Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Емельянов Сергей Геннадьевич
Должность: ректор
Дата подписания: 04.02.2021 19:22:45
Уникальный программный ключ:
9ba7d3e34c012eba476ffd2d064cf2781953be730df2374d16f3c0ce536f0fc6

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
О.Г. Локтионова
2016 г.

ПОВТОРНЫЕ ИСПЫТАНИЯ. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ. ДИСКРЕТНАЯ СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА

Индивидуальные задания и методические указания

по выполнению модуля

Курск 2016

УДК 519

Составитель Н.А.Моргунова

Рецензент

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры
высшей математики *В.И.Дмитриев*

Повторные испытания. Закон больших чисел. Дискретная случайная величина: индивидуальные задания и методические указания по выполнению модуля / Юго-Зап. гос. ун-т; сост. Н.А. Моргунова. − Курск, 2016. − 43 с.: ил.2, табл. 6, прилож. 2. − Библиогр.: с.40.

Излагаются краткие методические рекомендации по разделу теории вероятностей «Повторные испытания. Закон больших чисел. Дискретная случайная величина». Работа содержит примеры выполнения наиболее сложных заданий, примеры использования современного программного продукта MATHCAD. Представлены индивидуальные задания, контрольный тест.

Предназначены для студентов всех специальностей.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать _______ . Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. .Тираж ____экз. Заказ. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Основной формой обучения студентов является самостоятельная работа, которая включает в себя следующие основные части: проработка материала по лекциям, учебникам; выполнение расчетно-графических работ, изучение дополнительного материала по учебникам; выполнение курсовых работ и т.п.

Данная работа содержит методические указания по выполнению модуля, который способствует развитию индивидуального творческого мышления, обеспечивает ритмическую работу студента в течение семестра при изучении разделов теории вероятностей.

В индивидуальных заданиях приведены теоретические упражнения, которые в большинстве своем включены в экзаменационные билеты, а также практические упражнения.

В главе 2 приводятся подробные методические указания по решению типовых задач по разделу теории вероятностей «Повторные испытания. Закон больших чисел. Дискретные случайные величины». Работа содержит также тест для самопроверки знаний, контрольные вопросы, ответы к тесту, использование ЭВМ, приложения и библиографический список. Она может быть полезна не только студентам дневных форм обучения всех специальностей, изучающих раздел математики «Теория вероятностей» и выполняющих модуль, но и студентам заочного, вечернего и дистанционного форм обучения.

Выполнение индивидуальных заданий разделяются по трем уровням сложности: 1) первый (высшей сложности) предполагает выполнение двух теоретических упражнений под номерами n, (30-n) и всех практических, предусмотренных вариантом; 2) второй предполагает выполнение одного теоретического упражнения под номером n и следующих практических заданий: №1,2,3,4,5; 3) третий уровень предполагает выполнение практических заданий №№ 1,2,3,4,5 (1,2,4) и одного теоретического.

В данной работе используются следующие обозначения:

N- последняя цифра номера группы,

n- порядковый номер студента в журнале.

Во время защиты работ нужно уметь отвечать на контрольные вопросы, решать задачи аналогичного типа.

Оценка работы зависит от выбранного студентом уровня сложности, от умений, показанных при защите.

I. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

1.1. Теоретические упражнения

1. Доказать, что наивероятнейшее число K_0 появления события в **n** независимых испытаниях удовлетворяет неравенству
$$np - q \le K_0 \le np + p,$$
где p – постоянная вероятность появления события в каждом испытании, $q = 1 - p$.
2. Доказать, что функция Лапласа $\Phi(x)$ – нечетная функция.
3. Пусть $\Phi(x)$ – функция Лапласа. Доказать, что $\lim\limits_{x \to \infty} \Phi(x) = \frac{1}{2}$.
4. Вывести формулу вероятности отклонения относительной частоты от постоянной вероятности p *в* n независимых испытаниях:
$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right),$$
где $\Phi(x)$ – функция Лапласа.
5. Доказать, что функция распределения вероятностей $F(x)$ (интегральная функция) – неубывающая, и ее значения принадлежат отрезку [0,1].
6. Пусть производятся независимые испытания, в каждом из которых вероятность появления интересующего нас события A постоянна, равна p $(0 < p < 1)$, $q = 1 - p$. Испытания заканчиваются как только событие A наступит. Пусть X – дискретная случайная величина – число испытаний, которые нужно провести до первого наступления события A. Построить ряд распределения дискретной случайной величины X (геометрическое распределение).
7. В условии задачи 7 доказать, что математическое ожидание дискретной случайной величины X вычисляется по формуле $MX = \frac{q}{p}$.
8. В условии задачи 7 вывести формулу для вычисления дисперсии $DX = \frac{q}{p^2}$.

9. Показать, что математическое ожидание биномиального распределения равно np.
10. Доказать, что дисперсия биномиального распределения равна npq.
11. Пусть X и Y − независимые дискретные случайные величины. Определить понятие суммы случайных величин $X+Y$. Доказать, что математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий.
12. Определить понятие произведения независимых дискретных случайных величин X и Y. Доказать, что математическое ожидание их произведения равно произведению их математических ожиданий. (Рассмотреть простейший способ, когда X и Y имеют по два значения).
13. Доказать, что математическое ожидание центрированной случайной величины равно нулю.
14. Показать, что дисперсия суммы, а также разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий.
15. Определить понятие безразмерного коэффициента асимметрии. Покажите, что для биномиального распределения $a_s = \dfrac{q-p}{\sqrt{npq}}$.
16. Что называется эксцессом? Докажите, что для биномиального распределения коэффициент эксцесса вычисляется по формуле $e_k = \dfrac{1-6pq}{npq}$.
17. Доказать формулу Бернулли.
18. Описать свойства функции Гаусса: $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}}$. Доказать, что она имеет две точки перегиба: $\left(\pm 1; \dfrac{1}{e^{0,5}\sqrt{2\pi}}\right)$. Построить ее график.
19. Доказать локальную формулу Лапласа.
20. Описать свойства функции Лапласа: $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2/2} dt$. Построить ее график.

21. Вывести формулу Пуассона.
22. Доказать неравенство Чебышева: если X − случайная величина, математическое ожидание которой $MX=a$, дисперсия $DX=D$, ε-произвольное положительное число, то $P(|x-a| \le \varepsilon) \ge 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}$
23. Доказать, что математическое ожидание среднего арифметического n одинаково распределенных взаимно независимых случайных величин равно математическому ожиданию a каждой из величин.
24. Доказать, что дисперсия среднего арифметического n одинаково распределенных взаимно независимых случайных величин в n раз меньше дисперсии D каждой из величин.
25. Вывести формулу, устанавливающую связь между центральным моментом случайной величины X третьего порядка с ее начальными моментами первого, второго и третьего порядков.

1.2. Практические задания

Задание 1. Используя теорему Бернулли, решить следующие задачи, значения p, k, m выбрать согласно варианту n по списку журнала.

Вариант 1-5. Вероятность попадания при выстреле равна p из общего числа. Какова вероятность k попаданий при m выстрелах:

n = 1:	p = 0,7,	k = 4,	m = 5+N;
n = 2:	p = 0,7,	k = 3,	m = 4+N;
n = 3:	p = 0,8,	k = 5,	m = 6+N;
n = 4:	p = 0,8,	k = 2,	m = 3+N;
n = 5:	p = 0,6,	k = 3,	m = 4+N.

Вариант 6-10. Вероятность приема радиосигнала равна 0,8. Какова вероятность того, что сигнал при (2+N) передаче будет принят:

n = 6:	а) равно три раза;
n = 7:	б) не менее четырех раз;
n = 8:	в) хотя бы один раз;
n = 9:	г) более двух раз;
n = 10:	д) менее трех раз.

Вариант 11-15. Допустим, что (20+N) % населения носит очки. Какова вероятность того, что из случайно взятых 10 человек носят очки:

n = 11: а) равно 5 человек;
n = 12: б) равно 2 человека;
n = 13: в) не менее 7 человек;
n = 14: г) менее 3 человек;
n = 15: д) хотя бы один человек.

Вариант 16-20. Вероятность нарушения точности в сборке прибора составляет p. Найти наиболее вероятное число точных приборов в партии из m приборов:

n = 16: p = 0,2, m = 7+N;
n = 17: p = 0,3, m = 8+N;
n = 18: p = 0,1, m = 5+N;
n = 19: p = 0,4, m = 6+N;
n = 20: p = 0,5, m = 4+N;

Вариант 21 -25. Магазин принимает партию из 10+N радиоприемников для продажи в том случае, если при проверке двух из них, выбранных наугад, они оба оказываются исправными. Какова вероятность того, что магазин примет партию, содержащую:

n = 21: а) 3 неисправных приемника;
n = 22: б) хотя бы один неисправный приемник;
n = 23: в) 4 неисправных приемника;
n = 24: г) менее 3 неисправных приемников;
n = 25: д) более 8 неисправных приемника.

Вариант 26-30. Сколько следует произвести повторных испытаний, чтобы вероятнейшее число появлений некоторого события оказалось равным m_0, если вероятность появления события в отдельных испытаниях равна p:

n = 26: m_0 = 21+N; p = 0,75;
n = 27: m_0 = 20+N; p = 0,8;
n = 28: m_0 = 22+N; p = 0,7;
n = 29: m_0 = 23+N; p = 0,6;
n = 30: m_0 = 19+N; p = 0,9.

Задание 2. Вероятность изготовления бракованного генератора для автомобильного двигателя равна $3N \cdot 10^{-4}$. Определить вероятность того, что в изготовленной партии из $(500+n)$ генераторов окажется хотя бы один бракованный. Как с возрастанием числа генераторов в партии меняется искомая вероятность? Найти искомую вероятность двумя способами:

а) с использованием формулы Пуассона;

б) с использованием локальной теоремы Муавра-Лапласа.

Задание 3. Проверкой качества изготовляемых на заводе часов установлено, что в среднем 98% их отвечают предъявляемым требованиям, а 2% нуждаются в дополнительной регулировке. Приемщик проверяет качество $(300N+n)$ изготовленных часов. Если при этом среди них обнаружится $11 \cdot N$ или более часов, нуждающихся в дополнительной регулировке, то вся партия возвращается заводу для доработки. Какова вероятность того, что партия будет принята? (Воспользоваться интегральной теоремой Лапласа).

Задание 4. Проверяют $(900N+n)$ деталей на стандартность. Вероятность того, что деталь стандартна, равна 0,9. Найти с вероятностью 0,9544 границы, в которых будет заключено число m стандартных деталей.

Задание 5. Случайная величина X задана рядом распределения.

X_i	$-\frac{7n}{10}$	$-\frac{n}{5}$	$\frac{n}{2}$	$\frac{3n}{5}$	$\frac{7N \cdot n}{10}$
P_i	$\frac{N}{2(N+1)}$	$\frac{N}{4(N+1)}$	P_0	$\frac{N}{8(N+1)}$	$\frac{N}{8(N+1)}$

Найти:

1) вероятность p_0;

2) математическое ожидание, дисперсию случайной величины X;

3) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение случайной величины $\left(NX+\frac{n}{4}\right)$;

4) функцию распределения случайной величины X $F(x)$ и построить ее график;

5) значение $F(n/2)$.
6) центральные и начальные моменты третьего и четвертого порядков;
7) коэффициенты асимметрии и эксцесс.

Задание 6

6.1. В урне 8 шаров с такими числами: 0,0,1,3,3,2,4,N. Наугад вынимают шар. Случайная величина X – число вынутых очков на шаре. Найти математическое ожидание MX и значение функции распределения $F(4)$.

6.2. Брошены две игральные кости. Случайная величина X – сумма выпавших очков. Найти дисперсию $D[NX]$.

6.3. В урне 3 шара, пронумерованных 1,2,3. Пусть X − число очков на шаре при случайной выборке его из урны. Найти дисперсию $D[NX+5]$.

6.4. Передается несколько радиосигналов с вероятностью принятия каждого 0,8. Передача сигнала ведется до первого приема, но не свыше четырех сигналов. Определить ряд распределения и математическое ожидание числа переданных сигналов. Найти $M[NX+1]$.

6.5. Среди 20+N приборов в среднем имеется 6+N неточных. Найти среднее квадратическое отклонение σ числа точных приборов X среди наудачу отобранных 5+N.

6.6. Независимые испытания аппаратуры повторяются до тех пор, пока она не дает отказ. Вероятность отказа от испытания к испытанию не меняется и равна 0,2. Найти математическое ожидание числа безотказных испытаний. Найти $M[NX-3]$.

6.7. Два стрелка делают по одному выстрелу в одну мишень. Вероятность попадания при одном выстреле для первого стрелка 0,7, для второго − 0,8. Найти дисперсию числа попаданий в мишень. Найти $D[NX-3]$.

6.8. Монета бросается наудачу (2+N) раз. Найти математическое ожидание и дисперсию числа выпадений герба.

6.9. В коробке 9+N карандашей, из которых 5+N зеленых. Наудачу извлекают 4+N карандаша. Составить ряд распределений числа зеленых карандашей среди отобранных. Найти значение функции распределения $F(3+N)$.

6.10. Рабочий обслуживает два независимо работающих станка. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего, равна для первого станка 0,7, для второго - 0,8. Построить график функции распределения случайной величины X − числа станков, которые не потребуют внимания рабочего. Найти $F(N/3)$.

6.11. Найти математическое ожидание суммы очков при бросании двух игральных костей. Найти $M[NX-7]$.

6.12. Найти дисперсию разности очков при бросании двух игральных костей. Найти $D[NX-4]$.

6.13. Передаются $2+N$ сигнала. Вероятность приема каждого сигнала равна 0,4. Найти дисперсию числа принятых сигналов.

6.14. Вероятность того, что разрывное усилие взятой наудачу оцинкованной проволоки диаметром 0,6мм будет более 45 кг, равна 0,88. Для свивки каната из большого числа витков разбирается $(60+N)$ штук данного сорта. Найти наивероятнейшее число и математическое ожидание витков с разрывным усилием 45 кг.

6.15. Стреляют по удаляющейся цели. При первом выстреле вероятность попадания равна 0,7, при каждом следующем – вероятность попадания уменьшается в два раза. Найти среднее квадратическое отклонение числа попаданий в цель при $(N+1)$ выстрелах.

6.16. Производится два независимых опыта, в каждом из которых с равной вероятностью может быть получено любое из чисел – 2, 1, 0, N, 2. Найти дисперсию суммы полученных чисел.

6.17. Контрольный просмотр сложного прибора обнаруживает в среднем на $50+N$ приборов $10+N$ дефектных. Составить закон распределения случайной величины X – числа точных приборов из наудачу выбранных 5 приборов.

6.18. В условии задачи 6.17 найти среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

6.19. В урне 4 шара, пронумерованные 1,2,3,4. Пусть X – число очков на шаре при случайном выборе его из урны. Изменится ли и каким образом дисперсия $D[NX]$, если все числа на шарах увеличится вдвое? Ответ обосновать. Найти значение $F(N/2)$.

6.20. Найти математическое ожидание числа выпадений шестерки при бросании игральной кости $20+N$ раз?

6.21. Производится три независимых опыта, в каждом из которых с равной вероятностью может быть получено любое из чисел – 1, 0, N. X – наибольшее из этих чисел. Найти среднее квадратическое отклонение случайной величины NX. Как изменится случайная величина NX, если число – 1 заменить на – 2?

6.22. На пути движения автомобиля N+1 светофора. Каждый из них разрешает движение дальнейшее с вероятностью 0,25. Найти математическое ожидании случайной величины X – числа светофоров, пройденных автомобилем до первой остановки. Найти $M[NX+2]$.

6.23. В условии задачи 6.22 найти значение функции распределения $F(N)$.

6.24. Найти математическое ожидание случайной величины X – остатка от делении произведения выпавших очков на (2+N) при бросании двух игральных костей. Найти $M[NX+3]$.

6.25. На 6 гранях кубика стоят числа 1, 1, 2, N, N, N. X – число очков, выпавших при бросании этого кубика. Найти дисперсию $D[NX+6]$.

6.25. В коробке находятся 4+n карандашей, причем 80% из них изготовлены из кедра, 20% - из красного дерева. Составить рад распределения случайной величины X − число карандашей из кедра в коробке.

6.26. В условии задачи 6.25 найти математическое ожидание $M[NX+6]$ и дисперсию $D[NX-1]$.

Задание 7

Используя теоремы закона больших чисел решить следующие задачи согласно номеру n по списку фамилии студента в журнале:

Вариант 1−5. В осветительную сеть параллельно включено 20+n ламп. Вероятность того, что за время t лампа будет включена равна 0,8. Оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом включения ламп и средним числом (математическим ожиданием) включенных ламп за время t окажется меньше трех. (Воспользоваться неравенством Чебышева).

Вариант 6−10. Вероятность появления события в каждом испытании равна 0,25. Используя неравенство Чебышева оценить вероятность того, что число X появления событий заключено в пределах от 150+n до 250+n, если произведено 800+N испытаний

Вариант 11−15. Установлено, что брак производства деталей составляет 2,5%. Найти вероятность того, что при осмотре опытной партии в 800+N деталей обнаруженный процент брака будет отличаться от установленного процента брака не более, чем на 0,005. (Воспользоваться неравенством Бернулли закона больших чисел).

Вариант 16−20. Определить наибольшее отклонение частоты появления события при 5000+ n повторных независимых испытаниях от вероятности, равной 0,8, появления этого события в отдельном испытании, если задана ожидаемая вероятность этого отклонения $P \geq 0{,}94$.

Вариант 21−25. Сколько нужно произвести испытаний, чтобы с вероятностью не менее P можно было утверждать, что отклонение частоты от вероятности p будет не более ε:

$n = 21$:	$P = 0{,}99$,	$p = 0{,}35$,	$\varepsilon = 0{,}02$;
$n = 22$:	$P = 0{,}95$,	$p = 0{,}25$,	$\varepsilon = 0{,}01$;
$n = 23$:	$P = 0{,}9$,	$p = 0{,}7$,	$\varepsilon = 0{,}03$;
$n = 24$:	$P = 0{,}99$,	$p = 0{,}4$,	$\varepsilon = 0{,}15$;
$n = 25$:	$P = 0{,}95$,	$p = 0{,}6$,	$\varepsilon = 0{,}02$.

2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕЩЕНШО ЗАДАЧ

2.1 Формула Бернулли

Схема Бернулли состоит в том, что рассматривается последовательность взаимно независимых испытаний, вероятность того или иного результата в каждом из них не зависит от результатов, которые были получены или получаются в остальных. В каждом из этих испытаний может наступить некоторое событие A с постоянной вероятностью p или не наступить с вероятностью $q = 1 - p$.

Вероятность того, что в и испытаниях событие A наступит m раз равна

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}, \tag{2.1}$$

где $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ - число сочетаний из n по m.

Наивероятнейшее число m_0 наступления события при повторении испытаний оценивается неравенством

$$np - q \le m_0 \le np + p. \tag{2.2}$$

Вероятность того, что в n повторных испытаниях событие A наступит не менее m_1, но не более m_2 раза, равна

$$P_n(m_1, m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} P_n(m) = \sum_{m=m_1}^{m_2} C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}. \tag{2.3}$$

Задача 1. В некоторой семье имеется 5 детей. Если принять рождение мальчика с вероятностью 0,51, то какова вероятность того, что в семье будут: а) 2 мальчика; б) не менее трех мальчиков?

Решение. Воспользуемся формулами (2.1) и (2.3).

а) $P_5(2) = C_5^2 \cdot 0{,}51^2 \cdot (1 - 0{,}51)^3 = \dfrac{5!}{2!3!} 0{,}51^2 \cdot 0{,}49^3 =$

$= 10 \cdot 0{,}51^2 \cdot 0{,}49^2 = 0{,}306.$

б) Событие «в семье не менее трех мальчиков» означает, что в семье могут быть и 3 мальчика, и 4 мальчика, и 5 мальчиков. Необходимо взять объединение этих событий.

$$P = P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = C_5^3 \cdot 0{,}51^3 \cdot 0{,}49^2 + C_5^4 \cdot 0{,}51^4 \cdot 0{,}49 +$$
$$+ C_5^5 \cdot 0{,}51^5 \cdot (0{,}49)^0 = 0{,}3185 + 0{,}1642 + 0{,}0340 = 0{,}5167.$$

Задача 2. Испытываются 32 элемента некоторого устройства. Вероятность того, что элемент выдержит испытание, равна 0,9. Найти наивероятнейшее число элементов, которые выдержат испытание.

Решение. По условию задачи n=32; p=0,9; q=1−0,9=0,1. Воспользуемся неравенством (2.3):

$$32 \cdot 0{,}9 - 0{,}1 \le m_0 \le 32 \cdot 0{,}9 + 0{,}9;$$

$$28{,}1 \le m_0 \le 29{,}7$$

Целым числом является m_0=29.

2.2 Повторные испытания. Асимптотические формулы биномиального распределения

Формула Бернулли вычисления вероятности того, что в n повторных испытаниях интересующее нас событие A наступит ровно m раз является точной формулой. Однако ее неудобно использовать из-за сложности расчетов при достаточно больших n. Существуют формулы для приближенного вычисления той же самой вероятности, причем при неограниченном возрастании n погрешность вычисления по ним есть величина бесконечно малая.

2.2.1 Локальная формула Муавра-Лапласа

Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то при достаточно больших n

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \qquad (2.4)$$

где $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ − функция Гаусса,

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}; \qquad q = 1 - p.$$

Формулу (2.4) называют еще асимптотической формулой биномиального распределения, так как она дает возможность найти вероятность $P_n(m)$ с небольшой погрешностью даже тогда, когда p близко к 0 или 1, но и при этом должна быть устойчиво велико.

Значения функции φ(x) затабулированы, причем при $x \geq 4{,}03$ считают φ(x)≈0.

2.2.2 Формула Пуассона

Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и мала, а число n испытаний достаточно велико, то

$$P_n(m) = \frac{a^m \cdot e^{-a}}{m!}, \tag{2.5}$$

где $a = np$ есть величина постоянная.

Формулу Пуассона часто называют законом редких событий из-за малости числа p. Ее целесообразно применять при $n \geq 50;\ p \leq 0{,}03$.

Для вычисления функции $\dfrac{a^m \cdot e^{-a}}{m!}$ составлены в справочниках по теории вероятностей таблицы (см.приложение).

Задача 3. Вероятность изготовления стандартной детали 0,98. Какова вероятность того, что среди 50 деталей одна нестандартная.

Решение. По условию задачи n=50; p=0,02; q=0,98; m=1. Решим эту задачу тремя способами, оценим результаты.

а) По формуле Бернулли:

$$P_{50}(1) = C_{50}^1 \cdot 0{,}02^1 \cdot 0{,}98^{49} \approx 0{,}3705.$$

б) По формуле Муавра-Лапласа:

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{1 - 50 \cdot 0{,}02}{\sqrt{50 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98}} = 0.$$

По таблице значений функции Гаусса из любого учебника по теории вероятностей [1-5] (Приложения) или из любого справочника по теории вероятностей находим: φ(0)=0,3989. (Можно было воспользоваться и свойствами функции Гаусса).

Тогда

$$P_{50}(1) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}} = \frac{0{,}3989}{\sqrt{50 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98}} = \frac{0{,}3989}{0{,}9899} = 0{,}4030.$$

Относительная погрешность этого результата по сравнению с точным по формуле Бернулли составляет:

$$\frac{|0{,}4030 - 0{,}3705| \cdot 100\%}{0{,}3705} \approx 8{,}77\%,$$

в) по формуле Пуассона;

$a = np$=50·0,02 =1,

$$P_{50}(1) = \frac{1^1 \cdot e^{-1}}{1!} = \frac{1}{e} \approx 0{,}3679.$$

Относительная погрешность расчета равна

$$\frac{|0{,}3705 - 0{,}3679|}{0{,}3705} \cdot 100\% = 0{,}7\%,$$

то есть в 12 раз меньше, чем в формуле Муавра-Лапласа.

Таким образом, при очень малых p лучше применять формулу Пуассона. Формула (2.4) при p=0 или p=1 неприменима.

2.2.3 Интегральная теорема Лапласа

Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна, отлична от 0 и 1, то

$$P_n(m_1, m_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \tag{2.6}$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t/2} dt$$ − функция Лапласа,

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}; \qquad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Значения функции Лапласа затабулированы, при $x \geq 5$ считают $\Phi(x)$=0,5. Данная формула дает хорошие результаты при $p \to 0{,}5; n \geq 25$. Если же p близко к 0 или 1, то так же как и локальную теорему Муавра-Лапласа, ее можно использовать лишь при больших n, так как при малых n она дает большую погрешность.

Задача 4. Вероятность того, что при изготовлении детали отклонение параметров от номинальных будет в пределах допусков, равна 0,95. Найти вероятность того, что из 1000 изготовленных деталей не менее 90% деталей окажутся годными.

Решение. Для отыскания искомой вероятности воспользуемся формулой (6):

$$P_n(m_1,m_2)=\Phi(x_2) - \Phi(x_1).$$

$$n=1000;\ m_1=1000\cdot 0{,}9=900;\ m_2=1000;\ p=0{,}95;\ q=0{,}05,$$

$$x_1=\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{900-1000\cdot 0{,}95}{\sqrt{1000\cdot 0{,}95\cdot 0{,}05}}=-1{,}05;$$

$$x_2=\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{1000-1000\cdot 0{,}95}{\sqrt{1000\cdot 0{,}95\cdot 0{,}05}}=1{,}05;$$

$$P_{1000}(900{,}1000)=\Phi(1{,}05)-\Phi(-1{,}05)=2\Phi(1{,}05)=2\cdot 0{,}2295=0{,}4598.$$

Функция Лапласа нечетная: $\Phi(-x)=-\Phi(x)$, значение $\Phi(1{,}05)=0{,}2295$ взята из таблиц значений функции Лапласа.

2.2.4 Оценка отклонения относительной частоты от постоянной вероятности

Вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях вычисляется по формуле

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right), \qquad (2.7)$$

где $\varepsilon>0$; $\Phi(x)$ − функция Лапласа.

Задача 5. При штамповке 70% деталей выходит первым сортом, 20% - вторым, 10%-третьим. Определить, сколько нужно взять отштампованных деталей, чтобы с вероятностью 0,9973 можно было утверждать, что первосортных среди них будет отличаться от вероятности изготовления первосортной детали по абсолютной величине не более, чем на 0,05?

Решение. Вероятность того, что случайно отобранная деталь будет первосортной равна p=0,7, тогда вероятность противоположного события $q = 1 - p = 0{,}3$.

Обозначим ε=0,05; P=γ=0,9973.

Воспользуемся оценкой отклонения относительной частоты от постоянной вероятности:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

с другой стороны,

$$\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pn}}\right) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0{,}9973}{2} = 0{,}49865.$$

По таблице значений функции Лапласа находим (см.приложения):

$$0{,}05 \cdot \sqrt{\frac{n}{0{,}7 \cdot 0{,}3}} = 3.$$

Из этого уравнения находим n:

$$n = \frac{9 \cdot 0{,}21}{0{,}0025} = 756.$$

2.3 ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

2.3.1 Понятие дискретной величины, способы задания

Величины, значения которых нельзя заранее указать и которые зависят от случайных причин, называются случайными. Их обозначают буквами X,Y,Z,... Например число родившихся детей в городе за день; число больных, посетивших врача за определенный промежуток времени; число вызовов в течение часа на телефонной станции − это дискретные случайные величины, то есть величины, которые могут приниматься отдельно, изолированные значения, причем этих значений может быть конечное или бесконечное, но счетное множество.

Дискретную случайную величину можно задавать в виде: 1) закона (ряда) распределения (табличный способ); 2) с помощью функции распределения (аналитический способ); 3) числами, описывающими случайную величину суммарно, называемыми числовыми характеристиками.

Пусть дискретная случайная величина X может принимать только значения $x_1, x_2, \ldots x_n$. Она будет полностью охарактеризована, или, другими словами распределена, если для каждого ее возможного значения x_i будет задана соответствующая вероятность $p_i = p(X = X_i)$, где i-1,2,…n. Функция $P(X)$, связывающая значения случайной величины с соответствующими им вероятностями, представляет собой **закон распределения случайной величины.**

Для **дискретной** случайной величины закон удобно задавать в виде таблицы **- ряда распределения**.

Таблица 2.1

X	x_1	x_2	x_3	…	x_n
P	p_1	p_2	p_3	…	p_n

где $\sum_{i=1}^{n} P_i = 1.$

Помимо дискретных существуют непрерывные случайные величины, то есть принимающие все значения на промежутке (a,b).

Функцией распределения вероятностей $F(x)$ или интегральной функцией случайной величины X называется вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньше x:

$$F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x).$$

Функция распределения любой случайной величины X обладает следующими свойствами:

1) определена на всей числовой оси, причем $0 \le F(x) \le 1$;

2) неубывающая функция;

3) $F(-\infty) = 0$; $F(+\infty) = 1$.

2.3.2 Характеристики дискретной случайной величины

Математическое ожидание

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется величина

$$M[X] = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i, \qquad (2.8)$$

если количество всех ее возможных значений конечно, если же – счетно, то $M[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$, если этот ряд сходящийся.

По своему вероятностному смыслу математическое ожидание стремится к среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины, когда количество испытаний достаточно велико.

Основные свойства математического ожидания:

1) $M[C]=C$, где C -const;

2) $M[CX]=CM[X]$;

3) $M[X+Y]=M[X] + M[Y]$;

4) $M[X \cdot Y]= M[X] \cdot M[Y]$, если X и Y – независимые случайные величины.

Дисперсия

Назовем центрированной случайной величиной разность $X-M[X]$.

Дисперсией (рассеиванием) дискретной случайной величины называют величину $D[X]=M[X-M[X]]^2$. (2.9)

Можно доказать, что $D[X]=M[X]^2-(M[X])^2$. (2.11)

Средним квадратическим (стандартным) отклонением случайной величины **X** называют величину

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]}. \qquad (2.11)$$

Случайные величины при одинаковом математическом ожидании могут вести себя в опытах неодинаково, иметь разное рассеяние. Эту изменчивость случайной величины от опыта к опыту характеризуют дисперсия и среднее квадратическое отклонение, то есть по своему вероятностному смыслу – это разброс случайной величины около своего математического ожидания.

Существуют и другие характеристики дискретной случайной величины: мода, медиана, эксцесс, асимметрия и другие.

Мода – это точка X_i в которой максимальна вероятность p_i, а медиана – точка d, слева и справа от которой вероятность одинакова, то есть $P(X<d) = P(X>d)$.

С другими характеристиками дискретной случайной величины можно познакомиться по учебникам [1]-[6].

Основные свойства дисперсии:

1) $D[C]=0$, где C -const;

2) $D[CX]=C^2\cdot D[X]$;

3) $D[X\pm Y]= D[X]+D[Y]$, если X и Y – независимые случайные величины.

Задача 6. На полиметаллическом руднике из забоя взято 10 проб. Результаты химических анализов на содержание металла по пробам представлены в таблице 2.2.

Таблица 2.2

Номер пробы	2	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Содержание металла в %	0,5	0,55	0,4	0,6	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4

Составить закон распределения случайной величины X – числа в % содержания металла.

Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, функцию распределения случайной величины X.

Решение. Составим закон распределения случайной величины X (табл.2.3)

Таблица 2.3

X	0,4	0,5	0,55	0,6
P	7/10	1/10	1/10	1/10

Проверка: $\sum_{i=1}^{4} P_i = 0{,}7 + 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}1 = 1.$

Найдем математическое ожидание случайной величины X:

$$M[X] = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i = 0{,}4\cdot 0{,}7 + 0{,}5\cdot 0{,}1 + 0{,}55\cdot 0{,}1 + 0{,}6\cdot 0{,}1 = 0{,}391.$$

Вычислим дисперсию по формуле

$D[X]=M[X]^2-(M[X])^2$

$D[X]=0{,}4^2\cdot 0{,}7+0{,}5^2\cdot 0{,}1+0{,}55^2\cdot 0{,}1+0{,}6^2\cdot 0{,}1-0{,}391^2=$

$=0{,}102+0{,}025+0{,}03025+0{,}036-0{,}143881=0{,}049369\approx 0{,}05.$

Среднее квадратичное отклонение случайной величины X будет равно

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]} = \sqrt{0{,}049369} \approx 0{,}22.$$

Найдем функцию распределения случайной величины X

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0 & при\ x \le 0{,}4; \\ 0{,}7 & при\ 0{,}4 < x \le 0{,}5; \\ 0{,}8 & при\ 0{,}5 < x \le 0{,}55; \\ 0{,}9 & при\ 0{,}55 < x \le 0{,}6; \\ 1 & при\ x > 0{,}6. \end{cases}$$

Легко видеть, что каждое последующее значение функции распределения получается путем сложения вероятностей из закона распределения:

$x \le 0{,}4:$	$F(x) = 0;$
$0{,}4 < x \le 0{,}5:$	$F(x) = 0{,}7;$
$0{,}5 < x \le 0{,}55:$	$F(x) = 0{,}7 + 0{,}1 = 0{,}8;$
$0{,}55 < x \le 0{,}6:$	$F(x) = 0{,}7 + 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}9;$
$x > 0{,}6:$	$F(x) = 0{,}7 + 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}1 = 1,$

поэтому функцию распределения часто называют «накопленной» или, как видно из ее графика, «ступенчатой».

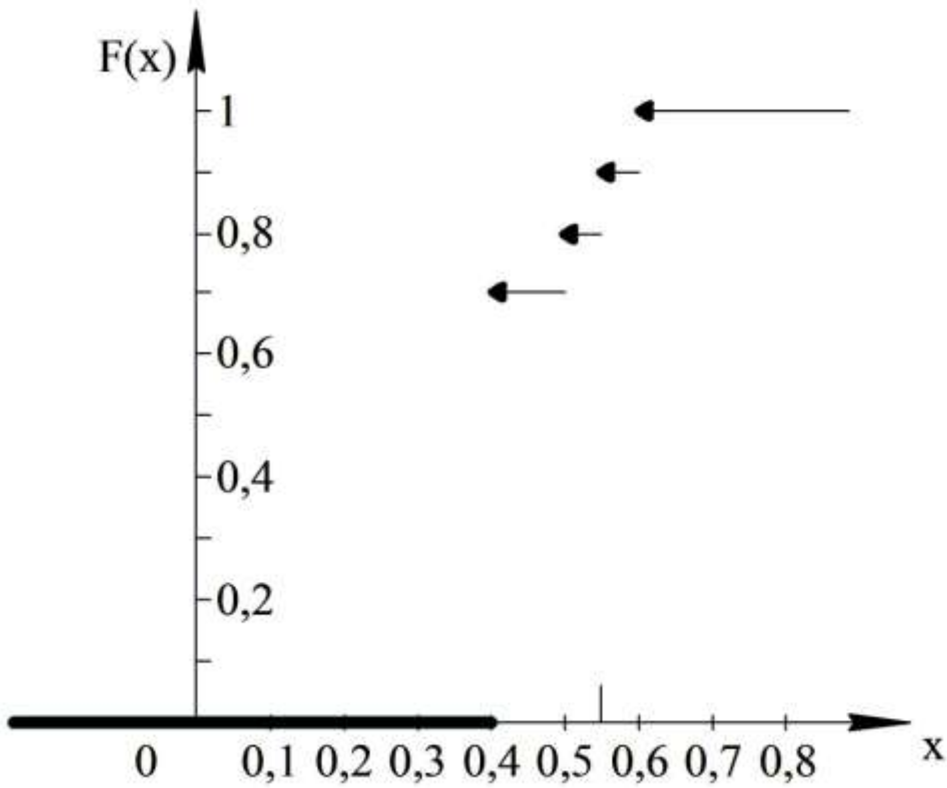

Рисунок 2.1. График функции распределения

2.4 БИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых интересующее нас событие A может появиться с вероятностью p и не появиться с вероятностью $q = 1 - p$. Рассмотрим в качестве дискретной случайной величины X число появления события A в этих испытаниях.

Найдем закон распределения X. Возможные ее значения таковы: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$, ... $x_{n+1}=n$. Вероятность этих значений находится по формуле Бернулли

$$P_n(k) = C_n^k p^k \cdot q^{n-k}, \quad k=0,1,2,\dots n.$$

Искомое распределение называют **биномиальным**. Название распределения объясняется тем, что число $P_n(k)$ являются слагаемыми в разложении бинома Ньютона:

$$1 = (p+q)^n = P_n(0) + P_n(1) + P_n(2) + ... + P_n(n) =$$

$$= C_n^0 \cdot p^0 \cdot q^n + C_n^1 \cdot p \cdot q^{n-1} + C_n^2 \cdot p^2 \cdot q^{n-2} + ... + C_n^n \cdot p^n \cdot q^0.$$

Функция биномиального распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при\ \ m \le 0, \\ \sum\limits_{m_1 < m} P_n(m_i) & при\ \ 0 < m \le n, \\ 1, & при\ m > n. \end{cases}$$

Можно доказать, что числовые характеристики распределения вычисляются но формулам:

1) математическое ожидание:

$$M[X]=np; \tag{2.12}$$

2) дисперсия:

$$D[X]=npq; \tag{2.13}$$

3) среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma[X] = \sqrt{npq}; \tag{2.14}$$

4) коэффициент асимметрии:

$$a_s = \frac{q-p}{\sqrt{npq}}; \tag{2.15}$$

5) коэффициент эксцесса:

$$e_x = \frac{1-6pq}{npq}. \qquad (2.16)$$

Задача 7. При установившемся техническом процессе 2/3 всей продукции станок-автомат выпускает первым сортом; 1/3 − вторым сортом. Составить закон распределения числа изделий первого сорта среди пяти штук, отобранных случайным образом. Найти характеристики этого закона распределения: $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, a_s, e_x.

Найти значение функции распределения $F(1)$.

Решение. Случайная величина X – число изделий первого сорта среди 5 штук, отобранных случайным образом. Имеем биномиальное распределение

$$p_i = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$$

По условию задачи n=5, p=2/3, q=1/3, где p – вероятность того, что случайно отобранное изделие, изготовленное станком-автоматом, является изделием первого сорта, q – вероятность противоположного ему события.

Следовательно, $P_i = C_5^k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{5-k}$, где k=0,1,2,3,4,5.

$$P_1 = P_5(0) = C_5^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{3^5}; \qquad C_5^0 = \frac{5!}{5!0!} = 1;$$

$$P_2 = P_5(1) = C_5^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{10}{3^5}; \qquad C_5^1 = \frac{5!}{4!1!} = 5;$$

$$P_3 = P_5(2) = C_5^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{40}{3^5}; \qquad C_5^2 = \frac{5!}{3!2!} = 10;$$

$$P_4 = P_5(3) = C_5^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{80}{3^5}; \qquad C_5^3 = \frac{5!}{2!3!} = 10;$$

$$P_5 = P_5(4) = C_5^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{80}{3^5}; \qquad C_5^4 = \frac{5!}{1!4!} = 5;$$

$$P_6 = P_5(5) = C_5^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{32}{3^5}; \qquad C_5^5 = \frac{5!}{0!5!} = 1.$$

Выпишем ряд распределения (табл. 2 4)

Таблица 2.4

X	0	1	2	3	4	5
P	$1/3^5$	$10/3^5$	$40/3^5$	$80/3^5$	$80/3^5$	$32/3^5$

Легко видеть, что

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = \frac{1}{3^5} + \frac{10}{3^5} + \frac{40}{3^5} + \frac{80}{3^5} + \frac{80}{3^5} + \frac{32}{3^5} = 1.$$

Найдем характеристики биномиального распределения:

1) $M[X] = n \cdot p = 5 \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$ – математическое ожидание;

2) $D[X] = n \cdot p \cdot q = 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{10}{9}$ – дисперсия;

3) $\sigma[X] = \sqrt{npq} = \sqrt{\frac{10}{9}} = \frac{\sqrt{10}}{3}$ – среднее квадратическое отклонение;

4) $a_s = \frac{q-p}{\sqrt{npq}} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{10}}{3}} = -\frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$ – коэффициент асимметрии;

5) $e_x = \frac{1-6pq}{npq} = \frac{1-6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{10}{9}} = \frac{(1-\frac{4}{3}) \cdot 9}{10} = \frac{1}{2}$ – коэффициент эксцесса.

Найдем значение функции распределения F(1). Согласно определению функции распределения

$$F(x) = P(x < 1) = \frac{1}{5^5} = \frac{1}{243}.$$

Помимо биномиального на практике часто встречается Пуассоновское, геометрическое к другие распределения дискретной случайной величины. Подробнее о них вы можете прочитать в литературе, указанной в конце этих методических указаний.

2.5 ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

Если мы имеем дело с большим числом однородных опытов или со случайной величиной, являющейся следствием большого числа малых случайных воздействий, то имеет место свойство устойчивости средних, известное человеку с глубокой древности. Сущность этой устойчивости для массовых случайных явлений заключается в том, что конкретные особенности каждого отдельного случайного явления почти не сказываются на среднем результате массы таких явлений. Случайные отклонения от среднего, неизбежные в каждом отдельном явлении, в массе – взаимно погашаются нивелируются, выравниваются.

При большом числе случайных явлений средний их результат практически перестает быть случайным и может быть предсказан с большой степенью точности.

Именно эта устойчивость средних и представляет собой физическое содержите закона больших чисел.

Так, о качестве производимой продукции на предприятии судят по взятым небольшим партиям этой продукции, отобранных случайным образом. Или, по опросу случайно взятой небольшой группы населения социологи делают достаточно верные предсказания об отношении всего населения к тем или иным проблемам общества.

Для практики очень важно знать, при каких условиях совокупное действие многих случайных причин приводит к среднему результату, почти независящему от случая. Под «законом больших чисел» в теории вероятности понимается ряд теорем, в каждой из которых для тех или иных условий устанавливается факт приближения средних характеристик большого числа опытов к некоторым определенным постоянным.

Наиболее важными из них являются теоремы Чебышева, Бернулли, Ляпунова. Приведем некоторые из них.

Чебышев П.А. (1867) доказал, чго каково бы не было положительное число **ε**, для случайной величины *X* с математическим ожиданием *a* и дисперсией *D* справедливо неравенство

$$P(|X-a| \le \varepsilon) > 1 - \frac{D}{\varepsilon^2}. \qquad (2.17)$$

Бернулли Я. доказал теорему утверждающую, что в последовательности из *n* независимых испытаний по схеме Бернулли при любом ε>0 справедливо неравенство

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) > 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}, \qquad (2.18)$$

где $\frac{m}{n}$ – частота появления события в **n** испытаниях.

Наиболее общей формой закона больших чисел является следующая теорема Чебышева:

Если случайные величины $X_1, X_2, ..., X_n$ попарно независимы, имеют математические ожидания $a_1, a_2, ..., a_n$ и дисперсии $D_1, D_2, ..., D_n$, каждая из которых равномерно ограничена (не превышает постоянного числа С), то для любого сколь угодного малого числа ε выполнятся равенство

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n} - \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\right| \le \varepsilon\right) = 1 \qquad (2.19)$$

Задача 8. Средний вес изделия равен 100г, дисперсия веса 0,04. Какова вероятность того, что вес наудачу взятого изделия окажется не менее 99,5 г и не более 100,5 г.

Решение. Случайная величина *X* – вес наудачу взятого изделия. По условию задачи ясно, что математическое ожидание $M[X]=100$; $D[X]=0{,}04$.

$99{,}5 \le X \le 100{,}5$. Опкуда следует, что $|X - M[X]| \le 0{,}5$. Следовательно, ε=0,5.

Воспользуемся неравенством Чебышева

$$P(|X - M[X]| \le 0{,}5) > 1 - \frac{0{,}04}{0{,}5^2} = 0{,}84.$$

Таким образом, искомая вероятность $0{,}84 < P \le 1$.

2.6 РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

Задача 9. Дан ряд распределения случайной величины X (табл. 2.5).

Таблица 2.5

X	−2	−1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1

а) Построить многоугольник распределения.

б) Найти вероятность того, что X примет значения, не превосходящие по абсолютной величине 1.

Решение.

а) Многоугольником распределения или полигоном вероятностей называют ломанную линию, соединяющую точки (X_i,P_i) из ряда распределения случайной величины. Построим чертеж (рис. 2.2).

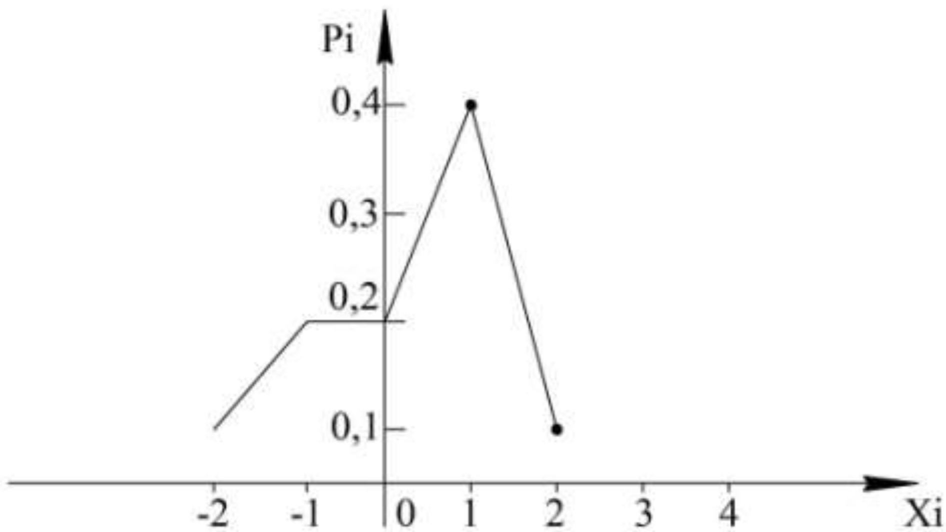

Рисунок − 2.2 Полигон вероятностей

б) Найдем вероятность того, что X примет значения, не превосходящие по абсолютной величине 1. По определению функции распределения $F(x)=P(X<x)$, поэтому

$$F(x)=\begin{cases} 0, & при\ x \le -2; \\ 0{,}1 & при\ -2 < x \le -1; \\ 0{,}3 & при\ -1 < x \le 0; \\ 0{,}5 & при\ 0 < x \le 1; \\ 0{,}9 & при\ 1 < x \le 2; \\ 1 & при\ x > 2. \end{cases}$$

Окончательно, $P(|X| \le 1) = P(|X < 1|) = P(-1 \le X \le 1) = 0{,}5 - 0{,}1 = 0{,}4.$

Задача 10. С вероятностью попадания при одном выстреле 0,7 охотник стрелял по дичи до первого попадания, но успевает сделать не более 4 выстрелов. Составить закон распределения случайной величины X - числа выстрелов, производимых охотником. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = 3X + 5$; $Z = 2X - 1$.

Решение. Охотник может попасть в цель с первого или со второго, или с третьего, или с четвертого, или вовсе за 4 выстрела не попадет в цель. Так как всего произведено 4 выстрела, то случайная величина X может принимать только следующие значения: x_1=l; x_2=2; x_3=3; x_4=4.

Найдем вероятности, соответствующие этим значениям. Если произведен один выстрел, то охотник попал в цель с 1-го раза, следовательно, p_1=0,7. Если произведено 2 выстрела, то это означает, что охотник в 1-ый раз промахнулся, а 2-ой раз попал в цель. Следовательно, $p_2 = q \cdot p = 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}21$. Аналогично, рассуждая находим:

$P_3 = q \cdot q \cdot p = 0{,}3^2 \cdot 0{,}7 = 0{,}063$.

Если же произведено 4 выстрела, то это означает, что предыдущие три раза были промахи, либо все 4 раза охотник промахнулся.

Поэтому $p_4 = q \cdot q \cdot q \cdot p + q \cdot q \cdot q \cdot q = 0{,}3^3 \cdot 0{,}7 + 0{,}3^4 = 0{,}027$.

Составим закон распределения величины X (табл.2.6).

Таблица 2.6

X	1	2	3	4
P	0,7	0,21	0,063	0,027

Найдем математическое ожидание и дисперсию X:

$$M[X]=1\cdot 0{,}7+2\cdot 0{,}21+3\cdot 0{,}063+4\cdot 0{,}027=1{,}417$$

$$D[X]=M[X^2]-(M[X])^2=1^2\cdot 0{,}7+2^2\cdot 0{,}21+3^2\cdot 0{,}063+4^2\cdot 0{,}027-$$
$$-(1{,}417)^2=0{,}531.$$

Найдем математическое ожидание и дисперсию случайных величины Y и Z, используя свойства этих характеристик:

$$M[Y]=M[3X+5]=M[3X]+M[5]=3M[X]+M[5]=$$
$$=3\cdot 1{,}417+5=4{,}251+5=9{,}251.$$
$$M[Z]=M[2X-1]=2M[X]-M[1]=2\cdot 1{,}417-1=1{,}834-1=0{,}834.$$
$$D[Y]=D[3X+5]=D[3X]+D[5]=9\cdot D[X]+0=9\cdot 0{,}531=4{,}779.$$
$$D[Z]=D[2X-1]=4D[X]+D[1]=4\cdot 0{,}531+0=2{,}124.$$

Задача 11. Случайная величина X имеет ряд распределения (табл.2.7)

Таблица 2.7

X	0	3,5	10
P	0,2	0,5	p_0

Найти параметр p_0, асимметрию a_s, эксцесс e_k. моду m_0.

Решение.

а) Параметр p_0 найдем из условия:

$p_1+p_2+p_3=1.$

0,2+0,5+p_0=1, тогда $p_0=0{,}3$.

Получим (табл.2.8).

Таблица 2.8

X	0	3,5	10
P	0,2	0,5	0,3

б) Модой m_0 дискретной случайной величины X называется ее наибольшее вероятное значение. Значению X=3 отвечает наибольшая вероятность p_2=0,5, поэтому m_0=3.

в) Асимметрия дискретной случайной величины X – это числовая характеристика, равная $a_s=\mu_3/\sigma^3$, где μ_3 – центральный момент 3-го порядка, определяемый по формуле

$$\mu_3 = M[X - V[X]]^3,$$

σ – среднее квадратическое отклонение.

Назовем начальным моментом k-го порядка случайной величины X величину:

$$\nu_k = M[X^k].$$

Можно доказать, что центральные моменты $\mu_k = M[X - M[X]]^k$ и начальные моменты связаны формулами

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1 = D[X]; \tag{2.22}$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3; \tag{2.23}$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2 \cdot \nu_2 - 3\nu_1^4. \tag{2.24}$$

Легко заметить также, что $\mu_1 = M[X - M[X]] = 0$, $\nu_1 = M[X]$.

Вернемся к отысканию асимметрии. Вычислим предварительно математическое ожидание и дисперсию *X*.

$$\nu_1 = M[X] = 0 + 3{,}5 \cdot 0{,}5 + 10 \cdot 0{,}3 = 4{,}75;$$

$$\nu_2 = M[X^2] = 0 + 3{,}5^2 \cdot 0{,}5 + 10^2 \cdot 0{,}3 = 42{,}25;$$

$$\mu_2 = D[X] = M[X^2] - (M[X])^2 = 42{,}25 - 4{,}75^2 =$$

$$= 42{,}25 - 22{,}56 = 19{,}7.$$

Среднее квадратическое отклонение

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]} = \sqrt{19{,}7} \approx 4{,}44.$$

Найдем центральный и начальные моменты третьего порядка:

$$\nu_3 = M[X^3] = 0 + 3{,}5^3 \cdot 0{,}5 + 10^3 \cdot 0{,}3 = 21{,}7375 + 300 = 321{,}7375.$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3 = 321{,}7375 - 3 \cdot 4{,}75 \cdot 42{,}25 +$$

$$+ 2 \cdot 4{,}75^3 = 321{,}7375 - 602{,}0625 + 44{,}195 = -236{,}13.$$

Следовательно,

$$a_s = -\frac{236{,}13}{4{,}44^3} = -\frac{236{,}13}{87{,}468} = -2{,}6996 \approx -2{,}7.$$

г) Найдем эксцесс по формуле

$$e_x = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3.$$

Найдем центральный момент 4-го порядка $\boldsymbol{\mu_4}$. Предварительно вычислим $\boldsymbol{\nu_4}$:

$$\nu_4 = M[X^4] = 0 + 3{,}5^4 \cdot 0{,}5 + 10^4 \cdot 0{,}3 = 76{,}08125 + 3000 = 3076{,}0813.$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2 \cdot \nu_2 - 3\nu_1^4 = 3076{,}081^3 - 4 \cdot 4{,}75 \cdot 321{,}7375 +$$
$$+ 6 \cdot 4{,}75^2 \cdot 42{,}25 - 3 \cdot 4{,}75^4 = 3076{,}0813 - 6113{,}013 + 5719{,}5937 -$$
$$-1527{,}1991 = 1155{,}4629.$$

Следовательно,

$$e_k = \frac{1155{,}4629}{(4{,}44)^4} - 3 = \frac{1155{,}4629}{388{,}09} - 3 = 2{,}9773 - 3 = -0{,}0227.$$

3 ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭВМ

Если дискретная случайная величина X принимает достаточно большое (или счетное) количество значений, то расчет характеристик отнимает много времени. Уместно в этом случае воспользоваться ЭВМ. При помощи программы MATHCAD можно вычислить наиболее важные характеристики: математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение. Для этого воспользуемся разработками для лабораторных работ, имеющимися на кафедре математики ЮЗГУ.

Ввод данных

Введите n значений для X и соответствующие им вероятности в том же порядке:

X:=(2,3 −1 0,02 1 1,5 2,1 3,1 3,9 4 4,8)
P:=(0,04 0,11 0,12 0,14 0,09 0,07 0,03 0,15 0,12 0,13)

Укажите также точное значение для n: n:=10

Далее MATHCAD сам проведет все вычисления по формулам, которые записаны ниже:

$$sp := \left| \begin{array}{l} sp \leftarrow 0 \\ \text{for} \quad i \in 0..n-1 \\ sp \leftarrow sp + (P^T) \end{array} \right. \qquad MX := \left| \begin{array}{l} MX \leftarrow 0 \\ \text{for} \quad i \in 0..n-1 \\ MX \leftarrow MX + (X^T)_i \cdot (P^T)_i \end{array} \right.$$

$$MXX := \left| \begin{array}{l} MXX \leftarrow 0 \\ \text{for} \quad i \in 0..n-1 \\ MXX \leftarrow MXX + [(X^T)_i \cdot (P^T)_i \end{array} \right.$$

$$DX := VXX \cdot MX^2 \qquad SX := \sqrt{DX}$$

Найдены числовые характеристики: sp=l n=10
MX=2.004 MX=8.458 DX=4.44 SX=2.107

4 ТЕСТ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. В автобусном парко имеется 10 автобусов. Вероятность выезда автобуса на линию равна 0,9. Найти вероятность нормального обслуживания пассажиров, если для этого на линии должно быть не менее 8 автобусов.

1) $45 \cdot 0{,}9^8 \cdot 0{,}12$; 2) $C_{10}^8 \cdot 0{,}1^8 \cdot 0{,}9^2$ 3)0,93.

2. В результате проверки качества приготовленного для посева зерна установлено, что 90% зерен всхоже. Определить вероятность того, что среди отобранных и посаженных 1000 зерен прорастает не менее 700 штук.

1)0,9; 2)1; 3) $\frac{1}{\sqrt{90}}\varphi(10{,}5)$.

3. Вероятность того, что пассажир опаздывает к отправлению поезда, равна 0,05. Найти вероятность того, что из 200 пассажиров 8 опоздают к поезду. (Ответ записать с точностью до 0,1).

1)0,1; 2) 0,3; 3) 1/25.

4. В результате систематически проводимого контроля качества изготовляемых предприятием телевизоров установлено, что процент брака составляет 5%. Сколько телевизоров нужно взять, чтобы наиболее вероятное число годных среди них было 60 штук?

1) 63; 2) 30; 3) 57.

5. Для случайной величины *X*, заданной рядом распределения (табл. 4.1).

Таблица 4.1

X	−1	0	2	3
P	0,1	0,3	0,5	0,1

Найти моду $m_{0.}$

1) 2; 2) 0; 3) 0,5.

6. В условии задачи 5 найти математическое ожидание X+0,8

1) 8; 2) 0; 3) 7,2.

7. Случайная величина *X* задана законом распределения (табл. 4.2).

Таблица 4.2

X	−3	1	2	4
P	0,2	0,3	0,1	0,4

Найти значение функции распределения F(3).

1) 0,1; 2) 0,4; 3) 0,6.

8. Случайные величины *X* и *Y* независимые и имеют один и тот же закон распределения (табл. 4.3).

Таблица 4.3

X	−1	0	2	3
P	0,1	0,3	0,5	0,1

Какова вероятность того, что сумму $Z=X+Y$ больше нуля?

1) 0,59; 2) 0,4 3) 0,5.

9. Случайные величины X и Y независимые и их математические ожидания соответственно равны 2 и 3. Найти математическое ожидание случайной величины $Z = 2X - 3Y + 7$.

1) 2; 2) −5; 3) 6.

10. Для случайной величины X, заданной рядом распределения (табл. 4.4),

Таблица 4.4

X	−1	0	3
P	1/3	1/3	1/3

найти среднее квадратическое отклонение.

1) 1/3; 2) $\sqrt{14}/3$; 3) $\sqrt{1{,}4}$.

11. Как в задаче 11 изменится среднее квадратическое отклонение, если число $x_1 = -1$ заменить на число $x_1 = -2$.

1) уменьшится; 2) не изменится; 3) возрастет.

12. Случайные величины X и Y независимые и их дисперсии соответственно равны 0,2 и 0,5. Найти дисперсию случайной величины $Z = 3X - 2Y + 1$

1) 0,6; 2)3,8; 3) 4,8.

13. Вероятность успеха в единичном испытании равна 0,8. Проведено 100 испытаний. X – число успехов. Найти $P(75 \le X \le 90)$.

1) 0,72; 2) 0,6; 3) 0,88.

14. Производится 20 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления успеха равна 0,2. Найти математическое ожидание появления успеха в этих испытаниях.

1) 0,2; 2) 4; 3) 0.

15. В условии задачи 14 найти дисперсию.

1)3,2; 2) 2; 3)0.

16. Из партии в 25 изделий, среди которых имеются 6 бракованных, выбраны случайным образом 3 изделия для проверки их

качества. Найти $P(X<2)$, если случайная величина X - число бракованных изделий, содержащихся в выборке.

1) 0,45; 2) 0,12; 3) 0,87.

17. В условии задачи 16 найти вероятность того, что случайная величина X примет значение, не превосходящее по абсолютной величине 2.

1) 0,99; 2) 0,87; 3) 0,12.

18. Независимые испытания аппаратуры повторяются до тех пор, пока она не дает отказ. Вероятность отказа от испытания к испытанию не меняется и равна 0,2. Найти математическое ожидание числа безотказных испытаний. (Геометрическое распределение).

1) 4; 2) 0,25; 3) 2.

19. В условии задачи 18 найти дисперсию.

1) 20; 2) 40; 3) 0,04.

20. Дискретная случайная величина X задана законом распределения (табл. 4.5)

Таблица 4.5

X	0,3	0,6
P	0,2	0,8

Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $|X - M[X]| < 0{,}2$.

1) $p \geq 0{,}2$; 2) $0 \leq p \leq 0{,}8$; 3) $0{,}64 \leq p \leq 1$.

21. Случайная величина X задана законом распределения (табл.4.6).

Таблица 4.6

X	1	2
P	0,2	0,8

Найти начальный момент третьего порядка.

1) 6,6; 2)1,8; 3) 3.

22. В условии задачи 21 найти центральный момент второго порядка случайной величины X.

1)3,4; 2)1,6; 3) 1,8.

23. Согласно американским статистическим таблицам смертности вероятность того, что 25-летний человек проживает еще год, равна 0,992. Страховая компания предлагает человеку застраховать свою жизнь на год на сумму 1000 долларов. Страховой взнос равен 10 долларам. Чему равно математическое ожидание прибыли, которую может получить страховая компания?

1) 10; 2) 9,92; 3) 2.

24. В условии задачи 23 найти вероятность того, что из семи наугад взятых таких человек в следующем году не умрет ни один.

1) 0,945; 2) 0,925; 3) 0,7.

25. В урне 4 шара, занумерованных 1,2,3,4. Пусть X – число очков на шаре при случайном выборе его из урны. Как изменится дисперсия $D[X]$, если все числа на шарах увеличить вдвое?

1) не изменится; 2) удвоится; 3) увеличится в 4 раза.

5. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называется повторными испытаниями?
2. Формула Бернулли.
3. Какое распределение называется биномиальным? Что такое многоугольник вероятностей?
4. Как найти наивероятнейшее число появления события в n независимых испытаниях?
5. Свойства функции Гаусса $\varphi(x)$ и ее график.
6. Сформулировать теорему Муавра-Лапласа.
7. Теорема Пуассона.
8. Определение функции Лапласа $\Phi(x)$ и ее свойства.
9. Сформулировать интегральную теорему Лапласа.
10. Привести формулу вероятности отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в n независимых испытаниях.
11. Что называется дискретной случайной величиной? Что понимают под «законом распределения»?
12. Функция распределения и ее свойства.
13. Примеры распределений дискретной случайной величины: биномиальное, пуассоновское, геометрическое. Опишите их.
14. Математическое ожидание дискретной случайной величины и его вероятностный смысл.
15. Какие вы знаете свойства математического ожидания?
16. Что называется дисперсией дискретной случайной величины? Каков ее вероятностный смысл?
17. Опишите свойства дисперсии.
18. Среднее квадратическое отклонение и его вероятностный смысл.
19. Чему равны математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение биномиального распределения?
20. Что называется начальным и центральным теоретическими моментами? Существует ли связь между ними?
21. Приведите формулы коэффициентов асимметрии и эксцесса. Каков их вероятностный смысл?
22. Что понимают под средним значением случайной величины?
23. В чем суть закона больших чисел?
24. Сформулируйте теоремы Чебышева, Бернулли, Ляпунова.
25. Что такое дискретное двумерное распределение?

6. ОТВЕТЫ К КОНТРОЛЬНОМУ ТЕСТУ

1. 0,93
2. 1
3. 0,1
4. 63
5. 80
6. 2
7. 0,6
8. 0,59
9. 2
10. $\sqrt{14}/3$
11. возрастет
12. 3,8
13. 0,88
14. 4
15. 3,2
16. 0,87
17. 0,99
18. 4
19. 20
20. $0{,}64 \le P \le 1$
21. 6,6
22. 1,6
23. 2
24. 0,945
25. Увеличится в 4 раза

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебное пособие для бакалавров / В. Е. Гмурман. − М.: Юрайт, 2012. – 479 с.
2. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [Текст]: учебное пособие / В. Е. Гмурман. − М.: Юрайт, 2011. – 404 с.
3. Зубков А. М., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. Сборник задач по теории вероятностей: [Текст] : учебное пособие для вузов. / А.М.Зубков, Б.А.Севастьянов, В.П.Чистяков. − М.: Наука, 1989. − 320 с.
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. [Текст] : учебное пособие. Т. 1 / Н. С. Пискунов. - изд., стер. - М.: Интеграл-Пресс, 2007. − 416 с.
5. Агапов Г.И. Задачник по теории вероятностей. [Текст] : учебное пособие для вузов / Г.И.Агапов. − М.: Высш. шк., 1994. − 112 с.
6. Кочетков Е.С., Смерчинская С.О. Теория вероятностей в задачах и упражнениях. [Текст]: учебное пособие − М.: Форум – Инфра – М, 2005. − 480с.

Приложения

Таблица 1

Значения локальной функции Лапласа $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3388	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3951	0,3858	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0.3765	0,3752	03739	0,3726	0,3712	0,3698
0,4	0,3683	0,3668	0,3652	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0.3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3232	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0.3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0.1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0.1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0.1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1008	0,0989	0.0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0.0721	0.0707	0,0894	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0395	0,0387	0.0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0353	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0.0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0.0143	0,0139
2,6	0,0138	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0.0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0088	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0.0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0.0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0.0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0.0001

Таблица 2

Значения интегральной функции $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$

X	Ф(x)	X	Ф(x)	X	Ф(x)	X	Ф(x)	X	Ф(x)	X	Ф(x)
0,00	0,0000	**0,44**	0,1700	**0,88**	0,3106	**1,32**	0,4066	**1,76**	0,4608	**2,40**	0,4918
0,01	0,0040	**0,45**	0,1736	**0,89**	0,3133	**1,33**	0,4082	**1,77**	0,4616	**2,42**	0,4922
0,02	0,0080	**0,46**	0,1772	**0,90**	0,3159	**1,34**	0,4099	**1,78**	0,4625	**2,44**	0,4927
0,03	0,0120	**0,47**	0,1808	**0,91**	0,3186	**1,35**	0,4115	**1,79**	0,4633	**2,46**	0,4931
0,04	0,0160	**0,48**	0,1844	**0,92**	0,3212	**1,36**	0,4131	**1,80**	0,4641	**2,48**	0,4934
0,05	0,0199	**0,49**	0,1879	**0,93**	0,3238	**1,37**	0,4147	**1,81**	0,4649	**2,50**	0,4938
0,06	0,0239	**0,50**	0,1915	**0,94**	0,3264	**1,38**	0,4162	**1,82**	0,4656	**2,52**	0,4941
037	0,0279	**0,51**	0,1950	**0,95**	0,3289	**1,39**	0,4177	**1,83**	0,4664	**2,54**	0,4945
0,08	0,0319	**0,52**	0,1985	**0,96**	0,3315	**1,40**	0,4192	**1,84**	0,4671	**2,56**	0,4948
0,09	0,03S9	**0,53**	0,2019	**0,97**	0,3340	**1,41**	0,4207	**1,85**	0,4678	**2,58**	0,4951
0,10	0,0398	**0,54**	0,2054	**0,98**	0,3365	**1,42**	0,4222	**1,86**	0,4686	**2,60**	0,4953
0,11	0,0438	**0,55**	0,2088	**0,99**	0,3389	**1,43**	0,4236	**1,87**	0,4693	**2,62**	0,4956
0,12	0,0478	**0,56**	0,2123	**1,00**	0,3413	**1,44**	0,4251	**1,88**	0,4699	**2,64**	0,4959
0,13	0,0517	**0,57**	0,2157	**1,01**	0,3438	**1,45**	0,4265	**1,89**	0,4706	**2,66**	0,4961
0,14	0,0557	**0,58**	0,2190	**1,02**	0,3461	**1,46**	0,4279	**1,90**	0,4713	**2,68**	0,4963
0,15	0,0596	**0,59**	0,2224	**1,03**	0,3485	**1,47**	0,4292	**1,91**	0,4719	**2,70**	0,4965
0,16	0,0636	**0,60**	0,2257	**1,04**	0,3508	**1,48**	0,4306	**1,92**	0,4726	**2,72**	0,4967
0,17	0,0675	**0,61**	0,2291	**1,05**	0,3531	**1,49**	0,4319	**1,93**	0,4732	**2,74**	0,4969
0,18	0,0714	**0,62**	0,2324	**1,06**	0,3554	**1,50**	0,4332	**1,94**	0,4738	**2,76**	0,4971
0,19	0,0753	**0,63**	0,2357	**1,07**	0,3577	**1,51**	0,4345	**1,95**	0,4744	**2,78**	0,4973
0,20	0,0793	**0,64**	05389	**1,08**	0,3599	**1,52**	0,4357	**1,96**	0,4750	**2,80**	0,4974
0,21	0,0832	**0,65**	0322	**1,09**	0,3621	**1,53**	0,4370	**1,97**	0,4756	**2,82**	0,4976
0,22	0,0871	**0,66**	0,2454	**1,10**	0,3643	**1,54**	0,4382	**1,98**	0,4761	**2,84**	0,4977
0,23	0,0910	**0,87**	0,2486	**1,11**	0,3665	**1,55**	0,4394	**1,99**	0,4767	**2,86**	0,4979
0,24	0,0948	**0,68**	0,2517	**1,12**	0,3686	**1,56**	0,4406	**2,00**	0,4772	**2,88**	0,4980
0,25	0,0987	**0,69**	0,2549	**1,13**	03708	**1,57**	0,4418	**2,02**	0,4783	**2,90**	0,4981
0,26	0,1026	**0,70**	0,2580	**1,14**	0,3729	**1,58**	0,4429	**2,04**	0,4793	**2,92**	0,4982
0,27	0,1064	**0,71**	0311	**1,15**	0,3749	**1,59**	0,4441	**2,06**	0,4803	**2,94**	0,4984
0,28	0,1103	**0,72**	0,2642	**1,16**	0,3770	**1,60**	0,4452	**2,08**	0,4812	**2,96**	0,4985
0,29	0,1141	**0,73**	0,2673	**1,17**	0,3730	**1,61**	0,4463	**2,10**	0,4821	**2,98**	0,4986
0,30	0,1179	**0,74**	0,2703	**1,18**	0,3810	**1,62**	0,4474	**2,12**	0,4830	**3,00**	0,49865
0,31	0,1217	**0,75**	0,2734	**1,19**	0,3830	**1,63**	0,4484	**2,14**	0,4836	**3,20**	0,49931
0,32	0,1255	**0,76**	0,2764	**1,20**	0,3849	**1,64**	0,4495	**2,16**	0,4846	**3,40**	0,49966
0,33	0,1293	**0,77**	0,2794	**1,21**	0,3869	**1,65**	0,4505	**2,18**	0,4854	**3,60**	0,499841
0,34	0,1331	**0,78**	0,2823	**1,22**	0,3883	**1,68**	0,4515	**2,20**	0,4861	**3,80**	0,499928
0,35	0,1368	**0,79**	0,2852	**1,23**	0,3907	**1,67**	0,4525	**2,22**	0,4868	**4,00**	0,499968
0,36	0,1406	**0,80**	02881	**1,24**	0,3925	**1,68**	0,4535	**2,24**	0,4875	**4,50**	0,499997
0,37	0,1443	**0,81**	05910	**1,25**	0,3944	**1,69**	0,4545	**2,26**	0,4881	**5,00**	0,499997
0,38	0,1480	**0,82**	0,2939	**1,26**	0,3962	**1,70**	0,4554	**2,28**	0,4887		
0,39	0,1517	**0,83**	0,2967	**1,27**	0,3980	**1,71**	0,4564	**2,30**	0,4893		
0,40	0,1554	**0,84**	0,2995	**1,28**	0,3997	**1,72**	0,4573	**2,32**	0,4898		
0,41	0,1591	**0,85**	0,3023	**1,29**	0,4015	**1,73**	0,4582	**2,34**	0,4904		
0,42	0,1628	**0,86**	0,3051	**1,30**	0,4032	**1,74**	0,4591	**2,36**	0,4909		
0,43	0,1664	**0,87**	0,3078	**1,31**	0,4049	**1,75**	0,4599	**2,38**	0,4913		