МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра программной инженерии

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_______ О.Г. Локтионова
«__» _______ 2018 г.

СОСТАВЛЕНИЕ И РЕШЕНИЕ ДВОЙСТВЕННЫХ ЗАДАЧ

Методические указания к практическому занятию
по дисциплине «Методы оптимальных решений»
для студентов направления подготовки
38.03.01 «Экономика»

Курск 2018

УДК 519.6

Составители: В.В. Свиридов, Т.В. Алябьева

Рецензент:
кандидат технических наук, доцент кафедры программной инженерии ЮЗГУ *В.В. Апальков*

Составление и решение двойственных задач: методические указания к практическому занятию по дисциплине «Методы оптимальных решений» для студентов направления подготовки 38.03.01 «Экономика» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: В.В. Свиридов, Т.В. Алябьева. Курск, 2018. 12 с.

Изложены основные сведения о построении двойственной задачи линейного программирования по заданной прямой задаче линейного программирования. Рассмотрены примеры выполнения заданий. Приведены варианты заданий, контрольные вопросы к защите практической работы.

Методические указания соответствуют требованиям рабочей программы по дисциплине «Методы оптимальных решений».
Материал предназначен для студентов 38.03.01 «Экономика» очной и заочной форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 02.10.2018.. Формат 60 х 84 1/16.
Усл. печ. л. 0,7. Уч.- изд. л.0,6. Тираж 100 экз. Заказ 2138. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Содержание

СОСТАВЛЕНИЕ И РЕШЕНИЕ ДВОЙСТВЕННЫХ ЗАДАЧ

1. Цель занятия

Целью практического занятия является получение навыков построения двойственной задачи линейного программирования по заданной прямой задаче линейного программирования и навыков применения теоремы двойственности.

Задание 1. Дана исходная задача линейного программирования от трех переменных с двумя ограничениями. Построить по ней двойственную задачу с двумя переменными. Решить последнюю графически, с помощью теорем двойственности найти решение исходной задачи.

Задание 2. Решить исходную задачу симплекс-методом и по конечной таблице симплекс-метода получить решение двойственной задачи.

2. Краткие теоретические сведения

Рассмотрим задачу линейного программирования об оптимальном использовании ресурсов

$$z = c^T x \to \max;$$
$$Ax \le b; \qquad (1)$$
$$x \ge 0.$$

То есть мы должны получить максимальную прибыль при производстве продуктов $P_1,...,P_n$, реализуемых на рынке в соответствии с вектором цен $c = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{pmatrix}^T$, при этом используются ресурсы $R_1,...,R_m$ объемы которых равны $b = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{pmatrix}^T$ и производство характеризуется матрицей $A = (a_{i,j})$ норм расходования ресурсов. При этом альтернативной формой экономического поведения является продажа ресурсов по так называемым двойственным ценам $p = (p_1,...,p_m)^T$. Прибыль от продажи ресурсов должна быть не меньше получаемой от производства, то есть должно выполняться условие $A^T p \ge c$, при этом покупатель ресурсов предполагает заплатить за них наименьшую цену $w = b^T p$, получаем двойственную задачу линейного программирования:

$$w = b^T p \to \min;$$
$$\begin{cases} A^T p \ge c; \\ p \ge 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Задачи (1) и (2) называются взаимно двойственными. Они связаны следующим образом:

1) Если задача (1) имеет размеры $m \times n$, то задача (2) размеры $n \times m$, причем матрица ограничений задачи (2) получается из соответствующей матрицы задачи (1) транспонированием.

2) Правые части ограничений двойственной задачи являются коэффициентами целевой функции исходной задачи и наоборот, коэффициенты целевой функции двойственной задачи являются правыми частями ограничений прямой задачи.

3) Если исходная задача это поиск max, то двойственная задача это поиск min, причем ограничениям вида $\le$ в исходной задаче соответствуют ограничения вида $\ge$ двойственной задачи.

Соответствие между прямой и двойственной задачами в общем виде дается следующей таблицей:

Соответствие между прямой и двойственной задачами

Прямая задача I	Двойственная задача II
$z = c^T x \to \max;$ $\begin{cases} Ax \le b; \\ x \ge 0. \end{cases}$	$w = b^T y \to \min;$ $\begin{cases} A^T y \ge c; \\ y \ge 0. \end{cases}$

На практике часто полезны фундаментальные теоремы о паре взаимно двойственных задач:

Теорема 1 (основное неравенство для двойственных задач). Для всех допустимых решений X, Y пары двойственных задач имеет место неравенство $z(X) \le w(Y)$.

Из первой теоремы легко выводится следующая теорема;

Теорема 2 (достаточный признак оптимальности). Если для каких либо допустимых решений X^*, Y^* пары двойственных задач имеет место равенство $z(X^*) = w(Y^*)$, то X^* – оптимальное решение прямой задачи, а Y^* – решение двойственной.

Из первой теоремы двойственности легко вытекает также теорема:

Теорема 3. Если для одной из двойственных задач I, II целевая функция не ограничена, то есть $z_{\max} = +\infty$ или $w_{\min} = -\infty$, то двойственная задача не имеет ни одного допустимого решения.

Имеет место важнейшая:

Теорема 4 (первая теорема о двойственности). Если исходная задача имеет оптимальное решение, то и двойственная ей имеет оптимальное решение. При этом оптимальные значения обеих целевых функций совпадают, то есть $z_{\max} = w_{\min}$, при этом если $x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_m}$ – базисные переменные в оптимальном решении, получаемы с помощью симплекс-метода, то $Y^{*T} = c_* P_*^{-1}$,

где $c_* = \left(c_{i_1}, c_{i_2}, ..., c_{i_m}\right)$ – строка коэффициентов целевой функции, соответствующих базисным переменным, а $P_* = \left(A_{\bullet, i_1}, ..., A_{\bullet, i_m}\right)$ – матрица базиса.

Также $Y_i^* = d_{n+i}, i = 1, ..., m$, то есть значения двойственных переменных в оптимальном решении равны относительным оценкам остаточных переменных $s_i = x_{n+i}, i = 1, ..., m$.

Теорема 5 (вторая теорема о двойственности, теорема о дополняющей нежесткости).

Пусть $x = \left(x_1, ..., x_n\right)^T$ и $y = \left(y_1, ..., y_m\right)^T$ два допустимых вектора для прямой и двойственной задачи (1), (2) соответственн, тогда векторы x, y являются оптимальными решениями указанных задач тогда и только тогда, когда выполняются соотношения дополняющей нежесткости:

$$x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} y_i - c_j \right) = 0, \; j = 1, ..., n;$$

$$y_i \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \right) = 0, \; i = 1, ..., m;$$

3. Пример выполнения заданий

3.1. Пример выполнения задания 1

Дана прямая задача линейного программирования

$z = 2x_1 + 3x_2 - x_3 \to \max;$

$4x_1 + x_2 + 2x_3 \le 10;$

$x_1 - x_2 \le 1;$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$

Имеем исходную (прямую) задачу линейного программирования

$c^T x \to \max;$

$Ax \le b;$

$x \ge 0,$

для которой

$c = (2, 3, -1)^T$,

$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$

$b = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Строим двойственную задачу как задачу вида

$w = y^T b \to \min;$

$A^T y \ge c;$

$y \ge 0.$

Имеем $A^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ – транспонированная матрица;

$w = 10y_1 + y_2 \to \min;$

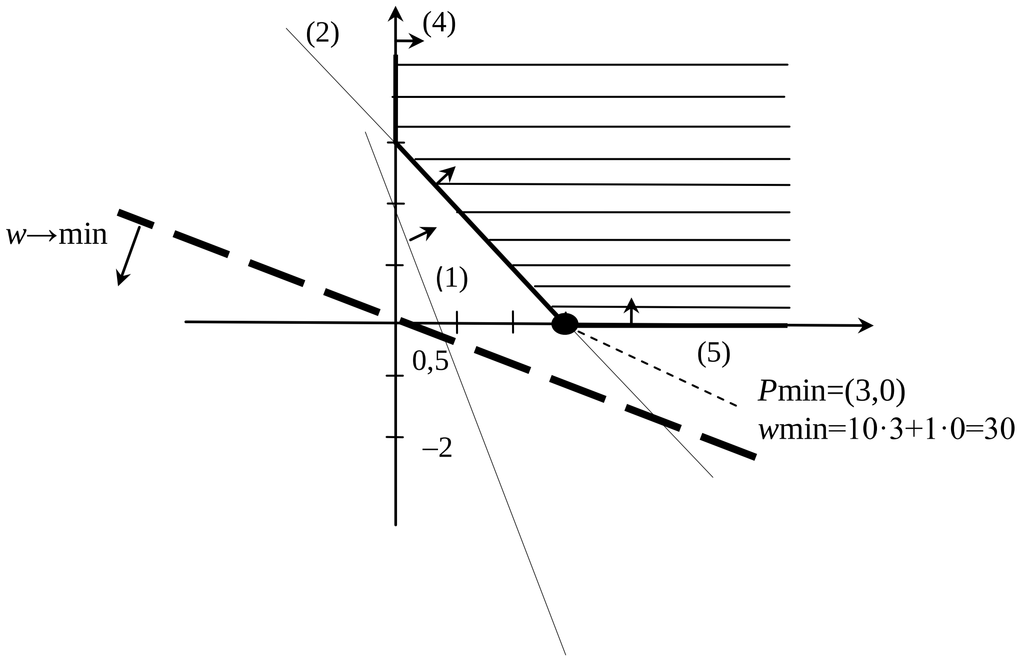
$4y_1 + y_2 \ge 2; \qquad (1)$

$y_1 + y_2 \ge 3; \qquad (2)$

$2y_1 \ge -1; \qquad (3)$

$y_1, y_2 \ge 0. \qquad (4,5)$

Решаем двойственную задачу геометрическим методом:



Итак, решение двойственной задачи имеет вид: $y1 = 3$, $y2 = 0$, $w = 30$.

Найдем теперь по решению двойственной задачи решение исходной задачи.

1) По теоремам двойственности целевые функции в оптимальных точках прямой и двойственной задачи совпадают, получаем первое уравнение для переменных прямой задачи:

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 30;$$

2) По теореме о дополняющей нежесткости для положительных компонент решения двойственной задачи, соответствующие ограничения прямой задачи выполняются как равенства. В данном случае имеем $y1 = 3 > 0$, поэтому получаем второе уравнение;

$$4x_1 + x_2 + 2x_3 = 10;$$

3) Видим, что линия (1) первого ограничения не проходит через оптимальную точку двойственной задачи, то есть первое ограничение двойственной задачи выполняется нежестко, по теореме о дополняющей нежесткости первая переменная прямой задачи должна равняться 0, то есть получаем третье ограничение $x_1 = 0$.

Итак, имеем систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 30;$$

$$4x_1 + x_2 + 2x_3 = 10;$$

$x_1 = 0$.

Подставляя в первые два уравнения значение $x_1 = 0$, получаем:

$3x_2 - x_3 = 30;$

$x_2 + 2x_3 = 10;$

Решаем эту систему методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7; \Delta_1 = \begin{vmatrix} 30 & -1 \\ 10 & 2 \end{vmatrix} = 70; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 30 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} = 0;$$

$$x_2 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 10; x_3 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 0;$$

Итак, оптимальное решение исходной задачи линейного программирования имеет вид $\overline{x} = (0,10,0)^T$

3.2. Пример выполнения задания 2

Решим исходную задачу симплекс методом и по ее решению найдем решение соответствующей двойственной задачи.

Приведем исходную задачу к каноническому виду путем введения остаточных переменных s_1, s_2:

$z \to \max;$

$z - 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 = 0;$

$4x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 + 0 \cdot s_2 = 0;$

$x_1 - x_2 + 0 \cdot s_1 + s_2 = 10;$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ s_1 \geq 0,\ s_2 \geq 0.$

Составляем начальную симплекс-таблицу и приводим ее к оптимальному виду:

Б	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	Реш.	$b_i / A_{i,j}$	Коментарий
z	1	–2	–3	1	0	0	0	–	Не опт.
s_1	0	4	1	2	1	0	10	10	$x_2 \to$ Б
s_2	0	1	–1	0	0	1	1	–	Б$\to s_1$

Б	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	Реш.	$b_i / A_{i,j}$	Коментарий
z	1	10	0	7	3	0	30	–	опт.
s_1	0	4	1	2	1	0	10	–	
s_2	0	5	0	2	1	1	10	–	

Получили оптимальное решение $x_1 = 0, x_2 = 10, x_3 = 0$, оно совпадает с решением полученном в первом примере на основе теорем двойственности.

Получаем также решение двойственной задачи $y_1 = z_{s_1} = 3, y_2 = z_{s_2} = 0$, оно совпадает с решением двойственной задачи, полученным геометрическим методом в предыдущем примере.

4. Индивидуальные задания

№	Задание	№	Задание
1	$z = 2x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max;$ $4x_1 + x_2 + 2x_3 \le 10;$ $x_1 - x_2 \le 2;$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$	2	$z = 2x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max;$ $4x_1 + x_2 + 2x_3 \le 10;$ $x_1 - x_2 + x_3 \le 2;$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$
3	$z = 2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 \to \max;$ $4x_1 + x_2 + 2x_3 \le 10;$ $x_1 - x_2 + x_3 \le 2;$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$	4	$z = 2x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max;$ $4x_1 + x_2 + 2x_3 \le 8;$ $x_1 - x_2 + x_3 \le 2;$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$
5	$z = 2x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max;$ $4x_1 + x_2 + 2x_3 \le 8;$ $x_1 - 2x_2 + x_3 \le 2;$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$	6	$z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \to \max;$ $4x_1 + x_2 + 2x_3 \le 8;$ $x_1 - 2x_2 + x_3 \le 2;$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$
7	$z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \to \max;$ $4x_1 + x_2 + 2x_3 \le 8;$ $x_1 - 2x_2 + x_3 \le 3;$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$	8	$z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \to \max;$ $4x_1 + x_2 + 2x_3 \le 18;$ $x_1 - 2x_2 + x_3 \le 3;$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$
9	$z = 2x_1 - 3x_2 + x_3 \to \max;$ $4x_1 + x_2 + 2x_3 \le 18;$ $x_1 - 2x_2 + x_3 \le 3;$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$	10	$z = 2x_1 - 3x_2 + x_3 \to \max;$ $4 \cdot x_1 + x_2 + 2x_3 \le 18;$ $x_1 - 2x_2 + 2x_3 \le 7;$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$

№	Задание	№	Задание
11	$z=4x_1-3x_2+x_3\to\max;$ $4x_1+x_2+2x_3\le 18;$ $x_1-2x_2+2x_3\le 7;$ $x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0.$	12	$z=4x_1-3x_2+x_3\to\max;$ $4x_1+x_2+2x_3\le 18;$ $x_1-2x_2+3x_3\le 7;$ $x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0.$
13	$z=4x_1-3x_2+2x_3\to\max;$ $4x_1+x_2+2x_3\le 18;$ $x_1-2x_2+3x_3\le 7;$ $x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0.$	14	$z=4x_1-3x_2+2x_3\to\max;$ $4x_1+x_2+2x_3\le 18;$ $x_1-4x_2+3x_3\le 7;$ $x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0.$
15	$z=4x_1-3x_2+2x_3\to\max;$ $4x_1+x_2+4x_3\le 18;$ $x_1-4x_2+3x_3\le 7;$ $x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0.$	16	$z=4x_1-3x_2+2x_3\to\max;$ $4x_1+x_2+4x_3\le 20;$ $x_1-4x_2+3x_3\le 7;$ $x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0.$
17	$z=4x_1+3x_2+2x_3\to\max;$ $4x_1+x_2+4x_3\le 20;$ $x_1-4x_2+3x_3\le 7;$ $x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0.$	18	$z=4x_1+3x_2+2x_3\to\max;$ $4x_1+x_2+4x_3\le 20;$ $x_1+4x_2+3x_3\le 12;$ $x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0.$
19	$z=2x_1+3x_2+2x_3\to\max;$ $4x_1+x_2+4x_3\le 20;$ $x_1+4x_2+3x_3\le 12;$ $x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0.$	20	$z=2x_1+3x_2+5x_3\to\max;$ $4x_1+x_2+4x_3\le 20;$ $x_1+4x_2+3x_3\le 12;$ $x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0.$
21	$z=2x_1+3x_2+5x_3\to\max;$ $4x_1+x_2+4x_3\le 22;$ $x_1+4x_2+3x_3\le 12;$ $x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0.$	22	$z=2x_1+3x_2+5x_3\to\max;$ $4x_1+x_2+4x_3\le 22;$ $x_1+4x_2+3x_3\le 14;$ $x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0.$
23	$z=x_1+3x_2+5x_3\to\max;$ $4x_1+x_2+4x_3\le 22;$ $x_1+4x_2+3x_3\le 14;$ $x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0.$	24	$z=x_1+3x_2+3x_3\to\max;$ $4x_1+x_2+4x_3\le 22;$ $x_1+4x_2+3x_3\le 14;$ $x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0.$

№	Задание	№	Задание
25	$z = x_1 + 3x_2 + 3x_3 \to \max;$ $3x_1 + x_2 + 4x_3 \le 22;$ $x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 14;$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$	26	$z = x_1 + 3x_2 + 3x_3 \to \max;$ $3x_1 + x_2 + 4x_3 \le 18;$ $x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 14;$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$

5. Контрольные вопросы

1. Как записывается двойственная задача к стандартной задаче линейного программирования?
2. Какой экономический смысл имеет задача двойственная к стандартной задаче линейного программирования?
3. Сформулировать первую теорему двойственности.
4. Сформулировать вторую теорему двойственности.
5. Как по решению исходной задачи симплекс-методом получить решение двойственной задачи?