

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Емельянов Сергей Геннадьевич  
Должность: ректор  
Дата подписания: 01.09.2018  
Уникальный программный ключ:  
9ba7d3e34c012eba476ffd2d064cf2781953be250bd2374d76f5c0ce536f0c6

## МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования

«Юго-Западный государственный университет»  
(ЮЗГУ)

Кафедра программной инженерии



### **ТРАНСПОРТНЫЕ ЗАДАЧИ. ПОСТРОЕНИЕ НАЧАЛЬНОГО ПЛАНА ПЕРЕВОЗОК**

Методические указания к практическому занятию  
по дисциплине «Методы оптимальных решений»  
для студентов направления подготовки  
38.03.01 «Экономика»

Курск 2018

УДК 519.6

Составители: В.В. Свиридов, Т.В. Алябьева

Рецензент:

кандидат технических наук, доцент кафедры программной инженерии  
ЮЗГУ *В.В. Апальков*

**Транспортные задачи. Построение начального плана перевозок:** методические указания к практическому занятию по дисциплине «Методы оптимальных решений» для студентов направления подготовки 38.03.01 «Экономика» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: В.В. Свиридов, Т.В. Алябьева. Курск, 2018. 23 с.

Изложены основные сведения о различных методах построения начального опорного плана транспортной задачи с выбором наилучшего. Рассмотрены примеры выполнения заданий. Приведены варианты заданий, контрольные вопросы к защите практической работы.

Методические указания соответствуют требованиям рабочей программы по дисциплине «Методы оптимальных решений». Материал предназначен для студентов 38.03.01 «Экономика» очной и заочной форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 02.10.2018.. Формат 60 x 84 1/16.

Усл. печ. л.1,1. Уч.- изд. л.1,0. Тираж 100 экз. Заказ 2137. Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.

305040, Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

## Содержание

1. Цель занятия .....	4
2. Краткие теоретические сведения .....	4
2.1. Постановка транспортной задачи .....	4
2.2. Методы нахождения начального решения транспортной задачи ..	5
2.2.1. Метод северо-западного угла .....	5
2.2.2. Метод наименьшей стоимости.....	8
2.2.3. Метод Фогеля .....	12
3. Индивидуальные задания.....	17
4. Контрольные вопросы.....	23

# ТРАНСПОРТНЫЕ ЗАДАЧИ. ПОСТРОЕНИЕ НАЧАЛЬНОГО ПЛАНА ПЕРЕВОЗОК

## 1. Цель занятия

Изучение различных методов построения начального опорного плана транспортной задачи с выбором наилучшего.

**Задание.** Дана сбалансированная транспортная задача. Найти для нее начальный опорный план следующими методами: северо-западного угла, минимального тарифа и Фогеля и выбрать наилучший по критерию минимальной стоимости.

## 2. Краткие теоретические сведения

### 2.1. Постановка транспортной задачи

Пусть имеется  $m$  складов  $A_1, \dots, A_m$ , на которых имеется запасы однородной продукции в количествах  $a_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ),  $n$  пунктов потребления (розничных магазинов)  $B_1, \dots, B_n$  с величиной спроса  $b_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ), причем имеет место равенство  $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$ , то есть суммарный запас равен суммарному спросу, такая транспортная задача называется *сбалансированной*. Дана также матрица  $C = (c_{i,j})$ ,  $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$  удельных транспортных расходов, где  $c_{i,j}$  – стоимость доставки одной единицы продукции от  $i$ -го поставщика  $j$ -му потребителю.

Требуется найти план перевозок  $X = (x_{i,j})$ ,  $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ , где  $x_{i,j}$  – объем поставок продукции от  $i$ -го поставщика  $j$ -му потребителю, при котором запасы всех поставщиков вывозятся, то есть

$a_i = \sum_{j=1}^n x_{i,j}$ ,  $i = \overline{1, m}$ , спрос всех потребителей удовлетворен, то есть

$b_j = \sum_{i=1}^m x_{i,j}$ ,  $j = \overline{1, n}$ , и суммарные транспортные расходы являются

минимально возможными, то есть  $z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{i,j} \rightarrow \min$ . Получаем

математическую модель вида:

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{i,j} \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{i,j} = a_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{i,j} = b_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (3)$$

$$x_{i,j} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (4)$$

## 2.2. Методы нахождения начального решения транспортной задачи

На практике решение транспортной задачи разбивается на два этапа. На первом этапе находится начальный опорный план, который на втором этапе доводится до оптимального итерационным методом потенциалов. Поэтому очень ценно на первом этапе найти начальный план, который является максимально близким по затратам к оптимальному. Поэтому большое значение имеют конкретные методы расчета начального плана.

### 2.2.1. Метод северо-западного угла

Выполнение начинается с верхней левой ячейки (северо-западного угла).

Шаг 1. Пусть мы находимся в ячейке  $(i, j)$ . Переменной  $x_{i,j}$  (вначале это переменная  $x_{1,1}$ ) присваивается максимальное значение, допускаемое ограничениями на спрос и предложение.

Шаг 2. Вычеркивается строка (или столбец) с полностью реализованным предложением (удовлетворенным спросом), то есть мы применяем формулу  $x_{i,j} = \min\{a_i, b_j\}$ . Если одновременно удовлетворяются и предложение в строке и спрос в столбце путем выбора определенного значения  $x_{i,j}$ , то необходимо вычеркнуть или строку или столбец, но не оба вместе. Во всех случаях после нахождения величины  $x_{i,j}$  в текущей клетке, корректируется остаточное предложение в строке  $i$  и остаточный спрос в столбце  $j$  по формулам  $a_i := a_i - x_{i,j}$ ,  $b_j := b_j - x_{i,j}$ .

Шаг 3. Если при выполнении шага 2 мы находились в клетке  $(m, n)$ , то есть в правой нижней, то вычисление заканчивается,

начальный план построен. Иначе, если на шаге 2 был вычеркнут столбец, переходим в правую соседнюю клетку, то есть перемещаемся по строке, если же вычеркивалась строка, переходим в соседнюю нижнюю клетку, то есть двигаемся вниз по столбцу, переходим на шаг 1.

**Пример 1.** Транспортная компания перевозит зерно с трех элеваторов к четырем мельницам. Даны запасы элеваторов и спрос мельниц в зерновозах и указаны транспортные затраты в тыс. руб. по транспортировке одного зерновоза из каждого пункта отправления в каждый пункт назначения. Найти начальный план перевозок и его цену методом северо-западного угла. Исходные данные приведены в таблице:

Элеваторы	Мельницы				Предложение
	1	2	3	4	
1	10 $x_{11}$	2 $x_{12}$	20 $x_{13}$	11 $x_{14}$	15
2	12 $x_{21}$	7 $x_{22}$	9 $x_{23}$	20 $x_{24}$	25
3	4 $x_{31}$	14 $x_{32}$	16 $x_{33}$	18 $x_{34}$	10
Спрос	5	15	15	15	50

**Решение.**

Осуществляем метод северо-западного угла по шагам.

1)

$$(i, j) = (1, 1), x_{11} = \min\{a_1, b_1\} = \min\{5, 15\} = 5, a_1 = a_1 - x_{11} = 15 - 5 = 10, \\ b_1 = b_1 - x_{11} = 5 - 5 = 0;$$

столбец 1 вычеркивается, шаг вправо  $(i, j) := (i, j + 1) = (1, 2)$

2)

$$(i, j) = (1, 2), x_{12} = \min\{a_1, b_2\} = \min\{10, 15\} = 10, a_1 = a_1 - x_{12} = 10 - 10 = 0, \\ b_2 = b_2 - x_{12} = 15 - 10 = 5;$$

строка 1 вычеркивается, шаг вниз  $(i, j) := (i + 1, j) = (2, 2)$

3)

$$(i, j) = (2, 2), \quad x_{22} = \min\{a_2, b_2\} = \min\{25, 5\} = 5, \quad a_2 = a_2 - x_{22} = 25 - 5 = 20, \\ b_2 = b_2 - x_{22} = 5 - 5 = 0;$$

столбец 2 вычеркивается, шаг вправо  $(i, j) := (i, j + 1) = (2, 3)$

4)

$$(i, j) = (2, 3), \quad x_{23} = \min\{a_2, b_3\} = \min\{20, 15\} = 15, \quad a_2 = a_2 - x_{23} = 20 - 15 = 5, \\ b_3 = b_3 - x_{23} = 15 - 15 = 0;$$

столбец 3 вычеркивается, шаг вправо  $(i, j) := (i, j + 1) = (2, 4)$

5)

$$(i, j) = (2, 4), \quad x_{24} = \min\{a_2, b_4\} = \min\{5, 15\} = 5, \quad a_2 = a_2 - x_{24} = 5 - 5 = 0, \\ b_4 = b_4 - x_{24} = 15 - 5 = 10;$$

строка 2 вычеркивается, шаг вниз  $(i, j) := (i + 1, j) = (3, 4)$

6)

$$(i, j) = (3, 4), \quad x_{34} = \min\{a_3, b_4\} = \min\{10, 10\} = 10, \\ a_3 = a_3 - x_{34} = 10 - 10 = 0, \quad b_4 = b_4 - x_{34} = 10 - 10 = 0$$

конец расчета.

$$\text{Получили матрицу плана } X = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Цена этого плана, цена первоначального плана задачи равна

$$z(X) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 X_{i,j} C_{i,j} = 5 \cdot 10 + 10 \cdot 2 + 5 \cdot 7 + 15 \cdot 9 + 5 \cdot 20 + 10 \cdot 18 = \\ = 50 + 20 + 35 + 135 + 100 + 180 = 520.$$

Описанный алгоритм может быть проиллюстрирован следующей диаграммой:

Элеваторы	Мельницы				Предложение
	1	2	3	4	
1	10	2	20	11	15
2	12	7	9	20	25
3	4	14	16	18	10
Спрос	5	15	15	15	50

/

### 2.2.2. Метод наименьшей стоимости

Данный метод находит лучшее начальное решение, чем метод северо-западного угла, так как выбирает переменные, которым отвечают наименьшие стоимости.

Сначала во всей транспортной таблице ищется ячейка с наименьшей стоимостью, переменной в этой ячейке присваивается наибольшее значение, допускаемое ограничениями на спрос и предложение (если ячеек с минимальной стоимостью несколько, выбираем любую из них). Далее вычеркивается соответствующий столбец или строка, и корректируются значения спроса и предложения, соответствующие выбранной ячейке. Указанные действия можно определить формулами:

$$(i, j) = \arg \min_{(k,l) \in T} C_{k,l};$$

$$x_{i,j} = \min \{a_i, b_j\};$$

$$a_i = a_i - x_{i,j}; b_j = b_j - x_{i,j};$$

$$a_i = 0 \Rightarrow T = T \setminus T_{i,\bullet};$$

$$(a_i > 0 \wedge b_j = 0) \Rightarrow T = T \setminus T_{\bullet,j};$$

Далее рассматриваются не вычеркнутые ячейки, и применяется тот же алгоритм. Процесс заканчивается, когда будут, таким образом, выбраны  $m + n - 1$  базисных ячеек.

**Пример 2.** Применить метод наименьшей стоимости к транспортной задаче из примера 1.

**Решение.**

1)

$$(i, j) = \arg \min_{(k,l) \in T} C_{k,l} = (1, 2);$$

$$x_{1,2} = \min \{a_1, b_2\} = \min \{15, 15\} = 15;$$

$$a_1 = a_1 - x_{1,2} = 15 - 15 = 0; b_2 = b_2 - x_{1,2} = 15 - 15 = 0;$$

$$a_1 = 0 \Rightarrow T = T \setminus T_{1,\bullet} - \text{вычеркнули первую строку.}$$

Имеем оставшуюся таблицу:

Элеваторы	Мельницы				Предложение
	1	2	3	4	
1	10	2	20	11	0
	$x_{11}$	15	$x_{13}$	$x_{14}$	
2	12	7	9	20	25
	$x_{21}$	$x_{22}$	$x_{23}$	$x_{24}$	
3	4	14	16	18	10
	$x_{31}$	$x_{32}$	$x_{33}$	$x_{34}$	
Спрос	5	0	15	15	

2)

$$(i, j) = \arg \min_{(k,l) \in T} C_{k,l} = (3, 1);$$

$$x_{3,1} = \min \{a_3, b_1\} = \min \{10, 5\} = 5;$$

$$a_3 = a_3 - x_{3,1} = 10 - 5 = 5; b_1 = b_1 - x_{3,1} = 5 - 5 = 0;$$

$$b_1 = 0 \Rightarrow T = T \setminus T_{\bullet,1} - \text{вычеркнули первый столбец.}$$

Элеваторы	Мельницы				Предложение
	1	2	3	4	
1	10	2	20	11	0
	$x_{11}$	15	$x_{13}$	$x_{14}$	
2	12	7	9	20	25
	$x_{21}$	$x_{22}$	$x_{23}$	$x_{24}$	
3	4	14	16	18	5
	5	$x_{32}$	$x_{33}$	$x_{34}$	
Спрос	0	0	15	15	

3)

$$(i, j) = \arg \min_{(k,l) \in T} C_{k,l} = (2, 2), C_{2,2} = 7;$$

$$x_{2,2} = \min \{a_2, b_2\} = \min \{25, 0\} = 0;$$

$$a_2 = a_2 - x_{2,2} = 25 - 0 = 25; b_2 = b_2 - x_{2,2} = 0 - 0 = 0;$$

$$b_2 = 0 \Rightarrow T = T \setminus T_{\bullet,2} - \text{вычеркнули второй столбец.}$$

Остаточная таблица:

Элеваторы	Мельницы			Предложение
	1	2	3	
1	10	2	20	11
	$x_{11}$	15	$x_{13}$	$x_{14}$
2	12	7	9	20
	$x_{21}$	0	$x_{23}$	$x_{24}$
3	4	14	16	18
	5	$x_{32}$	$x_{33}$	$x_{34}$
Спрос	0	0	15	15

4)

$$(i, j) = \arg \min_{(k,l) \in T} C_{k,l} = (2, 3), C_{2,3} = 9;$$

$$x_{2,3} = \min \{a_2, b_3\} = \min \{25, 15\} = 15;$$

$$a_2 = a_2 - x_{2,3} = 25 - 15 = 10; b_3 = b_3 - x_{2,3} = 15 - 15 = 0;$$

$$b_3 = 0 \Rightarrow T = T \setminus T_{\bullet,3} - \text{вычеркнули третий столбец.}$$

Получаем остаточную таблицу:

Элеваторы	Мельницы			Предложение
	1	2	3	
1	10	2	20	11
	$x_{11}$	15	$x_{13}$	$x_{14}$
2	12	7	9	20
	$x_{21}$	0	15	$x_{24}$
3	4	14	16	18
	5	$x_{32}$	$x_{33}$	$x_{34}$
Спрос	0	0	0	15

5)

$$(i, j) = \arg \min_{(k,l) \in T} C_{k,l} = (3,4), C_{3,4} = 18;$$

$$x_{3,4} = \min \{a_3, b_4\} = \min \{5, 15\} = 5;$$

$$a_3 = a_3 - x_{3,4} = 5 - 5 = 0; b_4 = b_4 - x_{3,4} = 15 - 5 = 10;$$

$a_3 = 0 \Rightarrow T = T \setminus T_{3,\bullet}$  – вычеркнули третью строку.

Остаточная таблица:

Элеваторы	Мельницы				Предложение
	1	2	3	4	
1	10	2	20	11	0
	$x_{11}$	15	$x_{13}$	$x_{14}$	
2	12	7	9	20	10
	$x_{21}$	0	15	$x_{24}$	
3	4	14	16	18	0
	5	$x_{32}$	$x_{33}$	5	
Спрос	0	0	0	10	

6)

$$(i, j) = \arg \min_{(k,l) \in T} C_{k,l} = (2,4), C_{2,4} = 20;$$

$$x_{2,4} = \min \{a_2, b_4\} = \min \{10, 10\} = 10;$$

$$a_2 = a_2 - x_{2,4} = 10 - 10 = 0; b_4 = b_4 - x_{2,4} = 10 - 10 = 0.$$

Расчёт закончен.

Остаточная таблица:

Элеваторы	Мельницы				Предложение
	1	2	3	4	
1	10	2	20	11	0
	$x_{11}$	15	$x_{13}$	$x_{14}$	
2	12	7	9	20	0
	$x_{21}$	0	15	10	
3	4	14	16	18	0
	5	$x_{32}$	$x_{33}$	5	
Спрос	0	0	0	0	

Получили матрицу плана  $X = \begin{pmatrix} 0 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 10 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ .

Цена этого плана, то есть цена первоначального плана задачи

равна 
$$z(X) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 X_{i,j} \cdot C_{i,j} = 15 \cdot 2 + 15 \cdot 9 + 10 \cdot 20 + 5 \cdot 4 + 5 \cdot 18 =$$

$$= 30 + 135 + 200 + 20 + 90 = 475.$$

Таким образом, метод наименьшего значения позволил получить начальное приближение оптимального плана транспортной задачи лучшее, чем в случае применения метода северо-западного угла.

Описанный алгоритм может быть проиллюстрирован следующей диаграммой:

Элеваторы	Мельницы				Предложение
	1	2	3	4	
1	10 $x_{11}$	2	20 $x_{13}$	11 $x_{14}$	15
2	12 $x_{21}$	7	9	20	25
3	4	14 $x_{32}$	16 $x_{33}$	18	10
Спрос	5	15	15	15	50

Diagram annotations: Circled numbers (5, 0, 15, 10, 5) are placed at various cells. Arrows indicate flow: from (1,2) to (1,1), from (2,2) to (2,3), from (3,1) to (1,1), from (3,1) to (2,2), from (3,3) to (3,4), from (3,4) to (2,4).

### 2.2.3. Метод Фогеля

*Шаг 1.*

Для каждой строки (столбца), которой соответствует строго положительное предложение (спрос), вычисляется штраф путем вычитания наименьшей стоимости из следующей по величине в данной строке (столбце).

*Шаг 2.*

Выделяется строка или столбец с наибольшим штрафом. Если таковых несколько, выбор произволен. Из выделенной строки или столбца выбирается переменная, соответствующая минимальной стоимости и ей присваивается наибольшее значение, позволяемое ограничениями. Затем, в соответствии со значением, присвоенным выбранной переменной, корректируются величины остаточного

неудовлетворенного проса и не реализованного предложения в строке и столбце выбранной переменной. Строка с нулевым остаточным предложением или столбец с нулевым остаточным спросом вычеркиваются, причем, если обе остаточные величины обнулились, вычеркивается только одна строка или столбец, выбор при этом произволен.

*Шаг 3.*

Элеваторы	Мельницы				Предложение	Штрафы строк
	1	2	3	4		
1	10 $x_{11}$	2 $x_{12}$	20 $x_{13}$	11 $x_{14}$	15	10-2=8
2	12 $x_{21}$	7 $x_{22}$	9 $x_{23}$	20 $x_{24}$	25	9-7=2
3	4 $x_{31}$	14 $x_{32}$	16 $x_{33}$	18 $x_{34}$	10	14-4=10
Спрос	5	15	15	15	50    50	
Штраф столбцов	10-4=6	7-2=5	16-9=7	18-11=7		

После получения  $m + n - 1$  базисных клеток вычисления заканчиваются. Если не вычеркнуты только одна строка (столбец) с положительным значением правой части, то в этой строке (столбце) выбираются базисные клетка методом наименьшего значения и вычисления заканчиваются. Если в остаточной таблице все величины остаточного предложения и спроса равны 0, к остаточной таблице применяется метод наименьшего значения и базис дополняется клетками с нулевой величиной  $x_{i,j}$ . В остальных случаях возвращаемся к шагу 1.

**Пример 3.** Применить метод Фогеля к транспортной задаче из примеров 1, 2.

**Решение.**

1) Выбирается строка 3, как имеющая наибольший штраф и в ней клетка (3, 1) как клетка с наименьшим значением.

$$x_{31} = \min \{10, 5\} = 5;$$

$$a_3 = 10 - 5 = 5;$$

$$b_1 = 5 - 5 = 0.$$

*Столбец 1 вычеркивается.*

2)

Элеваторы	Мельницы				Предложение	Штрафы строк
	1	2	3	4		
1	10 $x_{11}$	2 $x_{12}$	20 $x_{13}$	11 $x_{14}$	15	11-2=9
2	12 $x_{21}$	7 $x_{22}$	9 $x_{23}$	20 $x_{24}$	25	9-7=2
3	4 5	14 $x_{32}$	16 $x_{33}$	18 $x_{34}$	5	16-14=2
Спрос	0	15	15	15	50 50	
Штраф столбцов		7-2=5	16-9=7	18-11=7		

Выбирается строка 1, как имеющая наибольший штраф и в ней клетка (1, 2) как клетка с наименьшим значением.

$$x_{12} = \min \{15, 15\} = 0;$$

$$a_1 = 15 - 15 = 0;$$

$$b_2 = 15 - 15 = 0.$$

Строка 1 вычеркивается.

Элеваторы	Мельницы				Предложение	Штрафы строк
	1	2	3	4		
1	10 $x_{11}$	2 15	20 $x_{13}$	11 $x_{14}$	0	
2	12 $x_{21}$	7 $x_{22}$	9 $x_{23}$	20 $x_{24}$	25	9-7=2
3	4 5	14 $x_{32}$	16 $x_{33}$	18 $x_{34}$	5	16-14=2
Спрос	0	0	15	15		
Штраф столбцов		14-7=7	16-9=7	20-18=2		

Выбирается столбец 3, как имеющий наибольший штраф и в нем клетка (2, 3) как клетка с наименьшим значением.

$$x_{23} = \min \{25, 15\} = 15;$$

$$a_2 = 25 - 15 = 10;$$

$$b_3 = 15 - 15 = 0.$$

Столбец 3 вычеркивается.

Элеваторы	Мельницы				Предложение	Штрафы строк
	1	2	3	4		
1	10 $x_{11}$	2 15	20 $x_{13}$	11 $x_{14}$	0	
2	12 $x_{21}$	7 $x_{22}$	9 15	20 $x_{24}$	15	20-7=13
3	4 5	14 $x_{32}$	16 $x_{33}$	18 $x_{34}$	5	18-14=4
Спрос	0	0	0	15		
Штраф столбцов				20-18=2		

Выбирается строка 2, как имеющий наибольший штраф и в нем клетка (2, 2) как клетка с наименьшим значением.

$$x_{22} = \min \{15, 10\} = 0;$$

$$a_2 = 15 - 0 = 15;$$

$$b_2 = 0 - 0 = 0.$$

Столбец 2 вычеркивается.

Элеваторы	Мельницы				Предложение	Штрафы строк
	1	2	3	4		
1	10 $x_{11}$	2 15	20 $x_{13}$	11 $x_{14}$	0	
2	12 $x_{21}$	7 0	9 15	20 $x_{24}$	15	
3	4 5	14 $x_{32}$	16 $x_{33}$	18 $x_{34}$	5	
Спрос	0	0	0	15		
Штраф столбцов						

Остался один невычеркнутый столбец 4 с положительным значением спроса. В данный момент выбрано 4 базисные клетки, для получения базиса в столбце 4 сначала выбираем клетку (3, 4) со значением 5, а затем клетку (2, 4) со значением 10. Окончательно получаем базисное решение задачи:

Элеваторы	Мельницы				Предложение
	1	2	3	4	
1	10 $x_{11}$	2 15	20 $x_{13}$	11 $x_{14}$	15
2	12 $x_{21}$	7 0	9 15	20 10	25
3	4 5	14 $x_{32}$	16 $x_{33}$	18 5	5
Спрос	5	15	15	15	

Получили матрицу плана  $X = \begin{pmatrix} 0 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 10 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ .

Цена этого плана, то есть цена первоначального плана задачи

равна 
$$z(X) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 X_{i,j} C_{i,j} = 15 \cdot 2 + 15 \cdot 9 + 10 \cdot 20 + 5 \cdot 4 + 5 \cdot 18 =$$

$$= 30 + 135 + 200 + 20 + 90 = 475.$$

Таким образом, метод Фогеля привел к плану такого же качества, что и метод наименьшего значения.

### 3. Индивидуальные задания

№	Таблица транспортной задачи					
	Поставщики	Потребители				Предложение
1		2	3	4		
1.	1	10 $x_{11}$	2 $x_{12}$	20 $x_{13}$	11 $x_{14}$	10
	2	12 $x_{21}$	7 $x_{22}$	9 $x_{23}$	20 $x_{24}$	25
	3	4 $x_{31}$	14 $x_{32}$	16 $x_{33}$	18 $x_{34}$	10
	Спрос	5	15	10	15	
2.	1	10 $x_{11}$	2 $x_{12}$	20 $x_{13}$	11 $x_{14}$	10
	2	12 $x_{21}$	7 $x_{22}$	9 $x_{23}$	20 $x_{24}$	25
	3	4 $x_{31}$	8 $x_{32}$	16 $x_{33}$	18 $x_{34}$	10
	Спрос	5	15	10	15	
3.	1	10 $x_{11}$	2 $x_{12}$	20 $x_{13}$	11 $x_{14}$	10
	2	12 $x_{21}$	7 $x_{22}$	9 $x_{23}$	10 $x_{24}$	25
	3	4 $x_{31}$	8 $x_{32}$	16 $x_{33}$	18 $x_{34}$	10
	Спрос	5	15	10	15	
4.	1	10 $x_{11}$	2 $x_{12}$	20 $x_{13}$	11 $x_{14}$	10
	2	12 $x_{21}$	7 $x_{22}$	9 $x_{23}$	20 $x_{24}$	25
	3	4 $x_{31}$	8 $x_{32}$	16 $x_{33}$	18 $x_{34}$	12
	Спрос	5	15	10	17	

№	Таблица транспортной задачи					
	Поставщики	Потребители				Предложение
1		2	3	4		
5.	1	10 $x_{11}$	2 $x_{12}$	20 $x_{13}$	11 $x_{14}$	10
	2	10 $x_{21}$	7 $x_{22}$	9 $x_{23}$	20 $x_{24}$	25
	3	4 $x_{31}$	8 $x_{32}$	16 $x_{33}$	18 $x_{34}$	12
	Спрос	5	15	10	17	
6.	1	10 $x_{11}$	6 $x_{12}$	20 $x_{13}$	11 $x_{14}$	10
	2	10 $x_{21}$	7 $x_{22}$	9 $x_{23}$	20 $x_{24}$	25
	3	4 $x_{31}$	8 $x_{32}$	16 $x_{33}$	18 $x_{34}$	12
	Спрос	5	15	10	17	
7.	1	10 $x_{11}$	6 $x_{12}$	20 $x_{13}$	11 $x_{14}$	10
	2	10 $x_{21}$	7 $x_{22}$	9 $x_{23}$	20 $x_{24}$	22
	3	4 $x_{31}$	8 $x_{32}$	16 $x_{33}$	18 $x_{34}$	12
	Спрос	5	12	10	17	
8.	1	10 $x_{11}$	6 $x_{12}$	20 $x_{13}$	11 $x_{14}$	10
	2	10 $x_{21}$	7 $x_{22}$	4 $x_{23}$	20 $x_{24}$	22
	3	4 $x_{31}$	8 $x_{32}$	16 $x_{33}$	18 $x_{34}$	12
	Спрос	5	12	10	17	

№	Таблица транспортной задачи					
	Поставщики	Потребители				Предложение
1		2	3	4		
9.	1	10 $x_{11}$	6 $x_{12}$	20 $x_{13}$	11 $x_{14}$	10
	2	10 $x_{21}$	7 $x_{22}$	9 $x_{23}$	20 $x_{24}$	22
	3	4 $x_{31}$	8 $x_{32}$	3 $x_{33}$	18 $x_{34}$	12
	Спрос	5	12	10	17	
10.	1	10 $x_{11}$	6 $x_{12}$	20 $x_{13}$	11 $x_{14}$	10
	2	10 $x_{21}$	7 $x_{22}$	9 $x_{23}$	20 $x_{24}$	22
	3	4 $x_{31}$	8 $x_{32}$	16 $x_{33}$	4 $x_{34}$	12
	Спрос	5	12	10	17	
11.	1	10 $x_{11}$	6 $x_{12}$	20 $x_{13}$	11 $x_{14}$	10
	2	10 $x_{21}$	7 $x_{22}$	2 $x_{23}$	20 $x_{24}$	22
	3	4 $x_{31}$	8 $x_{32}$	16 $x_{33}$	18 $x_{34}$	12
	Спрос	5	12	10	17	
12.	1	10 $x_{11}$	6 $x_{12}$	6 $x_{13}$	11 $x_{14}$	10
	2	10 $x_{21}$	7 $x_{22}$	9 $x_{23}$	20 $x_{24}$	22
	3	4 $x_{31}$	8 $x_{32}$	16 $x_{33}$	18 $x_{34}$	12
	Спрос	5	12	10	17	

№	Таблица транспортной задачи					
	Поставщики	Потребители				Предложение
1		2	3	4		
13.	1	10 $x_{11}$	6 $x_{12}$	20 $x_{13}$	11 $x_{14}$	10
	2	10 $x_{21}$	7 $x_{22}$	9 $x_{23}$	20 $x_{24}$	22
	3	4 $x_{31}$	8 $x_{32}$	16 $x_{33}$	18 $x_{34}$	10
	Спрос	5	12	10	15	
14.	1	10 $x_{11}$	6 $x_{12}$	20 $x_{13}$	11 $x_{14}$	10
	2	5 $x_{21}$	7 $x_{22}$	9 $x_{23}$	20 $x_{24}$	22
	3	4 $x_{31}$	8 $x_{32}$	16 $x_{33}$	18 $x_{34}$	10
	Спрос	5	12	10	15	
15.	1	10 $x_{11}$	6 $x_{12}$	20 $x_{13}$	11 $x_{14}$	10
	2	5 $x_{21}$	7 $x_{22}$	9 $x_{23}$	20 $x_{24}$	22
	3	4 $x_{31}$	8 $x_{32}$	16 $x_{33}$	18 $x_{34}$	10
	Спрос	5	12	10	15	
16.	1	10 $x_{11}$	6 $x_{12}$	20 $x_{13}$	11 $x_{14}$	10
	2	10 $x_{21}$	7 $x_{22}$	9 $x_{23}$	20 $x_{24}$	22
	3	4 $x_{31}$	2 $x_{32}$	16 $x_{33}$	18 $x_{34}$	10
	Спрос	5	12	10	15	

№	Таблица транспортной задачи					
	Поставщики	Потребители				Предложение
1		2	3	4		
17.	1	10 $x_{11}$	6 $x_{12}$	20 $x_{13}$	11 $x_{14}$	10
	2	10 $x_{21}$	7 $x_{22}$	9 $x_{23}$	10 $x_{24}$	22
	3	4 $x_{31}$	8 $x_{32}$	16 $x_{33}$	18 $x_{34}$	10
	Спрос	5	12	10	15	
18.	1	10 $x_{11}$	6 $x_{12}$	20 $x_{13}$	11 $x_{14}$	10
	2	10 $x_{21}$	7 $x_{22}$	9 $x_{23}$	9 $x_{24}$	22
	3	4 $x_{31}$	8 $x_{32}$	16 $x_{33}$	18 $x_{34}$	10
	Спрос	5	12	10	15	
19.	1	10 $x_{11}$	6 $x_{12}$	20 $x_{13}$	11 $x_{14}$	10
	2	10 $x_{21}$	7 $x_{22}$	9 $x_{23}$	6 $x_{24}$	22
	3	4 $x_{31}$	8 $x_{32}$	16 $x_{33}$	18 $x_{34}$	10
	Спрос	5	12	10	15	
20.	1	10 $x_{11}$	6 $x_{12}$	20 $x_{13}$	11 $x_{14}$	10
	2	10 $x_{21}$	7 $x_{22}$	4 $x_{23}$	20 $x_{24}$	22
	3	4 $x_{31}$	8 $x_{32}$	16 $x_{33}$	18 $x_{34}$	10
	Спрос	5	12	10	15	

№	Таблица транспортной задачи					
	Поставщики	Потребители				Предложение
1		2	3	4		
21.	1	10 $x_{11}$	6 $x_{12}$	20 $x_{13}$	11 $x_{14}$	10
	2	10 $x_{21}$	7 $x_{22}$	9 $x_{23}$	20 $x_{24}$	22
	3	4 $x_{31}$	8 $x_{32}$	16 $x_{33}$	18 $x_{34}$	12
	Спрос	5	12	12	15	
22.	1	10 $x_{11}$	6 $x_{12}$	20 $x_{13}$	11 $x_{14}$	10
	2	5 $x_{21}$	7 $x_{22}$	9 $x_{23}$	20 $x_{24}$	22
	3	4 $x_{31}$	8 $x_{32}$	16 $x_{33}$	18 $x_{34}$	12
	Спрос	5	12	12	15	
23.	1	10 $x_{11}$	6 $x_{12}$	20 $x_{13}$	11 $x_{14}$	10
	2	10 $x_{21}$	7 $x_{22}$	9 $x_{23}$	20 $x_{24}$	22
	3	4 $x_{31}$	8 $x_{32}$	3 $x_{33}$	18 $x_{34}$	12
	Спрос	5	12	12	15	
24.	1	10 $x_{11}$	6 $x_{12}$	20 $x_{13}$	11 $x_{14}$	10
	2	10 $x_{21}$	7 $x_{22}$	9 $x_{23}$	5 $x_{24}$	22
	3	4 $x_{31}$	8 $x_{32}$	16 $x_{33}$	18 $x_{34}$	12
	Спрос	5	12	12	15	

№	Таблица транспортной задачи					
	Поставщики	Потребители				Предложение
1		2	3	4		
25.	1	10 $x_{11}$	6 $x_{12}$	20 $x_{13}$	11 $x_{14}$	10
	2	10 $x_{21}$	8 $x_{22}$	9 $x_{23}$	20 $x_{24}$	22
	3	4 $x_{31}$	8 $x_{32}$	16 $x_{33}$	18 $x_{34}$	12
	Спрос	5	12	12	15	
26.	Поставщики	Потребители				Предложение
		1	2	3	4	
	1	10 $x_{11}$	6 $x_{12}$	20 $x_{13}$	11 $x_{14}$	10
	2	6 $x_{21}$	7 $x_{22}$	9 $x_{23}$	20 $x_{24}$	22
	3	4 $x_{31}$	8 $x_{32}$	16 $x_{33}$	18 $x_{34}$	12
Спрос	5	12	12	15		

#### 4. Контрольные вопросы

1. Привести математическую модель транспортной задачи.
2. На какие два основных этапа делится процесс нахождения оптимального решения транспортной задачи?
3. Объяснить значение этапа поиска начального опорного плана.
4. Описать алгоритм северо-западного угла.
5. Привести описание алгоритма наименьшего значения.
6. Описать алгоритм Фогеля.