МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра программной инженерии

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_______ О.Г. Локтионова
«___» _______ 2018 г.

СИМПЛЕКС-МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Методические указания к практическому занятию
по дисциплине «Методы оптимальных решений»
для студентов направления подготовки
38.03.01 «Экономика»

Курск 2018

УДК 519.6

Составители: В.В. Свиридов, Т.В. Алябьева

Рецензент:
кандидат технических наук, доцент кафедры программной инженерии
ЮЗГУ *В.В. Апальков*

Симплекс-метод решения задачи линейного программирования: методические указания к практическому занятию по дисциплине «Методы оптимальных решений» для студентов направления подготовки 38.03.01 «Экономика» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: В.В. Свиридов, Т.В. Алябьева. Курск, 2018. 12 с.

Изложены основные сведения по применению симплекс-метода для решения задач линейного программирования. Рассмотрены примеры выполнения заданий. Приведены варианты заданий, контрольные вопросы к защите практической работы.

Методические указания соответствуют требованиям рабочей программы по дисциплине «Методы оптимальных решений».

Материал предназначен для студентов 38.03.01 «Экономика» очной и заочной форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 02.10.2018.. Формат 60 х 84 1/16.
Усл. печ. л.0,6. Уч.- изд. л.0,5. Тираж 100 экз. Заказ 2144. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Содержание

СИМПЛЕКС-МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1. Цель занятия

Целью практического занятия является получение навыков применения симплекс-метод для решения задач линейного программирования.

Задание. Решить данную стандартную задачу линейного программирования симплекс-методом.

2. Краткие теоретические сведения

Канонической формой задачи линейного программирования называется следующая задача оптимизации:

$$z(x) = c^T x \to \max; \tag{1}$$

$$Ax = b; \tag{2}$$

$$x \geq 0, \tag{3}$$

где

$$x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^T;$$

$$c = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{pmatrix}^T;$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{pmatrix}^T \geq 0;$$

$$A = A[m,n], rg(A) = m;\ m \leq n.$$

Разобьем матрицу A на две подматрицы B и N, то есть запишем $A = [B \mid N]$, где B – невырожденная подматрица $m \times m$. Тогда система (2) приобретет вид

$$Bx_b + Nx_N = b, \tag{4}$$

где вектор x разбит на базисную и небазисную часть следующим образом: $x = \begin{bmatrix} x_b \\ x_N \end{bmatrix}$,

Из (4) следует, что

$$Bx_b = -Nx_N + b \tag{5}$$

Так как по предположению B – невырожденная матрица, то

$$x_b = -B^{-1}x_N + B^{-1}b \tag{6}$$

Формула (6) означает, что m базисных переменных x_b выражены через $n-m$ небазисных переменных x_N. Вектор x называется базисным решением системы (2), если в нем все небазисные компоненты равны 0, то есть если $x_N = 0$ и, следовательно, $x_b = B^{-1}b$.

Допустимое базисное решение- это такое базисное решение, в котором все элементы базисного вектора неотрицательны, то есть выполняется условие $x_b = B^{-1}b \geq 0$. Такое преобразование, выражение базисных неизвестных через небазисные выполняется также и в целевой функции. Разобьем вектор цен на базисную и небазисную части: $c = \begin{bmatrix} c_b \\ c_N \end{bmatrix}$.

Тогда целевая функция задачи может быть преобразована следующим образом:

$$z(x) = c^T x = \begin{bmatrix} c_b \\ c_N \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_b \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_b^T & c_N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_b \\ x_N \end{bmatrix} = c_b^T x_b + c_N^T x_N. \qquad (7)$$

В данном выражении выразим базисные переменные через небазисные по формуле (6), получим

$$z(x) = c_b^T \left(-B^{-1}N x_N + B^{-1}b\right) + c_N^T x_N = c_b^T B^{-1}b - \left(c_b^T B^{-1}N - c_N^T\right) x_N. \qquad (8)$$

Таким образом, исходная задача линейного программирования может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned} & z(x) = c_b^T B^{-1}b - \left(c_b^T B^{-1}N - c_N^T\right) x_N \to \max; \\ & x_b = -B^{-1}N x_N + B^{-1}b \geq 0; \\ & x_N \geq 0 \end{aligned} \qquad (9)$$

Обозначим $\beta = B^{-1}b, \pi = \left(c_b^T \cdot B^{-1}\right)^T$ задачу (9) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} & z(x) = c_b^T \beta - \left(\pi^T N - c_N^T\right) x_N \to \max; \\ & x_b = -B^{-1}N x_N + \beta \geq 0; \\ & x_N \geq 0 \end{aligned} \qquad (10)$$

Вектор-строка $d = \pi^T N - c_N^T$ называется строкой относительных оценок небазисных переменных. Необходимым и достаточным условием оптимальности текущего базисного решения $x = \begin{bmatrix} x_b = \beta \\ 0 \end{bmatrix}$ является условие $d = \pi^T N - c_N^T \geq 0$, так как если относительная оценка d_j некоторой небазисной переменной x_j отрицательна, то эту небазисную переменную можно увеличить от текущего нулевого значения и в соответствии с уравнением $z(x) = c_b^T \beta - \left(\pi^T N - c_N^T\right) x_N$ получить приращение целевой функции.

На основе анализа относительных оценок небазисных переменных и строится алгоритм симплекс-метода. Предположим у нас имеется текущее допустимое базисное решение с базисной подматрицей B и неотрицательной правой частью $\beta = B^{-1} \cdot b$.

Шаг 1. Определение переменной вводимой в базис. Если все относительные оценки неотрицательны, задача решена, текущее базисное решение является оптимальным. Иначе находим наименьшую отрицательную оценку $d_q < 0$, небазисная переменная $x_q = 0$ будет увеличиваться и становиться положительной, то есть будет вводиться в базис.

Шаг 2. Определение переменной выводимой из базиса. При увеличении x_q какие то базисные переменные начнут уменьшаться, но они не могут быть отрицательными, первая базисная переменная, которая обратиться в 0 или любая из них, если таких переменных будет несколько удаляется из базиса.

То есть переменную x_p, выводимую из базиса, мы определяем из решения следующей задачи:

$$\frac{\beta_p}{\alpha_{pq}} = \min_{\alpha_{iq>0}} \frac{\beta_i}{\alpha_{iq}} \tag{11}$$

Если такая переменная x_p не существует, то есть не определяется из уравнения (9), то целевая функция не ограничена и может быть увеличена до ∞. Работа алгоритма закончена.

Шаг 3. Преобразование симплекс таблицы методом Гаусса с заданным ведущим элементом. Столбец p, равный удаляется из базисной подматрицы B, а на его место ставится столбец α_q, что делается преобразованием Гаусса с ведущим элементом $\alpha_{p,q}$, при это столбец α_q должен в позиции $\alpha_{p,q}$ получить значение, равное 1, а в остальных позициях получить значение равное 0. Преобразование Гаусса распространяется и на столбец β правых частей и на строку d относительных оценок небазисных переменных, в результате они приобретают обновленные значения, соответствующие новому базису. После этого возвращаемся к шагу 1.

Все эти преобразования выполняются внутри специальной таблицы, называемой таблицей симплекс-метода.

Таблица симплекс метода имеет следующую структуру:

Базис	z	x_1	…	x_n	Решение	$B_i/A_{i,q}$
z	1	d_1	…	d_n	$z(x)$	–
x_b	0	$B^{-1}\cdot A = \mathrm{A}$			$\beta = B^{-1}\cdot b$	$\dfrac{\beta_i}{\alpha_{i,q}}$

3. Пример выполнения задания

Решить задачу линейного программирования:

$z = x_1 + 2x_2 \to \max;$

$2x_1 + x_2 \le 10;$

$x_1 + 2x_2 \le 10;$

$x_{1,2} \ge 0.$

Решение

1. *Приводим задачу к каноническому виду* (1)–(3):

$z \to \max;$

$z - x_1 - 2x_2 - 0s_1 - 0s_2 = 0;$

$2x_1 + x_2 + 1s_1 + 0s_2 = 10;$

$x_1 + 2x_2 + 0\cdot s_1 + 1s_2 = 10;$

$x_1, x_2, s_1, s_2 \ge 0.$

При этом мы ввели в рассмотрение так называемые остаточные переменные s_1, s_2.

2. *Заполняем начальную симплекс-таблицу и производим ее анализ в соответствии с алгоритмом симплекс-метода*.

Базис	z	x_1	x_2	$s_1 = x_3$	$s_2 = x_4$	Решен.	B_i/A_{iq}
z	1	–1	–2	0	0	0	–
s_1	0	2	1	1	0	10	
s_2	0	1	2	0	1	10	

В начальной таблице базисными переменными являются остаточные переменные s_1, s_2, которые являются 3 и 4 переменной задачи, таким образом, имеем $B = \{s_1, s_2\}$. Базисным переменным соответствует единичная подматрица $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ матрицы симплекс-таблицы. Переменные x_1, x_2 являются небазисными, их относительные оценки равны соответственно $d_1 = -1, d_2 = -2$.

Наименьшей отрицательной относительной оценкой обладает переменная x_2, она направляется в базис, что можно записать в виде: $x_2 \to B$. Это означает, что столбец x_2

x_2
–2
1
2

Симплекс таблицы является ведущим и должен быть сделан единичным методом Гаусса. Мы должны определить переменную, выводимую из базиса. Для этого рассчитаем отношения правых частей к положительным элементам ведущего столбца и выберем наименьшее:

B_i/A_{iq}
–
10/1 = 10
10/2 = 5

В рассчитанном столбце наименьшее найденное отношение, равное 5, располагается во второй строке симплекс таблицы (отметим, что строки симплекс таблицы нумеруются с 0, причем нулевая строка – это *z*-строка). Поэтому вторая строка симплекс таблицы будет ведущей, ей соответствует переменная s_2, которая выводится из базиса, элемент $\alpha_{2,2} = 2$ на пересечении ведущей строки и ведущего столбца будет ведущим и он делается равным 1 по методу Гаусса:

А*) Разделим ведущую строчку на ее ведущий элемент*, получим переход от строки

s_2	0	1	2	0	1	10	5

К строке

s_2	0	1/2	1	0	1/2	5	

В) *Вычтем из z-строки ведущую строку, умноженную на* (–2*) и из первой строки ведущую строку, умноженную на* 1, то есть сделаем следующие преобразования симплекс-таблицы:

Базис	z	x_1	x_2	$s_1 = x_3$	$s_2 = x_4$	Реш.	B_i/A_{iq}
z	1–0·(–2)	–1–1/2·(–2)	–2–1·(–2)	0–0·(–2)	0–1/2·(–2)	0–5·(–2)	–
s_1	0–0·(1)	2–1/2·(1)	1–1·(1)	1–0·(1)	0–1/2·(1)	10–5·(1)	
s_2	0	1/2	1	0	1/2	5	

В результате получим следующую симплекс-таблицу:

Базис	z	x_1	x_2	$s_1 = x_3$	$s_2 = x_4$	Реш.	B_i/A_{iq}
z	1	0	0	0	1	10	–
s_1	0	3/2	0	1	–1/2	5	
x_2	0	1/2	1	0	1/2	5	

Обрабатываем вторую симплекс-таблицу. В ней относительные оценки всех переменных, то есть элементы z-строки неотрицательны, получена оптимальная симплекс-таблица. Выписываем ответ задачи:

$Z = 10$ – максимальная прибыль;

$x_1 = 0$ (небазисная переменная) – производство первого продукта;

$x_2 = 5$ – производство второго продукта;

$s_1 = 5$ – остаток первого ресурса;

$s_2 = 0$ (небазисная переменная) − остаток второго ресурса.

4. Индивидуальные задания

№	Задача линейного программирования	№	Задача линейного программирования
1	$z = 3x_1 + 2x_2 \to \max;$ $2x_1 + x_2 \le 10;$ $x_1 + 2x_2 \le 10;$ $x_{1,2} \ge 0.$	2	$z = x_1 + 2x_2 \to \max;$ $2x_1 + x_2 \le 15;$ $x_1 + 2x_2 \le 10;$ $x_{1,2} \ge 0.$
3	$z = 3x_1 + 2x_2 \to \max;$ $2x_1 + x_2 \le 10;$ $x_1 + 2x_2 \le 20;$ $x_{1,2} \ge 0.$	4	$z = x_1 + x_2 \to \max;$ $2x_1 + x_2 \le 10;$ $x_1 + 4x_2 \le 10;$ $x_{1,2} \ge 0.$
5	$z = x_1 + x_2 \to \max;$ $2x_1 + x_2 \le 12;$ $x_1 + 3x_2 \le 10;$ $x_{1,2} \ge 0.$	6	$z = x_1 + 2x_2 \to \max;$ $5x_1 + x_2 \le 10;$ $x_1 + 4x_2 \le 10;$ $x_{1,2} \ge 0.$
7	$z = 3x_1 + 2x_2 \to \max;$ $2x_1 + x_2 \le 12;$ $x_1 + 2x_2 \le 10;$ $x_{1,2} \ge 0.$	8	$z = x_1 + 3x_2 \to \max;$ $2x_1 + x_2 \le 10;$ $x_1 + 2x_2 \le 10;$ $x_{1,2} \ge 0.$
9	$z = x_1 + 4x_2 \to \max;$ $2x_1 + x_2 \le 10;$ $x_1 + 2x_2 \le 10;$ $x_{1,2} \ge 0.$	10	$z = x_1 + 2x_2 \to \max;$ $2x_1 + x_2 \le 10;$ $3x_1 + 2x_2 \le 20;$ $x_{1,2} \ge 0.$

№	Задача линейного программирования	№	Задача линейного программирования
11	$z = 4x_1 + 2x_2 \to \max;$ $2x_1 + x_2 \le 10;$ $x_1 + 2x_2 \le 15;$ $x_{1,2} \ge 0.$	12	$z = x_1 + 2x_2 \to \max;$ $3x_1 + x_2 \le 12;$ $x_1 + 2x_2 \le 10;$ $x_{1,2} \ge 0.$
13	$z = x_1 + 2x_2 \to \max;$ $2x_1 + x_2 \le 10;$ $x_1 + 3x_2 \le 12;$ $x_{1,2} \ge 0.$	14	$z = x_1 + 2x_2 \to \max;$ $2x_1 + x_2 \le 10;$ $x_1 + 2x_2 \le 8;$ $x_{1,2} \ge 0.$
15	$z = 5x_1 + 2x_2 \to \max;$ $2x_1 + x_2 \le 10;$ $x_1 + 2x_2 \le 10;$ $x_{1,2} \ge 0.$	16	$z = 3x_1 + 2x_2 \to \max;$ $2x_1 + x_2 \le 12;$ $x_1 + 2x_2 \le 10;$ $x_{1,2} \ge 0.$
17	$z = x_1 + 4x_2 \to \max;$ $2x_1 + x_2 \le 10;$ $x_1 + 2x_2 \le 10;$ $x_{1,2} \ge 0.$	18	$z = x_1 + 5x_2 \to \max;$ $2x_1 + x_2 \le 10;$ $x_1 + 2x_2 \le 10;$ $x_{1,2} \ge 0.$
19	$z = x_1 + 2 \cdot x_2 \to \max;$ $4 \cdot x_1 + x_2 \le 20;$ $x_1 + 2x_2 \le 10;$ $x_{1,2} \ge 0.$	20	$z = x_1 + 3x_2 \to \max;$ $3x_1 + x_2 \le 10;$ $x_1 + 2x_2 \le 10;$ $x_{1,2} \ge 0.$
21	$z = x_1 + 4x_2 \to \max;$ $2x_1 + x_2 \le 10;$ $x_1 + 2x_2 \le 30;$ $x_{1,2} \ge 0.$	22	$z = x_1 + 2x_2 \to \max;$ $2x_1 + 4x_2 \le 20;$ $x_1 + 2x_2 \le 10;$ $x_{1,2} \ge 0.$

№	Задача линейного программирования	№	Задача линейного программирования
23	$z = 4x_1 + 2x_2 \to \max;$ $2x_1 + x_2 \le 20;$ $x_1 + 2x_2 \le 10;$ $x_{1,2} \ge 0.$	24	$z = x_1 + 5x_2 \to \max;$ $2x_1 + x_2 \le 10;$ $x_1 + 4x_2 \le 10;$ $x_{1,2} \ge 0.$
25	$z = x_1 + 2x_2 \to \max;$ $2x_1 + x_2 \le 20;$ $x_1 + 2x_2 \le 15;$ $x_{1,2} \ge 0.$	26	$z = x_1 + 2x_2 \to \max;$ $2x_1 + x_2 \le 10;$ $x_1 + 3x_2 \le 18;$ $x_{1,2} \ge 0.$

5. Контрольные вопросы

1. Какой вид имеет каноническая задача линейного программирования?
2. Что такое базисное решение, допустимое базисное решение?
3. Какой вид имеет преобразованная задача линейного программирования после исключения базисных переменных?
4. Какой критерий оптимальности в преобразованной задаче линейного программирования?
5. Назвать шаги алгоритма симплекс-метода.