

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Емельянов Сергей Геннадьевич  
Должность: ректор  
Дата подписания: 03.02.2021 15:01:15  
Уникальный программный ключ:  
9ba7d3e34c012eba47b1022d042c731550e730d297421af20ce93076c0

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Федеральное государственное бюджетное образовательное**  
**учреждение высшего образования**  
**«Юго-Западный государственный университет»**  
**(ЮЗГУ)**

**Кафедра высшей математики**

**УТВЕРЖДАЮ**  
**Проректор по учебной работе**  
**О.Г. Локтионова**  
« 30 » 04 2019 г.



**МАТЕМАТИКА**

**Методические указания к выполнению практических заданий**  
**по дисциплине «Математика»**  
**для специальности 38.05.01 «Экономическая безопасность»**  
**и направлений подготовки:**  
**38.03.03 «Управление персоналом»**  
**21.03.02 «Землеустройство и кадастры»**  
**43.03.03 «Гостиничное дело»**

**Курск 2019**

УДК 51

Составитель: О.А. Бредихина, С.В. Фильчакова

Рецензент

Доктор физико-математических наук, доцент,  
и.о. заведующего кафедрой высшей математики  
*Н.А. Хохлов*

**Математика:** методические указания к выполнению практических заданий по дисциплине «Математика» для специальности 38.05.01 «Экономическая безопасность» и направлений подготовки: 38.03.03 «Управление персоналом», 21.03.02 «Землеустройство и кадастры», 43.03.03 «Гостиничное дело» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: О.А. Бредихина, С.В. Фильчакова. – Курск, 2019. – 20 с.

Излагаются методические рекомендации по выполнению практических заданий. Содержатся краткие описания применяемых при решении задач математики методов, задания и вопросы для контроля знаний.

Методические указания соответствуют требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования для специальности 38.05.01 «Экономическая безопасность» и направлений подготовки: 38.03.03 «Управление персоналом», 21.03.02 «Землеустройство и кадастры», 43.03.03 «Гостиничное дело». Материал предназначен для бакалавров очной и заочной форм обучения для специальности 38.05.01 «Экономическая безопасность» и направлений подготовки: 38.03.03 «Управление персоналом», 21.03.02 «Землеустройство и кадастры», 43.03.03 «Гостиничное дело», а также будет полезен студентам всех других направлений подготовки, изучающих дисциплину «Математика».

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 30.04.19. Формат 60x84 1/16.

Усл. печ. л. 10. Уч.-изд. л. 99. Тираж 100 экз. Заказ 431. Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.

305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

**Цель работ:** освоить необходимый математический аппарат, помогающий анализировать, моделировать и решать прикладные задачи.

### Задания по работам

1. Тема «Элементы линейной алгебры».

Решить СЛУ методом Крамера, матричным методом и методом Гаусса  $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6; \\ 4x_2 - 5x_3 = -7; \\ 6x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 16. \end{cases}$

2. Тема «Векторная алгебра и аналитическая геометрия».

Даны точки  $A(-1; -P_3; 2)$ ,  $B(P_5; 2; 0)$  и  $C(P_5(P_3 + 2); P_3^2 + 3P_3 + 4; P_8 - 2 \cdot (P_3 + 1))$ . Образуют ли эти точки треугольник? Если да, то чему равна его площадь? Если нет, то запишите формулу для нахождения площади треугольника средствами векторной алгебры.

3. Тема «Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной».

Составить уравнения касательной и нормали в точке  $x_0 = m$  к параболе  $y = nx^2 + (n-1)x + m$ , где  $m$  – число гласных букв в фамилии,  $n$  – число согласных букв в фамилии.

4. Тема «Функции нескольких переменных».

Для функции  $z = \cos x \cdot \log_5 y$  найти частные производные  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$  и их значения в точке  $x = \frac{\pi}{6}$ ,  $y = 25$ .

5. Тема «Интегрирование функций. Определенные интегралы и их приложения».

Найти интеграл:  $\int \frac{\sqrt{5+x^2} - \sqrt{5-x^2}}{\sqrt{25-x^4}} dx$ . Сделать проверку.

6. Тема «Дифференциальные уравнения».

Найти общий интеграл дифференциального уравнения с разделяющимися переменными  $xy^2 dx + y dy = x dx$ .

7. Тема «Элементы теории вероятностей».

В урне 4 белых и 3 чёрных шара. Из неё вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что они разного цвета. Рассмотреть выборки: а) без возвращения; б) с возвращением.

8. Тема «Элементы математической статистики».

Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания  $a$  нормального распределения с надёжностью  $\gamma = 0,95$ , зная выборочное среднее  $\bar{x} = 2,3$ , объём выборки  $n = 49$  и генеральное среднеквадратическое отклонение  $\sigma = 1,4$ .

### Примеры выполнения заданий с кратким описанием применяемых методов

#### 1. Тема «Элементы линейной алгебры».

Решить СЛУ методом Крамера, матричным методом и методом Гаусса  $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6; \\ 4x_2 - 5x_3 = -7; \\ 6x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 16. \end{cases}$

#### Метод Крамера

Пусть  $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$  – определитель квадратной системы,

а  $\Delta_j$  – определитель, полученный из определителя  $\Delta$  заменой  $j$ -го столбца столбцом свободных членов. Тогда, если  $\Delta \neq 0$ , то СЛУ имеет единственное решение, определяемое по формулам Крамера:  $x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Решить СЛУ методом Крамера:  $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6; \\ 4x_2 - 5x_3 = -7; \\ 6x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 16. \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 6 & -7 & 8 \end{vmatrix} = 32 + 0 + 60 - (72 + 0 + 35) = 92 - 107 = -15;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -7 & 4 & -5 \\ 16 & -7 & 8 \end{vmatrix} = 192 + 160 + 147 - (192 + 112 + 210) = -15;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 0 & -7 & -5 \\ 6 & 16 & 8 \end{vmatrix} = -56 + 0 - 180 - (-126 + 0 - 80) = -236 + 206 = -30;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & -7 \\ 6 & -7 & 16 \end{vmatrix} = 64 + 0 + 84 - (144 + 0 + 49) = 148 - 193 = -45;$$

$$x_1 = \frac{-15}{-15} = 1; \quad x_2 = \frac{-30}{-15} = 2; \quad x_3 = \frac{-45}{-15} = 3.$$

#### Матричный метод

В матричной форме СЛУ имеет вид:  $A \cdot X = B$ . Умножив обе части этого уравнения слева на  $A^{-1}$ , получаем решение этого уравнения в матричной форме:  $X = A^{-1} \cdot B$ .

Решить СЛУ матричным методом

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6; \\ 4x_1 - 5x_2 = -7; \\ 6x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 16. \end{cases}$$

Введём матрицы:  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 6 & -7 & 8 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 16 \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ .

Найдём  $A^{-1}$ .

$$1. \Delta A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 6 & -7 & 8 \end{vmatrix} = 32 + 0 + 60 - (72 + 0 + 35) = 92 - 107 = -15.$$

$$2. A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -7 & 8 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 6 & -7 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -30; \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 6 & -7 \end{vmatrix} = -24; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = 5;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -7 & 8 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4.$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -10;$$

$$3. \begin{pmatrix} -3 & -30 & -24 \\ -5 & -10 & -5 \\ -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$4. \begin{pmatrix} -3 & -30 & -24 \\ -5 & -10 & -5 \\ -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -3 & -5 & -2 \\ -30 & -10 & 5 \\ -24 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$5. A^{-1} = \frac{1}{-15} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -5 & -2 \\ -30 & -10 & 5 \\ -24 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 30 & 10 & -5 \\ 24 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Вычислим } X: X = \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 30 & 10 & -5 \\ 24 & 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

### Метод Гаусса

Сущность его состоит в том, что посредством элементарных преобразований система приводится к треугольному (система имеет единственное решение) или трапецеидальному (система имеет бесконечное множество решений), из которого все решения системы усматриваются непосредственно.

### Элементарные преобразования для СЛУ

1. Перестановка уравнений в системе.
2. Умножение любого уравнения системы на число, не равное нулю.

3. Прибавление к одному уравнению системы другого уравнения, умноженного на некоторое число.

4. Вычёркивание из системы уравнения вида:  $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = 0$ .

5. Перенумерация неизвестных.

Решить СЛУ методом Гаусса  $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6; \\ 4x_2 - 5x_3 = -7; \\ 6x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 16. \end{cases}$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & -5 & -7 \\ 6 & -7 & 8 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & -5 & -7 \\ 0 & 5 & -10 & -20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & -5 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

3стр - 6 · 1стр

3стр : 5

2стр ↔ 3стр

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & -5 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

3стр - 4 · 2стр

3стр : 3

Полученные преобразования характеризуют «прямой» ход метода Гаусса. «Обратный» ход метода Гаусса заключается в получении нулей выше главной диагонали.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1стр - 3 · 3стр

1стр + 2 · 2стр

1стр + 2 · 3стр

Отсюда получаем решение системы:  $\begin{cases} x_1 = 1; \\ x_2 = 2; \\ x_3 = 3. \end{cases}$

## 2. Тема «Векторная алгебра и аналитическая геометрия».

Даны точки  $A(-1; -P_3; 2)$ ,  $B(P_5; 2; 0)$  и  $C(P_5(P_3 + 2); P_3^2 + 3P_3 + 4; P_8 - 2 \cdot (P_3 + 1))$ . Образуют ли эти точки треугольник? Если да, то чему равна его площадь? Если нет, то запишите формулу для нахождения площади треугольника средствами векторной алгебры.

Пусть  $n=101$ . Тогда  $P_3 = 2$ ,  $P_4 = 1$ ,  $P_5 = 1$ ,  $P_7 = 3$ ,  $P_8 = 5$ .

Точки А, В, С образуют треугольник тогда и только тогда, когда векторы  $\overline{AB}$  и  $\overline{AC}$  неколлинеарны, то есть когда их векторное произведение не равно нулю.

Векторное произведение векторов рассчитывается по формуле:

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_{AB} & y_{AB} & z_{AB} \\ x_{AC} & y_{AC} & z_{AC} \end{vmatrix}.$$

Тогда  $\overline{AB} = (1+1; 2+2; 0-2)$ ,  $\overline{AC} = (4+1; 14+2; -1-2)$ .

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 4 & -2 \\ 5 & 16 & -3 \end{vmatrix} = 20i - 4j - 12k, \text{ следовательно точки } A, B, C$$

образуют треугольник. Площадь этого треугольника можно рассчитать по формуле:  $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB} \times \overline{AC}|$ , где  $|\overline{AB} \times \overline{AC}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{20^2 + (-4)^2 + 12^2} = 4\sqrt{35}$ .

$$\text{Таким образом, } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{35} = 2\sqrt{35}.$$

### 3. Тема «Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной».

Составить уравнения касательной и нормали в точке  $x_0 = m$  к параболе  $y = nx^2 + (n-1)x + m$ , где  $m$  – число гласных букв в фамилии,  $n$  – число согласных букв в фамилии.

Пусть  $m = 8$  и  $n = 10$ , тогда  $x_0 = 8$ ,  $y = 10x^2 + 9x + 8$ . Найдём значение функции в точке  $x_0$ :  $y(8) = 10 \cdot 64 + 9 \cdot 8 + 8 = 720$ . Производная  $y'$  равна:  $y' = 20x + 9$ , а значение производной функции в точке  $x_0$  равно:  $y'(8) = 20 \cdot 8 + 9 = 169$ .

Дальнейшее решение задачи удобнее записать в виде таблицы.

Уравнение касательной к функции $y = f(x)$ в точке $x_0$ : $y = y(x_0) + y'(x_0) \cdot (x - x_0)$	Уравнение нормали к функции $y = f(x)$ в точке $x_0$ : $y = y(x_0) - \frac{x - x_0}{y'(x_0)}$
$y = 720 + 169(x - 8)$ , $y = 169x - 632$ , общий вид: $169x - y - 632 = 0$	$y = 720 - \frac{x - 8}{169}$ , $169y = 121680 - x + 8$ , общий вид: $x + 169 - 121688 = 0$

### 4. Тема «Функции нескольких переменных».

Для функции  $z = \cos x \cdot \log_5 y$  найти частные производные  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$  и их значения в точке  $x = \frac{\pi}{6}$ ,  $y = 25$ .

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \log_5 y \cdot (-\sin x), \text{ тогда } \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\left(\frac{\pi}{6}; 25\right)} = -\log_5 25 \cdot \sin \frac{\pi}{6} = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos x \cdot \frac{1}{y \cdot \ln 5}, \text{ тогда } \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{\left(\frac{\pi}{6}; 25\right)} = \cos \frac{\pi}{6} \cdot \frac{1}{25 \cdot \ln 5} = \frac{\sqrt{3}}{50 \cdot \ln 5}.$$

### 5. Тема «Интегрирование функций. Определенные интегралы и их приложения».

Найти интеграл:  $\int \frac{\sqrt{5+x^2} - \sqrt{5-x^2}}{\sqrt{25-x^4}} dx$ . Сделать проверку.

$$\int \frac{\sqrt{5+x^2} - \sqrt{5-x^2}}{\sqrt{25-x^4}} dx = \int \left( \frac{\sqrt{5+x^2}}{\sqrt{25-x^4}} - \frac{\sqrt{5-x^2}}{\sqrt{25-x^4}} \right) dx = \int \left( \frac{\sqrt{5+x^2}}{\sqrt{(5-x^2)(5+x^2)}} - \frac{\sqrt{5-x^2}}{\sqrt{(5-x^2)(5+x^2)}} \right) dx = \int \left( \frac{1}{\sqrt{5-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{5+x^2}} \right) dx = \int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{5+x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} - \ln|x + \sqrt{5+x^2}| + C.$$

Проверка

$$\left( \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} - \ln|x + \sqrt{5+x^2}| + C \right)' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{x + \sqrt{5+x^2}} \cdot (1 + \frac{1}{2\sqrt{5+x^2}} \cdot 2x) = \frac{1}{\sqrt{5-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{5+x^2}} = \frac{\sqrt{5+x^2} - \sqrt{5-x^2}}{\sqrt{25-x^4}} = f(x).$$

### 6. Тема «Дифференциальные уравнения».

Найти общий интеграл дифференциального уравнения с разделяющимися переменными  $xy^2 dx + y dy = x dx$ .

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными имеют вид  $P_1(x) \cdot Q_1(y) \cdot dx + P_2(x) \cdot Q_2(y) \cdot dy = 0$  или  $y' = f(x) \cdot g(y)$ .

Алгоритм решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.

- 1) Если в уравнении присутствует  $y'$ , то заменим  $y' = \frac{dy}{dx}$ .
- 2) Разделим переменные, используя свойство пропорции.
- 3) Проинтегрируем левую и правую части уравнения.

$$\begin{aligned} xy^2 dx + y dy &= x dx, \\ xy^2 dx - x dx &= -y dy, \\ (y^2 - 1)x dx &= -y dy, \\ x dx &= -\frac{y}{y^2 - 1} dy, \\ \int x dx &= -\int \frac{y}{y^2 - 1} dy. \end{aligned}$$

Интеграл в левой части уравнения является простым табличным, а интеграл, полученный в правой части уравнения, решим отдельно.

$$\begin{aligned} -\int \frac{y}{y^2 - 1} dy &= -\int \frac{1}{y^2 - 1} \cdot y dy = \left[ \begin{array}{l} t = y^2 - 1 \\ dt = (y^2 - 1)' dy = 2y dy \\ y dy = \frac{dt}{2} \end{array} \right] = -\int \frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{2} = \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2} \ln|t| + C = -\frac{1}{2} \ln|y^2 - 1| + C. \end{aligned}$$

Вернёмся к нашему уравнению:  $\frac{x^2}{2} = -\frac{1}{2} \ln|y^2 - 1| + C$ .

Заменим  $C = \frac{C_1}{2}$ , получим  $\frac{x^2}{2} = -\frac{1}{2} \ln|y^2 - 1| + \frac{C_1}{2}$ .

Таким образом, общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид  $x^2 = C_1 - \ln|y^2 - 1|$ .

### **7. Тема «Элементы теории вероятностей».**

В урне 4 белых и 3 чёрных шара. Из неё вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что они разного цвета. Рассмотреть выборки: а) без возвращения; б) с возвращением.

Фраза «шары разного цвета» подразумевает два исхода: белый и чёрный шары или чёрный и белый шары.

$$\text{а) } P(A) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{4}{7};$$

$$\text{б) } P(A) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} + \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{24}{49}.$$

### **8. Тема «Элементы математической статистики».**

Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания  $a$  нормального распределения с надёжностью  $\gamma = 0,95$ , зная выборочное среднее  $\bar{x} = 2,3$ , объём выборки  $n = 49$  и генеральное среднеквадратическое отклонение  $\sigma = 1,4$ .

Пусть количественный признак  $X$  генеральной совокупности распределён нормально, среднеквадратическое отклонение  $\sigma$  известно. Требуется оценить неизвестное математическое ожидание  $a$  по выборочной средней  $\bar{x}$ .

В данном случае в качестве случайной величины  $Y(\Theta)$  берётся величина  $Y(\Theta) = \frac{\bar{X} - \bar{x}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ , которая при достаточно больших объёмах выборки приближённо распределена по нормальному закону  $N(0,1)$ . Поэтому с заданной надёжностью  $\gamma$  доверительный интервал имеет вид  $\left( \bar{x} - \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \right)$ .

Таким образом, если исследуемая случайная величина распределена по нормальному закону с известным среднеквадратическим отклонением  $\sigma$ , то доверительный интервал для математического ожидания определяется неравенством:

$$\bar{x} - \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}},$$

где  $\tilde{\theta} = \bar{x}$  - точечная оценка математического ожидания ( $\bar{x}$  - выборочное среднее);

$\varepsilon = \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$  - точность оценки;

$n$  - объём выборки;

$t$  - квантиль нормального распределения или значение аргумента функции Лапласа (приложение 2 [5]), при котором  $2\Phi(t) = \gamma \Rightarrow \Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$ .

Воспользуемся формулой:  $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0,95}{2} = 0,475$ , далее по таблице приложения 2 [5] находим  $t = 1,96$ . Искомый доверительный интервал:

$$2,3 - \frac{1,96 \cdot 1,4}{\sqrt{49}} < a < 2,3 + \frac{1,96 \cdot 1,4}{\sqrt{49}} \text{ или } 1,908 < a < 2,692.$$

Смысл полученного результата: если произведено достаточно большое количество выборок по 49 элементов в каждой, то 95% из них определяют такие доверительные интервалы, в которых  $a$  заключено, и лишь в 5% случаев значение  $a$  может выйти за границы доверительного интервала.

### Контрольные вопросы

1. Дать определения операций сложения, умножения матриц, умножения матрицы на число.
2. Каким условиям должны удовлетворять размеры матриц при сложении, умножении?
3. В чём заключаются свойства алгебраических операций: коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность? Какие из них выполняются для матриц при сложении, умножении, а какие нет?
4. Дать общее определение определителя квадратной матрицы.
5. В чём заключается правило треугольников?
6. Перечислить свойства определителей.
7. Что такое единичная матрица, каковы её свойства?
8. Что такое алгебраическое дополнение элемента матрицы?
9. Что такое обратная матрица? Для каких матриц она определена?
10. Сформулировать теорему о существовании и единственности обратной матрицы.
11. Какие системы называются эквивалентными?
12. Какие системы называются совместными, несовместными, определёнными, неопределёнными, однородными, неоднородными?

13. Как записать и решить систему в матричной форме?
14. Что такое ранг матрицы? Сформулировать теорему Кронекера-Капелли.
15. Написать формулы Крамера.
16. Что такое элементарные преобразования матрицы?
17. В чем заключается метод Гаусса для решения систем линейных уравнений?
18. Какими свойствами обладают решения однородной системы линейных уравнений?
19. Может ли однородная система линейных уравнений быть несовместной? При каком условии она имеет более одного решения?
20. Векторные и скалярные величины. Определения направленного отрезка, вектора. Линейные операции над векторами в геометрической форме (сумма, разность, произведение вектора на число) и их свойства.
21. Определения коллинеарных, ортогональных и компланарных векторов. Необходимые и достаточные условия коллинеарности, ортогональности и компланарности векторов (в векторной и координатной формах).
22. Декартовы координаты на прямой, на плоскости и в пространстве (декартова система координат, разложение вектора по базису системы координат, координаты точек). Доказать соотношения между координатами вектора и координатами точек «начала» и «конца» вектора.
23. Прямоугольные проекции вектора на ось и их свойства.
24. Выражение модуля (длины) и направляющих косинусов вектора через декартовы координаты вектора.
25. Скалярное произведение векторов и его свойства. Необходимое и достаточное условие ортогональности векторов.
26. Выражение скалярного произведения векторов через декартовы координаты этих векторов. Нахождение модуля вектора и угла между векторами.

27. Ориентация тройки векторов в пространстве. Векторное произведение векторов и его свойства. Выражение векторного произведения векторов через декартовы координаты этих векторов. Вычисление площади параллелограмма и треугольника.
28. Смешанное произведение векторов и его свойства. Выражение смешанного произведения векторов через декартовы координаты этих векторов. Вычисление объёма параллелепипеда и треугольной пирамиды.
29. Понятие об уравнении линии на плоскости.
30. Нормальный вектор прямой. Общее уравнение прямой на плоскости. Угол между прямыми на плоскости, условия параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости.
31. Уравнение прямой «с угловым коэффициентом» (уравнение прямой, разрешённое относительно координат). Угол между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности прямых (заданных уравнениями «с угловым коэффициентом»).
32. Направляющий вектор прямой. Каноническое и параметрические уравнения прямой на плоскости. Угол между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности прямых (заданных каноническими уравнениями).
33. Расстояние от точки до: прямой на плоскости; прямой в пространстве; плоскости в пространстве.
34. Понятие уравнения поверхности в пространстве.
35. Нормальный вектор плоскости. Общее уравнение плоскости в пространстве. Угол между плоскостями, условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.
36. Уравнение плоскости, проходящей через три точки, не принадлежащие одной прямой.
37. Уравнение прямой в пространстве: общее, каноническое, параметрические. Угол между прямыми в пространстве, условия параллельности и перпендикулярности прямых в пространстве (заданных каноническими уравнениями).
38. Уравнение прямой, проходящей через две заданные, различные точки (на плоскости; в пространстве).

39. Угол между прямой и плоскостью в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.
40. Сформулируйте определение предела функции.
41. Какая величина называется бесконечно малой?
42. Сформулируйте теоремы о пределах.
43. Запишите формулу первого замечательного предела. Перечислите следствия.
44. Запишите формулу второго замечательного предела. Перечислите следствия.
45. Дайте определение производной функции.
46. Приведите уравнения касательной и нормали к кривой в данной точке.
47. Какова связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции в точке.
48. Дайте определение дифференциала функции. Приведите связь между дифференциалом и производной функции.
49. Сформулируйте лемму Ферма.
50. Сформулируйте теорему Лагранжа о среднем.
51. Сформулируйте теорему Коши о среднем.
52. Сформулируйте правило Лопиталя.
53. Что называется функцией нескольких переменных?
54. Что называется областью определения функции двух переменных?
55. Что называется областью изменений или множеством значений функции двух переменных?
56. Что такое частная производная?
57. Сколько различных частных производных 4-го порядка имеет функция от трёх переменных?
58. Что такое полный дифференциал? Его геометрический смысл.
59. Напишите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности.

60. В чём заключается геометрический и функциональный смысл градиента?
61. Сформулируйте необходимые и достаточные условия экстремума функции двух переменных.
62. Дайте определение первообразной функции.
63. Что называется неопределённым интегралом?
64. Дайте определение операции интегрирования. Запишите соотношения, устанавливающие связи между интегрированием и дифференцированием.
65. Сформулируйте основные свойства неопределённого интеграла.
66. В чём суть способа интегрирования, введением множителя  $\varphi'(x)$  под знак дифференциала? Запишите соответствующую формулу.
67. Напишите формулу интегрирования по частям для неопределённого интеграла.
68. Укажите типы интегралов, вычисление которых целесообразно производить при помощи метода интегрирования по частям.
69. Понятие определённого интеграла.
70. Какова формула Ньютона-Лейбница для вычисления определённого интеграла?
71. Перечислите свойства определённого интеграла.
72. Вычисление площади плоской фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в декартовой системе координат, или в полярной системе координат, или заданной параметрически.
73. Вычисление длины дуги гладкой кривой, заданной следующим образом:
- а)  $y = f(x), a \leq x \leq b;$
  - б)  $x = \varphi(y), c \leq y \leq d;$
  - в)  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \alpha \leq t \leq \beta;$
  - г)  $\rho = \rho(\varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta.$
74. Дайте определение дифференциального уравнения. Что называется решением дифференциального уравнения?

75. Что называется интегрированием дифференциального уравнения, а что – интегральной кривой?
76. Дайте определение порядка дифференциального уравнения.
77. Что называется общим решением дифференциального уравнения, частным решением?
78. Укажите общий вид дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными, а также алгоритм их решения.
79. Укажите общий вид линейных дифференциальных уравнений. При помощи какой замены решается тип данных уравнений?
80. Укажите общий вид дифференциальных уравнений Бернулли. При помощи какой замены решается тип данных уравнений?
81. Дайте определение дифференциальных уравнений высших порядков.
82. Укажите методы, позволяющие понизить порядок следующих дифференциальных уравнений:
- а)  $y^{(n)} = f(x)$ ;
  - б)  $y'' = f(x; y')$ ;
  - в)  $y'' = f(y; y')$ .
83. Укажите общий вид линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и методы его решения.
84. Дайте определения: перестановок, сочетаний, размещений.
85. Сформулируйте классическое определение вероятностей. Укажите недостатки этого определения.
86. Какое событие называется достоверным, невозможным, случайным?
87. Дайте определение полной группы событий.
88. Какие события называются несовместными, совместными, противоположными, независимыми?
89. Дайте определение относительной частоты.
90. Сформулируйте статистическое определение вероятностей. Назовите условия существования статистической вероятности.
91. Сформулируйте теоремы о вероятности суммы двух совместных, несовместных событий.
92. Сформулируйте теорему умножения вероятностей.
93. Сформулируйте теорему о формуле полной вероятности.
95. Какие виды случайных величин вы знаете?
96. Перечислите важнейшие характеристики случайных величин.

97. Какие важнейшие распределения случайных величин вы знаете?
94. Дайте понятие вариационного ряда.
95. Какие виды вариационных рядов вы знаете?
96. Какие графики используются для изображения дискретных вариационных рядов?
97. Перечислите важнейшие точечные характеристики выборки.
98. Дайте понятие доверительного интервала.
99. Дайте определение основной и конкурирующей гипотез.
100. Дайте определение прямой регрессии  $Y$  на  $X$ ,  $X$  на  $Y$ .

### **РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА**

1. Ильин В.А., Куркина А.В. Высшая математика [Текст]: учебник. - М.: Проспект, 2011. -608 с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления [Текст]: учебное пособие. Т.1, М.: Интеграл-Пресс, 2007. -416 с.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия [Текст]: учебник. -М.: Физматлит, 2009.-224 с.
4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст]: учебное пособие. -М.: ЮРАЙТ, 2012.-479 с.
5. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [Текст]: учебное пособие. -М.: ЮРАЙТ, 2011.-404 с.
6. Бойцова Е.А. Практикум по математике [Текст]: учебное пособие. -Старый Оскол: ТНТ, 2014. -160 с.
7. Бойцова Е.А. Практикум по математике. Спецглавы [Текст]: учебное пособие/ Е.А.Бойцова. -Старый Оскол: ТНТ, 2014. -156 с.
8. Теория вероятностей [Текст]: учебное пособие / Е.В.Журавлева и др. -Курск: ЮЗГУ, 2015. -175, [3] с.
9. Сборник задач по математике для втузов. Ч.1 [Текст] / Под ред. А.В.Ефимова и А.С.Поспелова -М.: Физматлит. 2009. -288 с.
10. Сборник задач по математике для втузов. Ч.2 [Текст] / Под ред. А.В.Ефимова и А.С.Поспелова – М.: Физматлит. 2009. -432 с.
11. Сборник задач по математике для втузов. Ч.3 [Текст] / Под ред. А.В.Ефимова и А.С.Поспелова – М.: Физматлит. 2009. -544 с.

12. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии [Текст]: учебное пособие / Д. В. Клетеник. - 17-е изд. - СПб. : Профессия, 2010. -224 с.
13. Матрицы. Определители. Системы линейных уравнений [Электронный ресурс]: индивидуальные задания к модулю / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Бойцова Е.А., Шевцова Т.В. – Курск: ЮЗГУ, 2016. -26 с.
14. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия [Электронный ресурс]: методические указания по выполнению М-2 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Бойков А.В. –Курск: ЮЗГУ, 2014. -30с.
15. Векторная алгебра и аналитическая геометрия [Электронный ресурс]: методические указания по выполнению М-2 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Бредихина О.А., Шестахина С.В. –Курск: ЮЗГУ, 2013. - 18 с.
16. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной [Электронный ресурс]: индивидуальные задания / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Е.В. Скрипкина. –Курск: ЮЗГУ, 2014.-52 с.
17. Функции нескольких переменных [Электронный ресурс]: индивидуальные задания и методические указания к выполнению модуля 6.1 для студентов технических специальностей / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Бредихина О.А., Шестахина С.В. –Курск: ЮЗГУ, 2014. -15 с.
18. Метод наименьших квадратов [Электронный ресурс]: методические указания и индивидуальные задания по выполнению лабораторной работы №15 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Л.И. Студеникина, Т.В. Шевцова. –Курск: ЮЗГУ, 2011. -50 с.
19. Расчёт вероятностей случайных событий [Электронный ресурс]: индивидуальные задания и методические указания по выполнению модуля 13 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Е.В.Журавлёва, Е.А.Панина. – Курск: ЮЗГУ, 2011. -50 с.
20. Элементы математической статистики и корреляционного анализа [Электронный ресурс]: методические указания и индивидуальные задания к модулю 15 / Курск. гос. техн. ун-т; сост.: Е.В. Журавлева, Е.А. Панина. –Курск: КурскГТУ, 2012. -35 с.