б) Это симметричная и положительно-определенная  $n \times n$  матрица частных производных второго порядка, вычисленных в точке  $\mathbf{x}$ .

(в) Это симметричная  $n \times n$  матрица частных производных второго порядка, вычисленных в точке  $\mathbf{x}$ .

75. Проверить знакоопределенность матрицы Гессе квадратичной функции  $f(x) = x_1^2 + x_1x_2$ .

(а)  $H > 0$ .

(б)  $H < 0$ .

(в)  $H \geq 0$ .

76. Запишите итерационный процесс метода Марквардта.

(а)

$$x^{k+1} = x^k + s^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$s^k = -(H(x^k) + \lambda_k E)^{-1} \nabla f(x^k).$$

Если  $f(x^k + s^k) < f(x^k)$ , то  $\lambda_{k+1} = \lambda_k/2$ ,

иначе  $\lambda_{k+1} = 2\lambda_k$ .

(б)

$$x^{k+1} = x^k + s^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$s^k = -(H(x^k) + \lambda_k E)^{-1} \nabla f(x^k).$$

Если  $f(x^k + s^k) < f(x^k)$ , то  $\lambda_{k+1} = 2\lambda_k$ ,

иначе  $\lambda_{k+1} = \lambda_k/2$ .

(в)

$$x^{k+1} = x^k + s^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$s^k = (H(x^k) + \lambda_k E)^{-1} \nabla f(x^k).$$

Если  $f(x^k + s^k) < f(x^k)$ , то  $\lambda_{k+1} = \lambda_k/2$ ,  
иначе  $\lambda_{k+1} = 2\lambda_k$ .

77. При реализации метода внешних штрафов параметр  $s_k$  штрафа формируется как:

- (а) убывающая последовательность чисел.
- (б) возрастающая последовательность чисел.
- (в)  $s_k = \text{const}$ .

10. Найти точку минимума функции  $f(\mathbf{x}) = 4x_1^2 + 2x_2^2 - x_1 - x_2$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$  методом Ньютона из начальной точки  $\mathbf{x}_0 = (1, 1)^T$ .

(а)  $\mathbf{x}_* = (-1/8, 1/4)^T$ .

(б)  $\mathbf{x}_* = (1/8, 1/4)^T$ .

(в)  $\mathbf{x}_* = (1/4, 1/8)^T$ .

78. Какая квадратичная форма  $x^T A x$  (матрица Гессе  $A$ ) называется отрицательно полуопределенной?

(а) Если для любого ненулевого вектора  $x$  выполняется неравенство  $x^T A x < 0$ .

(б) Если для любого ненулевого вектора  $x$  выполняется неравенство  $x^T A x < 0$  и выполняется неравенство  $x^T A x \leq 0$ .

(в) Если для любого вектора  $x$  выполняется неравенство  $x^T A x \leq 0$  и существует вектор  $x = 0$ , для которого  $x^T A x = 0$ .

79. Когда говорят, что в итерационном процессе  $x^{k+1} = x^k + \alpha_k s^k$ ,  $x, s \in \mathbb{R}^n$  производится исчерпывающий спуск?

(а) Если величина шага  $\alpha_k$  находится из решения задачи одномерной минимизации

$$\Phi_k(\alpha_k) = \min_{\alpha} \Phi_k(\alpha), \quad \Phi_k(\alpha) = f(x^k + \alpha s^k).$$

(б). Если величина шага  $\alpha_k$  находится из условия

$$f(x^{k+1}) < f(x^k).$$

(в) Если величина шага  $\alpha_k$  выбирается постоянной.

80. Найти матрицу Гессе  $f(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_2^2$ .

(а)  $H = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

(б)  $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$

(в)  $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$

81. Для функции  $f(x) = x_1^3 + x_2^4 + x_1x_2$  вычислить градиент в точке  $x_* = (0, 1)^T$ .

(а)  $\nabla f(x_*) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$

(б)  $\nabla f(x_*) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$

(в)  $\nabla f(x_*) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$

82. Дайте определение поверхности уровня функции  $f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ .

(а) Это множество точек  $x \in \mathbb{R}^n$ , в которых функция  $f(x)$  и градиент  $\nabla f(x)$  принимают постоянные значения.

(б) Это множество точек  $x \in \mathbb{R}^n$ , в которых функция принимает постоянное значение:  $f(x) = c$ ,  $c = \text{const}$ .

(в) Это множество точек  $x \in \mathbb{R}^n$ , в которых функция принимает постоянное значение:  $f(x) = c$ ,  $c = \text{const}$ , а матрица Гессе является положительно-определенной.

83. Как сводится задача максимизации к задаче минимизации?

- (а)

$$f(x_*) = \max_{x \in D} f(x) = \min_{x \in D} (-f(x)).$$

- (б)

$$f(x_*) = \max_{x \in D} f(x) = \min_{x \in D} \frac{1}{f(x)}.$$

- (в)

$$f(x_*) = \max_{x \in D} f(x) = \min_{x \in D} (-f^2(x)).$$

84. Какая функция называется строго выпуклой?

- (а) Если для всех  $x_1, x_2 \in [a, b]$  и произвольного числа  $\alpha \in [0, 1]$  выполняется неравенство  $f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$ .
- (б) Если для всех  $x_1, x_2 \in [a, b]$  и произвольного числа  $\alpha \in [0, 1]$  выполняется неравенство  $f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \geq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$ .
- (в) Если для всех  $x_1, x_2 \in [a, b]$  и произвольного числа  $\alpha \in [0, 1]$  выполняется неравенство  $f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) < \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$ .

85. Для функции  $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$  вычислите градиент в точке  $x_* = (1, 1)^T$ .

- (а)  $\nabla f(x_*) = (1, 1)^T$ .

- (б)  $\nabla f(x_*) = (0, 1)^T$ .
- (в)  $\nabla f(x_*) = (0, 1)^T$ .

86. Число итераций  $n$ , необходимое для достижения заданной точности  $\varepsilon$  определения точки минимума на отрезке  $[a, b]$ , в методе деления интервала пополам оценивается:

- (а) формулой

$$n \geq \ln \frac{2\varepsilon}{b-a} / \ln \Phi, \quad \Phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

- (б) условием

$$\frac{b-a-\delta}{2^{n+1}} + \frac{\delta}{2} \leq \varepsilon$$

- (в) условием

$$\frac{b-a}{2^{n+1}} \leq \varepsilon$$

87. Пробные точки в методе золотого сечения определяются как

(а)

$$x_1 = a + L/4, \quad x_2 = b - L/4, \quad L = b - a.$$

(б)

$$x_1 = \frac{a+b}{2} - \frac{\delta}{2}, \quad x_2 = \frac{a+b}{2} + \frac{\delta}{2}.$$

(в)

$$x_1 = a + \frac{2}{3+\sqrt{5}}(b-a), \quad x_2 = a + \frac{2}{1+\sqrt{5}}(b-a).$$

88. Проверить знакоопределенность матрицы Гессе квадратичной функции  $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_3$ .

- (а)  $H > 0$ .
- (б)  $H < 0$ .
- (в)  $H \geq 0$ .

89. Производная функции в точке  $x^k$  вдоль направления  $s^k$  определяется как

- (а) 
$$\frac{\partial f(x^k)}{\partial s^k} = \frac{(\nabla f(x^k), s^k)}{\|\nabla f(x^k)\|}.$$
- (б) 
$$\frac{\partial f(x^k)}{\partial s^k} = -\frac{(\nabla f(x^k), s^k)}{(\|\nabla f(x^k)\|)^2}.$$
- (в) 
$$\frac{\partial f(x^k)}{\partial s^k} = -\frac{(\nabla f(x^k), \nabla f(x^k))}{\|\nabla f(x^k)\|}.$$

90. Как называется одним словом задача максимизации и минимизации функции?

- (а) Задачей безусловной оптимизации.
- (б) Задачей поиска условного оптимума.
- (в) Задачей поиска экстремума.

93. Как записывается итерационный процесс метода Ньютона-Рафсона для минимизации функции многих переменных?

(а)

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k s^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$s^k = -H(x^k)^{-1} \nabla f(x^k), \quad f(x^k + \alpha_k s^k) = \min_{\alpha > 0} f(x^k + \alpha s^k).$$

(б)

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k s^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$s^k = H(x^k)^{-1} \nabla f(x^k), \quad f(x^k + \alpha_k s^k) = \min_{\alpha > 0} f(x^k + \alpha s^k).$$

(в)

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k s^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$s^k = -H(x^k) \nabla f(x^k), \quad f(x^k + \alpha_k s^k) = \min_{\alpha > 0} f(x^k + \alpha s^k).$$



94. Найти безусловный экстремум функции  $f(x) = 4x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 + x_1$  на множестве  $\mathbb{R}^2$ .

- (а) В точке  $x_* = (-3/16, -1/8)$  функция  $f(x)$  имеет максимум.
- (б) В точке  $x_* = (-3/16, -1/8)$  функция  $f(x)$  не имеет экстремума.
- (в) В точке  $x_* = (-3/16, -1/8)$  функция  $f(x)$  имеет минимум.

95. Для функции  $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^4 + x_1x_2$  вычислить антиградиент в точке  $\mathbf{x}^* = (0, 1)^T$ .

(а)  $\nabla f(x_*) = - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$

(б)  $\nabla f(x_*) = - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$

(в)  $\nabla f(x_*) = - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$

96. Проверить, является ли точка  $x_* = (1, 1)^T$  точкой безусловного минимума функции  $f(x) = x_1^4 + x_2^4 - (x_1 + x_2)^2$ .

- (а) В точке  $x_* = (1, 1)$  функция  $f(x)$  имеет безусловный максимум.
- (б) В точке  $x_* = (1, 1)$  функция  $f(x)$  имеет безусловный минимум.
- (в) Точка  $x_* = (1, 1)$  не является точкой локального минимума или локального максимума.

97. Какая точка называется точкой глобального минимума?

- (а) Если

$$f(x_*) \leq f(x), \quad \forall x \in D, \quad D \subseteq \mathbb{R}^n.$$

(б) Если существует  $\varepsilon > 0$ , такое, что если  $x \in D$  и  $\|x^* - \mathbf{x}\| < \varepsilon$ , то  $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x})$ .

(в) Утверждения (а) и (б) неверны.

98. Если в стационарной точке  $x_*$  функции одной переменной  $f(x)$  вторая производная отрицательна, то:

(а)  $x_*$  – точка максимума.

(б)  $x_*$  – точка минимума.

(в) в точке  $x_*$  функция имеет разрыв.

100. Какая ставится задача поиска безусловного экстремума?

$$(а) \quad x_* = \min_{x \in D} f(x) \quad \left( x_* = \max_{x \in D} f(x) \right), \quad D \subset \mathbb{R}^n.$$

$$(б) \quad x_* = \min_{x \in D} f(x), \quad D \subset \mathbb{R}^n.$$

$$(в) \quad x_* = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad \left( x_* = \max_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \right).$$

101. Для функции  $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 + x_1^3x_2$  вычислите градиент в точке  $x_* = (1, 0)^T$ .

• (а)  $\nabla f(x_*) = (1, 5)^T$ .

• (б)  $\nabla f(x_*) = (5, 1)^T$ .

• (в)  $\nabla f(x_*) = (1, 1)^T$ .

102. Число итераций, необходимое для достижения заданной точности  $\varepsilon$  определения точки минимума на отрезке  $[a, b]$ , в методе золотого сечения оценивается формулой

• (а)

$$n \geq \log_2 \frac{b - a - \delta}{2\varepsilon - \delta}.$$

- (б)

$$n \geq \ln \frac{2\varepsilon}{b-a} / \ln \Phi, \quad \Phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

- (в)

$$n \geq \ln \frac{b-a-\delta}{2\varepsilon-\delta}.$$

103. Какая точка называется стационарной?

- (а) Точка  $x_*$ , удовлетворяющая условию

$$\nabla f(x_*) = 0.$$

- (б) Точка  $x_*$ , удовлетворяющая условию

$$\nabla f(x_*) < 0.$$

- (в) Точка  $x_*$ , удовлетворяющая условию

$$\nabla f(x) > 0.$$

104. Выпишите матрицу  $A$  квадратичной функции

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + x_1 - x_2$$

(а)  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ . (б)  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ . (в)  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ .

105. Дана задача:  $f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 \rightarrow, g_1(x) = x_1 - 1 > 0$ . Запишите для этой задачи штрафную функцию, используя логарифмический штраф.

- (а)  $\psi(x, s_k) = -s_k \ln[-x_1 + 1]$ .
- (б)  $\psi(x, s_k) = -s_k \ln[x_1 - 1]$ .
- (в)  $\psi(x, s_k) = -s_k \ln[-x_1]$ .

6. Проверьте знакоопределенность квадратичной формы  $f(x) = 2x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$ .

- (а) Положительно определенная.
- (б) Отрицательно определенная.
- (в) Отрицательно полуопределенная.

106. Найдите экстремум функции  $f(x) = x^3 - 27x + 5$

- (а)  $x_* = -3$  – локальный максимум,  $x_* = 3$  – локальный минимум.
- (б)  $x_* = 3$  – локальный максимум,  $x_* = -3$  – локальный минимум.
- (в)  $x_* = -3$  – точка перегиба,  $x_* = 3$  – локальный минимум.

107. Зависит ли точность определения точки минимума, которую гарантируют методы дихотомии, золотого сечения в результате  $M$  вычислений, от конкретной функции  $f(x)$ ?

- (а) Не зависит, главное чтобы  $f(x)$  была унимодальной.
- (б) Зависит от величины производной в окрестности точки минимума.
- (в) Не зависит, если  $f(x)$  удовлетворяет условию Липшица.

108. Как выбираются пробные точки  $x_1, x_2$  в методе дихотомии?

(а)

$$x_1 = a + L/4, \quad x_2 = b - L/4, \quad L = b - a.$$

(б)

$$x_1 = a + \frac{2}{1 + \sqrt{5}}(b - a), \quad x_2 = a + \frac{2}{3 + \sqrt{5}}(b - a).$$

(в)

$$x_1 = a + \frac{2}{3 + \sqrt{5}}(b - a), \quad x_2 = a + \frac{2}{1 + \sqrt{5}}(b - a).$$

109. Запишите итерационный процесс метода сопряженных градиентов, если функции  $f(x)$  квадратичная.

(a)

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k + \alpha_k s^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, s^0 = -\nabla f(x^0), \\ \alpha_k &= -\frac{(\nabla f(x^k), s^k)}{(As^k, s^k)}, \quad s^{k+1} = -\nabla f(x^{k+1}) + \beta_k s^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ \beta_k &= \frac{(A\nabla f(x^{k+1}), s^k)}{(As^k, s^k)}. \end{aligned}$$

(б)

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k + \alpha_k s^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, s^0 = -\nabla f(x^0), \\ \alpha_k &= \frac{(\nabla f(x^k), s^k)}{(As^k, s^k)}, \\ s^{k+1} &= -\nabla f(x^{k+1}) + \beta_k s^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ \beta_k &= -\frac{(A\nabla f(x^{k+1}), s^k)}{(As^k, s^k)}. \end{aligned}$$

(в)

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k + \alpha_k s^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, s^0 = -\nabla f(x^0), \\ \alpha_k &= \frac{(A\nabla f(x^{k+1}), s^k)}{(As^k, s^k)}, \\ s^{k+1} &= -\nabla f(x^{k+1}) + \beta_k s^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ \beta_k &= -\frac{(\nabla f(x^k), s^k)}{(As^k, s^k)}. \end{aligned}$$

11. Сформулируйте задачу безусловной оптимизации. Требуется изготовить бак цилиндрической формы заданного объема  $V$ . Каковы должны быть его размеры (радиус основания  $R$  и высота цилиндра  $H$ ), чтобы площадь поверхности была наименьшей?

(a)

$$f(R_*) = \min_R f(R), \quad f(R) = 2\pi R^2 + \frac{2V}{R}, \quad H = \frac{V}{\pi R^2}.$$

(б)

$$f(R_*) = \min_R f(R), \quad f(R) = 2\pi R^2 + 2\pi RH.$$

(в)

$$f(R_*) = \min_R f(R), \quad f(R) = 2\pi R^2 + \frac{V}{R}, \quad H = \frac{V}{2\pi R^2}.$$

110. Какая точка называется точкой локального минимума?

(а)  $x_* \in D$  — точка локального минимума функции,  $f(x)$ , если

$$f(x_*) \leq f(x), \quad \forall x \in D, \quad D \subseteq \mathbb{R}^n.$$

(б)  $x_* \in D$  — точка локального (относительного) минимума минимума функции,  $f(x)$ , если существует  $\varepsilon > 0$ , такое, что если  $x \in D$  и  $\|x^* - \mathbf{x}\| < \varepsilon$ , то  $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x})$ .

(в) Утверждения (а) и (б) неверны.

111. Найдите минимум функции  $f(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 2x_2$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$  методом Ньютона, если  $\mathbf{x}_0 = (0, 0)^T$ .

(а)  $\mathbf{x}_* = (1/2, 1)^T$ .(б)  $\mathbf{x}_* = (1/2, 1/4)^T$ .(в)  $\mathbf{x}_* = (-1/2, 1)^T$ .

112. При построении штрафных функций последовательность чисел  $s_k$  формируется как:

(а) возрастающая.

(б) убывающая.

(в) убывающая, члены которой образуют сходящийся числовой ряд.

113. За какое число шагов метод сопряженных направлений позволяют найти точку минимума квадратичной функции  $n$  переменных?

(а) не более чем за  $n$  шагов.(б) не более чем за  $2n$  шагов.

(в) итерационный процесс не оканчивается за конечное число шагов.

114. Найдите экстремум функции  $f(x) = e^{-x^2}$ .

- (а) Не имеет экстремума.
- (б) Имеет минимум в точке  $x_* = 0$ .
- (в) Имеет максимум в точке  $x_* = 0$ .

115. Сформулируйте достаточные условия локального максимума функции многих переменных.

- (а) Если  $\nabla f(x_*) = 0$ , то  $x_*$  – точка локального максимума.
- (б) Если  $\nabla f(x_*) = 0$  и матрица Гессе  $H(x_*) > 0$ , то  $x_*$  – точка локального максимума.
- (в) Если  $\nabla f(x_*) = 0$  и матрица Гессе  $H(x_*) < 0$ , то  $x_*$  – точка локального максимума.

116. Сформулируйте критерий Сильвестра проверки достаточных условий безусловного максимума.

- (а) Необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров определителя матрицы Гессе были строго положительны.
- (б) Необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров определителя матрицы Гессе чередовались, начиная с отрицательного.
- (в) Необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров определителя матрицы Гессе были строго отрицательны.

118. Как находится отношение  $\Phi$  для выбора пробных точек методом золотого сечения?.

- (а) Из решения уравнения  $1 - \Phi + 1/\Phi = 0$ ,  $\Phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ .
- (б) Из решения уравнения  $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$ ,  $\Phi = \pm \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ .
- (в) Из решения уравнения  $\Phi^2 + \Phi - 1 = 0$ ,  $\Phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ .

119. Как выбираются параметры  $\alpha_k$  для минимизации скалярной функции  $f(x)$  методом Ньютона-Рафсона?

- (а) Из решения задачи минимизации  $\varphi_k(\alpha) = f\left(x_k - \alpha \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}\right) \rightarrow \min$ .

- (б) Из решения задачи  $\varphi_k(\alpha) = f\left(x_k - \alpha \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}\right) \rightarrow \max$ .
- (в) Из решения задачи  $\varphi_k(\alpha) = f\left(x_k - \alpha \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right) \rightarrow \min$ .

120. Зависит ли точность определения точки минимума, которую гарантируют методы дихотомии, золотого сечения в результате  $M$  вычислений, от конкретной функции  $f(x)$ ?

- (а) Не зависит, главное чтобы была унимодальной.
- (б) Зависит от величины производной в окрестности точки минимума.
- (в) Не зависит, если  $f(x)$  удовлетворяет условию Липшица.

121. Дана задача:  $f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 \rightarrow$ ,  $g_1(x) = x_1 - 1 > 0$ . Запишите для этой задачи штрафную функцию, используя логарифмический штраф.

- (а)  $\psi(x, s_k) = -s_k \ln[-x_1 + 1]$ .
- (б)  $\psi(x, s_k) = -s_k \ln[x_1 - 1]$ .
- (в)  $\psi(x, s_k) = -s_k \ln[-x_1]$ .

122. Проверьте знакоопределенность квадратичной формы  $f(x) = 2x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$ .

- (а) Положительно определенная.
- (б) Отрицательно определенная.
- (в) Отрицательно полуопределенная.

123. Вычислите градиент функции  $f(x) = 2x_1^4 + x_2^4 + x_1x_2 + x_1^2x_2$  в точке  $x_* = (1, 1)^T$ .

- (а)

$$\nabla f(x_*) = (11, 5)^T.$$

- (б)

$$\nabla f(x_*) = (10, 6)^T.$$



- (в)

$$\nabla f(x_*) = (11, 6)^T.$$

124. Какая задача называется задачей на условный экстремум с ограничениями типа равенств?

- (а)

$$f(x_*) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x).$$

- (б)

$$f(x_*) = \min_{x \in D} f(x), \quad D = \{x : g_i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, m, m < n\}, x \in \mathbb{R}^n.$$

- (в)

$$f(x_*) = \min_{x \in D} f(x), \quad D \leq \{x : g_i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, m, m < n\}, x \in \mathbb{R}^n.$$

125. Точность определения точки минимума методом золотого сечения на отрезке  $[a, b]$  после  $k$  итераций определяется равенством:

- (а)  $\varepsilon_k = \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^k (b - a).$

- (б)  $\varepsilon_k = (b - a)/2^{k+1}.$

- (в)  $\varepsilon_k = (b - a - \delta)/2^{k+1} = \delta/2.$

126. Найдите уравнение для линии уровня функции  $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ , проходящей через точку  $x_* = (1, 1)$ .

- (а)  $x_1^2 + x_2^2 = 1.$

- (б)  $x_1^2 + x_2^2 = 2.$

- (в)  $x_2 = \sqrt{1 - x_1^2}.$

127. Что регулярный симплекс?

- (а) Выпуклый многогранник в  $\mathbb{R}^n$  с  $n$  вершинами, которые равноудалены друг от друга.

- (б) Выпуклый многогранник в  $\mathbb{R}^n$  с  $n + 1$  вершинами, которые равноудалены друг от друга.
- (в) Выпуклый многогранник в  $\mathbb{R}^{n-1}$  с  $n$  вершинами, которые равноудалены друг от друга.

128. Можно ли применить метод золотого сечения для определения точки локального максимума?

- (а) Можно.
- (б) Можно, но надо изменить знак перед функцией на противоположный.
- (в) Нельзя.

15. Выпишите итерационную формулу метода Ньютона для минимизации скалярной функции  $f(x)$ . Можно ли использовать метод Ньютона нахождения точки локального максимума?

- (а)  $x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$ . Нельзя.
- (б)  $x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$ . Можно.
- (в)  $x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_0)}$ . Для нахождения точки локального максимума надо поменять знак перед функцией на противоположный:  $-f(x)$ .

**Шкала оценивания результатов тестирования:** в соответствии с действующей в университете балльно-рейтинговой системой оценивание результатов промежуточной аттестации обучающихся осуществляется в рамках 100-балльной шкалы, при этом максимальный балл по промежуточной аттестации обучающихся по очной форме обучения составляет 36 баллов, по очно-заочной и заочной формам обучения - 60 баллов (установлено положением П 02.016).

Максимальный балл за тестирование представляет собой разность двух чисел: максимального балла по промежуточной аттестации для данной формы обучения (36 или 60) и максимального балла за решение компетентностно-ориентированной задачи (6).

Балл, полученный обучающимся за тестирование, суммируется с баллом, выставленным ему за решение компетентностно-ориентированной задачи.

Общий балл по промежуточной аттестации суммируется с баллами, полученными обучающимся по результатам текущего контроля успеваемости в течение семестра; сумма баллов переводится в оценку по 5-балльной шкале или дихотомической шкале следующим образом:

Соответствие 100-балльной и 5-балльной шкал

Оценка по 100-балльной шкале	Оценка по 5-балльной шкале
100-85	отлично
84-70	хорошо
69-50	удовлетворительно
49 и менее	неудовлетворительно

## 2.3 КОМПЕТЕНТНОСТНО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ЗАДАЧИ

### Компетентностно-ориентированная задача №1.

Решите задачу минимизации  $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$  методом сопряженных градиентов. Начальное приближение выберите произвольно.

### Компетентностно-ориентированная задача №2.

Выполните одну итерацию методом наискорейшего градиентного спуска для  $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ . Начальное приближение выберите произвольно.

### Компетентностно-ориентированная задача №3.

Ящик имеет форму правильной четырехугольной призмы заданного объема  $V$ . Каковы размеры ящика  $(a, H)$ , если известно, что он имеет наименьшую полную поверхность?

### Компетентностно-ориентированная задача №4.

Найдите условный минимум  $f(x) = x^2 - 4x \rightarrow \min, x - 1 \leq 0$ .

### Компетентностно-ориентированная задача №5.

Цистерна имеет форму прямого круглого цилиндра, завершено с одной стороны полушарием. Вместимость цистерны  $V = 40\pi/3$  м<sup>3</sup>. Найдите радиус  $R$  цилиндра, при котором цистерна будет иметь наименьшую полную поверхность.

*Указание:* Объем шара  $V = 4\pi R^3/3$ , площадь поверхности шара  $S = 4\pi R^2$ .

### Компетентностно-ориентированная задача №6.

Требуется поставить палатку в форме правильной четырехугольной пирамиды, имеющей боковую поверхность  $S_{\text{бок}} = 6\sqrt{3}$  м<sup>2</sup>. Каковы должны быть размеры палатки (сторона основания  $a$  и высота  $H$ ), чтобы объем палатки был наибольшим?

### Компетентностно-ориентированная задача №7.

Требуется изготовить коническую воронку с образующей 36 см. Какова должна быть высота воронки, чтобы ее объем был наибольшим?

### Компетентностно-ориентированная задача №9.

Требуется изготовить открытую банку цилиндрической формы объемом 1 м<sup>3</sup>. При каком радиусе основания расход листового материала на ее изготовление будет наименьшим?

### Компетентностно-ориентированная задача №10.

Функция  $f(\mathbf{x}) = 3x_1x_2 - x_1x_2^2 - x_1^2x_2$  имеет три стационарные точки  $\mathbf{x}_{1*} = (0, 0)^T$ ,  $\mathbf{x}_{2*} = (1, 1)^T$  и  $\mathbf{x}_{3*} = (-1, -1)^T$ . Определить, какая из них является точкой локального минимума. Для проверки достаточных условий экстремума используйте собственные значения матрицы Гессе.

### Компетентностно-ориентированная задача №11.

Из прямоугольного жестяного листа со сторонами  $a$  и  $b$  делают ящик, вырезая равные квадраты по углам. Какова должна быть сторона у вырезанных квадратов, чтобы ящик имел максимальный объем?

### Компетентностно-ориентированная задача №12.

Методом штрафов решите задачу

$$f(x) = -8x_1^2 + 4x_1 - x_2^2 + 12x_2 - 7 \rightarrow \max,$$

$$2x_1 + 3x_2 = -6.$$

### Компетентностно-ориентированная задача №13.

Найдите минимум функции  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_1 - 10x_2 + 2$  методом Ньютона, если начальная точка  $(1, 2)^T$ .

### Компетентностно-ориентированная задача №14.

Найдите минимум функции  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_2^2 + 2x_1 - 20x_2 + 1$  методом сопряженных градиентов, если начальная точка  $(1, 1)^T$ .

### Компетентностно-ориентированная задача №15.

Оцените сходимость метода наискорейшего градиентного спуска сопряженных при минимизации функции  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + x_1 - x_2$ , если начальная точка  $(0, 0)^T$ .

### Компетентностно-ориентированная задача №16.

Найдите значение  $a$ , при котором достигает максимума функция

$$f(a) = e^{-x_1^2 - x_2^2},$$

где  $x_1, x_2$  — корни уравнения  $x^2 + ax + 4a - 2 = 0$ .

### Компетентностно-ориентированная задача №17.

В заданный треугольник  $ABC$  с высотой  $H$  и основанием  $b$  вписать параллелограмм наибольшей площади, стороны которого параллельны двум сторонам треугольника.

*Указание к задаче:* Условие, что параллелограмм вписан в треугольник, определяется  $(H - h)/H = a/b$ , где  $a$  и  $h$  — основание и высота параллелограмма.

**Компетентностно-ориентированная задача №18.**

Проверить, являются ли точки  $\mathbf{x}_* = (0, 0)^T$ ,  $\mathbf{x}_* = (1, 1)^T$ ,  $\mathbf{x}_* = (-1, -1)^T$  точками безусловного экстремума функции:  $f(\mathbf{x}) = x_1^4 + x_2^4 - (x_1 + x_2)^2$ .

**Компетентностно-ориентированная задача №19.**

Найти безусловный экстремум функции  $f(\mathbf{x}) = 2x_1^3 + 4x_1x_2^2 - 10x_1x_2 + x_2^2$ .

**Компетентностно-ориентированная задача №20.**

Выведите итерационную формулу Ньютона (требующую только операции умножения и сложения) для вычисления  $x = 1/a$ , где  $a$  — заданное действительное число.

**Компетентностно-ориентированная задача №21.**

Покажите, что число итераций, необходимое для достижения заданной точности  $\varepsilon$  определения точки минимума на отрезке  $[a, b]$ , в методе золотого сечения оценивается формулой

$$n \geq \ln \frac{2\varepsilon}{b-a} / \ln \Phi, \quad \Phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

**Компетентностно-ориентированная задача №22.**

Покажите, что в методе дихотомии число итераций, необходимое для определения точки минимума с точностью  $\varepsilon$ , определяется формулой

$$n \geq \log_2 \frac{b-a-\delta}{2\varepsilon-\delta}.$$

**Компетентностно-ориентированная задача №23.**

Требуется спроектировать емкость в виде прямой призмы (без крышки), на изготовление которой будет затрачено наименьшее количество листового материала. Основанием призмы является квадрат с стороной  $a$ . Объем призмы фиксирован и равен  $10 \text{ мм}^3$ .

**Компетентностно-ориентированная задача №24.**

Проверить, являются ли точки  $\mathbf{x}_* = (2, 0, 1)^T$  и  $\mathbf{x}_* = (0, 0, 0)^T$  точками безусловного экстремума функции:  $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_1x_3$ .

**Компетентностно-ориентированная задача №25.**

В прямой круговой конус вписан прямой круговой цилиндр так, что основания конуса и цилиндра лежат в одной плоскости. Найдите наибольшую возможную часть объема конуса, занятую таким цилиндром.

**Критерии оценивания решения компетентностно-ориентированной задачи** (нижеследующие критерии оценки являются примерными и могут корректироваться): 6-5 баллов выставляется обучающемуся, если решение задачи демонстрирует глубокое понимание обучающимся предложенной проблемы и разностороннее ее рассмотрение; свободно конструируемая работа представляет собой логичное, ясное и при этом краткое, точное описание хода решения задачи (последовательности (или выполнения) необходимых трудовых действий) и формулировку доказанного, правильного вывода (ответа); при этом обучающимся предложено несколько вариантов решения или оригинальное, нестандартное решение (или наиболее эффективное, или наиболее рациональное, или оптимальное, или единственно правильное решение); задача решена в установленное преподавателем время или с опережением времени. 4-3 балла выставляется обучающемуся, если решение задачи демонстрирует понимание обучающимся предложенной проблемы; задача решена типовым способом в установленное преподавателем время; имеют место общие фразы и (или) несущественные недочеты в описании хода решения и (или) вывода (ответа). 2-1 балла выставляется обучающемуся, если решение задачи демонстрирует поверхностное понимание обучающимся предложенной проблемы; осуществлена попытка шаблонного решения задачи, но при ее решении допущены ошибки и (или) превышено установленное преподавателем время. 0 баллов выставляется обучающемуся, если решение задачи демонстрирует непонимание обучающимся предложенной проблемы, и (или) значительное место занимают общие фразы и голословные рассуждения, и (или) задача не решена.