

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Емельянов Сергей Геннадьевич

Должность: ректор

Дата подписания: 05.09.2018

Уникальный программный ключ:

9ba7d3e34c012eba476ffd2d064cf2781953be250bd2374d76f5c0ce536f0fcb

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования**

**«Юго-Западный государственный университет»  
(ЮЗГУ)**

**Кафедра программной инженерии**



## **ОТКРЫТЫЕ ТРАНСПОРТНЫЕ ЗАДАЧИ. ЗАДАЧИ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ**

Методические указания к практическому занятию  
по дисциплине «Методы оптимальных решений»  
для студентов направления подготовки  
38.03.01 «Экономика»

Курск 2018

УДК 519.6

Составители: В.В. Свиридов, Т.В. Алябьева

Рецензент:

кандидат технических наук, доцент кафедры программной инженерии  
ЮЗГУ *В.В. Апальков*

**Открытые транспортные задачи. Задачи с дополнительными условиями:** методические указания к практическому занятию по дисциплине «Методы оптимальных решений» для студентов направления подготовки 38.03.01 «Экономика» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: В.В. Свиридов, Т.В. Алябьева. Курск, 2018. 27 с.

Изложены основные сведения о решении открытых транспортных задач и задач с дополнительными условиями с помощью метода потенциалов. Рассмотрены примеры выполнения заданий. Приведены варианты заданий, контрольные вопросы к защите практической работы.

Методические указания соответствуют требованиям рабочей программы по дисциплине «Методы оптимальных решений». Материал предназначен для студентов 38.03.01 «Экономика» очной и заочной форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 02.10.2018.. Формат 60 x 84 1/16.

Усл. печ. л. 1,4. Уч.- изд. л.1,3. Тираж 100 экз. Заказ 2135. Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.

305040, Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

## Содержание

1. Цель занятия .....	4
2. Краткие теоретические сведения .....	4
2.1. Открытая транспортная задача с избыточным спросом .....	4
2.2. Открытая транспортная задача с избыточным предложением.....	6
2.3. Транспортные задачи с ограничениями на пропускную способность дуг .....	7
2.3.1. Ограничения на пропускную способность снизу .....	7
2.3.2. Ограничения на пропускную способность сверху.....	8
3. Пример выполнения задания .....	9
4. Индивидуальные задания.....	14
5. Контрольные вопросы.....	27

## ОТКРЫТЫЕ ТРАНСПОРТНЫЕ ЗАДАЧИ.

### ЗАДАЧИ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

#### 1. Цель занятия

Получение навыков решения открытых транспортных задач и задач с дополнительными условиями с помощью метода потенциалов.

**Задание.** Даны три транспортные задачи специального вида: с избыточным спросом, избыточным предложением и ограничениями на пропускную способность маршрутов. Привести их к стандартному сбалансированному виду и решить методом потенциалов.

#### 2. Краткие теоретические сведения

##### 2.1. Открытая транспортная задача с избыточным спросом

Пусть имеется  $m$  складов  $A_1, \dots, A_m$ , на которых имеется запасы однородной продукции в количествах  $a_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ),  $n$  пунктов потребления (розничных магазинов)  $B_1, \dots, B_n$  с величиной спроса  $b_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ), причем имеет место неравенство  $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$ , то есть

спрос превышает суммарный запас, такая транспортная задача называется *несбалансированной с избыточным спросом*. Дана также матрица  $C = (c_{i,j})$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$  удельных транспортных расходов, где  $c_{i,j}$  – стоимость доставки одной единицы продукции от  $i$ -го поставщика  $j$ -му потребителю.

Требуется найти план перевозок  $X = (x_{i,j})$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$ , где  $x_{i,j}$  – объем поставок продукции от  $i$ -го поставщика  $j$ -му потребителю, при котором поставки выполняемые поставщиками не превосходят спроса каждого из потребителей, то есть  $b_j \geq \sum_{i=1}^m x_{i,j}$ ,  $j = \overline{1, n}$ , и запасы

поставщиков полностью вывозятся, то есть  $a_i = \sum_{j=1}^n x_{i,j}$ ,  $i = \overline{1, m}$ , и

суммарные транспортные расходы являются минимально

возможными, то есть  $z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{i,j} \rightarrow \min$ . Получаем математическую

модель вида:

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{i,j} \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{i,j} = a_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{i,j} = b_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (3)$$

$$x_{i,j} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Данная задача сводится к стандартному виду сбалансированной транспортной задачи путем введения в рассмотрение фиктивного

поставщика с номером  $m+1$  с объемом запасов  $a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$ . В

результате транспортная задача становится сбалансированной, так как

$$\sum_{j=1}^n b_j = \sum_{i=1}^{m+1} a_i.$$

Таким образом, матрица тарифов перевозок  $C = (c_{i,j})_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, n}$  дополняется  $m+1$  строкой  $C_{m+1, \bullet}$ , соответствующей фиктивному поставщику. При этом мы полагаем  $C_{m+1, j} = 0, j = 1, \dots, n$ , то есть дополнительная строка матрицы тарифов состоит из одних нулей, так как фактических перевозок от фиктивного поставщика не происходит и величины поставок  $X_{m+1, j}, j = 1, \dots, n$  от фиктивного поставщика потребителям интерпретируются как реальные недопоставки этим потребителям, то есть уровень недопоставок находится как задача оптимизации экономических решений.

После приведения транспортной задачи с избыточным спросом к сбалансированному виду, она решается методом потенциалов обычным образом.

## 2.2. Открытая транспортная задача с избыточным предложением

Аналогичная процедура применяется в случае открытой транспортной задачи с избыточным предложением.

Мы имеем неравенство  $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$ , то есть суммарный запас превышает суммарный спрос. Такая транспортная задача называется *несбалансированной с избыточным предложением*.

Требуется найти план перевозок  $X = (x_{i,j})$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$ , где  $x_{i,j}$  – объем поставок продукции от  $i$ -го поставщика  $j$ -му потребителю, при котором поставки выполняемые поставщиками не превосходят из

запасов, то есть  $a_i \geq \sum_{j=1}^n x_{i,j}$ ,  $i = \overline{1, m}$ , спрос всех потребителей

удовлетворен, то есть  $b_j = \sum_{i=1}^m x_{i,j}$ ,  $j = \overline{1, n}$  и суммарные транспортные

расходы являются минимально возможными, то есть

$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{i,j} \rightarrow \min$ . Получаем математическую модель вида:

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{i,j} \rightarrow \min;$$

$$\sum_{j=1}^n x_{i,j} \leq a_i, \quad i = \overline{1, m};$$

$$\sum_{i=1}^m x_{i,j} = b_j, \quad j = \overline{1, n};$$

$$x_{i,j} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Задача с избыточным предложением сводится к стандартному виду сбалансированной транспортной задачи путем введения в рассмотрение фиктивного потребителя с номером  $n+1$  с объемом

запасов  $b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$ . В результате транспортная задача

становится сбалансированной, так как выполняется равенство

$\sum_{j=1}^{n+1} b_j = \sum_{i=1}^{m+1} a_i$ . Таким образом, матрица тарифов перевозок

$C = (c_{i,j})_{i=1,\dots,m, j=1,\dots,n}$  дополняется  $n+1$  столбцом  $C_{\bullet, n+1}$ ,

соответствующей фиктивному потребителю. При этом мы полагаем  $C_{i, n+1} = 0, i = 1, \dots, m$ , то есть дополнительный столбец матрицы тарифов состоит из одних нулей, так как не происходит фактических перевозок к фиктивному потребителю и величины поставок  $X_{i, n+1}, i = 1, \dots, m$  от поставщиков к фиктивному потребителю интерпретируются как фактические остатки на складах поставщиков, т.е. уровень остатков у поставщиков определяется в результате решения задачи оптимизации.

После приведения транспортной задачи с избыточным предложением к сбалансированному виду, она решается методом потенциалов обычным образом.

### 2.3. Транспортные задачи с ограничениями на пропускную способность дуг

#### 2.3.1. Ограничения на пропускную способность снизу

Пусть для некоторой дуги  $(i_0, j_0)$  двудольного графа транспортной задачи имеется ограничение на пропускную способность снизу вида  $X_{i_0, j_0} \geq c > 0$ . Такое ограничение может возникнуть, например, при наличии отдельной договоренности  $i_0$ -го поставщика и  $j_0$ -го потребителя о гарантированных поставках в объеме  $c$ .

Такая специальная транспортная задача сводится к обычному виду путем замены запаса  $i_0$ -го поставщика по формуле  $a'_{i_0} = a_{i_0} - c$  и спроса  $j_0$ -го потребителя по формуле  $b'_{j_0} = b_{j_0} - c$ , то есть и запасы и спрос уменьшаются на одну и ту же величину  $c$ . Задача при этом остается сбалансированной. Далее измененная задача  $T'$  решается методом потенциалов с получением своего оптимального плана

$$X' = (x'_{i,j})_{i=1,\dots,m, j=1,\dots,n}.$$

Для получения оптимального плана исходной задачи рассчитанный план  $X'$  вспомогательной задачи далее изменяем

только в позиции  $(i_0, j_0)$  по формуле  $x_{i_0, j_0} = x'_{i_0, j_0} + c$ , то есть расчетная величина теперь увеличивается на то же значение  $c$ .

### 2.3.2. Ограничения на пропускную способность сверху

Пусть для некоторой дуги  $(i_0, j_0)$  двудольного графа транспортной задачи имеется ограничение на пропускную способность снизу вида  $X_{i_0, j_0} \leq c$ . Такое ограничение может возникнуть, например, при большой удаленности пунктов и ограниченности транспортных средств доставки.

Для приведения такой задачи к стандартному виду потребителя  $j_0$  представляем в виде двух столбцов, исходного, для которого мы берем уменьшенный спрос  $b'_{j_0} = c < b_{j_0}$ , оставляя транспортные тарифы в столбце неизменными, и дополнительного столбца  $n+1$ , для которого выбирается спрос в размере  $b_{n+1} = b_{j_0} - c$  и транспортные тарифы для поставщиков отличных от  $i_0$ -го, копируем из столбца  $j_0$ , то есть используем формулу  $C_{i, n+1} = C_{i, j_0}, i \neq i_0$ . Для поставщика  $i_0$  берем транспортный тариф  $C_{i_0, n+1} = \infty$ , тем самым мы запрещаем поставки от  $i_0$ -го поставщика  $j_0$ -му потребителю, превышающие заданный уровень  $c$ .

Далее полученная стандартная транспортная задача решается обычным образом методом потенциалов. После получения оптимального плана  $X' = (x'_{i, j})_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, n+1}$  вспомогательной задачи оптимальный план  $X = (x_{i, j})_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, n}$  получается следующим образом.

Столбцы отличные от  $j_0$ -го переносятся в итоговый план без изменений:  $X_{\bullet, j} = X'_{\bullet, j}, j \neq j_0$ . Столбец с номером  $j_0$  рассчитывается по формулам:

$$X_{i, j_0} = X_{i, j_0} + X'_{i, n+1}, i \neq i_0,$$

$$X_{i_0, j_0} = X'_{i_0, j_0}.$$



### 3. Пример выполнения задания

1. Решить транспортную задачу с избыточным спросом

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение	
$A_1$	2	4	1	10	
$A_2$	3	2	5	10	
Спрос	8	8	7	23	20

**Решение.**

Вводим фиктивного поставщика  $A_3$ :

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение	
$A_1$	2	4	1	10	
$A_2$	3	2	5	10	
$A_3$	0	0	0	3	
Спрос	8	8	7	23	23

Находим начальный опорный план методом наименьшего значения.

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение	
$A_1$	3 2	4	7 1	10	
$A_2$	2 3	8 2	5	10	
$A_3$	3 0	0	0	3	
Спрос	8	8	7	23	23

Применяем метод потенциалов для приведения начального опорного плана к оптимальному:

	$B_1$	2	$B_2$	1	$B_3$	1	Предложение
$A_1$	0	3 2	3 4	7 1	10		
$A_2$	1	2 3	8 2	3 5	10		
$A_3$	-2	3 0	1 0	1 0	3		
Спрос		8	8	7	23	23	

Относительные оценки небазисных клеток неотрицательны, следовательно? текущий план является оптимальным.

**Ответ:**

Поставки:

$A_1$ : 3 ( $B_1$ ), 7 ( $B_3$ );

$A_2$ : 2 ( $B_1$ ), 8 ( $B_2$ ).

Недопоставки:

$B_1$  -3;

Транспортные издержки:

$$z = 3 \cdot 2 + 7 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 8 \cdot 2 = 35 \text{ у.е.}$$

2. Решить транспортную задачу с избыточным предложением

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
$A_1$	2	4	1	20
$A_2$	3	1	5	10
Спрос	8	8	7	23      30

Решение.

Вводим фиктивного потребителя

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	Предложение
$A_1$	2	4	1	0	20
$A_2$	3	1	5	0	10
Спрос	8	8	7	7	30      30

Находим начальный опорный план методом наименьшего значения:

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	Предложение
$A_1$	6   2	4	7   1	7   0	20
$A_2$	2   3	8   1	5	0	10
Спрос	8	8	7	7	30      30

Для оптимизации начального плана применяем метод потенциалов:

	$B_1$	2	$B_2$	0	$B_3$	1	$B_4$	0	Предложение
$A_1$	0	6   2	4   4	7   1	7   0	20			
$A_2$	1	2   3	8   1	3   5	-1   0	10			
Спрос		8	8	7	7	30      30			

Имеется клетка (2, 4) с отрицательной относительной оценкой  $d_{24} = -1$ . Включаем эту клетку в базис:

	$B_1$	2	$B_2$	0	$B_3$	1	$B_4$	0	Предложение
$A_1$	0	+ 6   2	4   4	7   1	- 7   0	20			
$A_2$	1	- 2   3	8   1	3   5	+ -1   0	10			
Спрос		8	8	7	7	30      30			

$Q = \min\{7, 2\} = 2$ , клетка (2, 1) уходит из базиса:

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	Предложение
$A_1$	8   2	4	7   1	5   0	20
$A_2$	3	8   1	5	2   0	10
Спрос	8	8	7	7	30      30

Снова применяем метод потенциалов:

	$B_1$	2	$B_2$	2	$B_3$	1	$B_4$	0	Предложение		
$A_1$	0	8	2	2	4	7	1	5	0	20	
$A_2$	-1	2	3	8	1	5	5	2	0	10	
Спрос		8		8		7		7		30	30

Относительные оценки небазисных клеток неотрицательны, следовательно, текущий план является оптимальным.

**Ответ:**

Поставки:

$A_1$ : 8 ( $B_1$ ), 7 ( $B_3$ );

$A_2$ : 8 ( $B_2$ ).

Остатки на складах:

$A_1$ : 5,  $A_2$ : 2.

Транспортные издержки:

$z = 8 \cdot 2 + 7 \cdot 1 + 8 \cdot 1 = 31$  у.е.

3. Решить сбалансированную транспортную задачу с заданным ограничением на пропускную способность ячейки сверху.

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение	
$A_1$	2	4	1 ( $\leq 3$ )	20	
$A_2$	3	1	5	3	
Спрос	8	8	7	23	23

В ячейке (1,3) имеется ограничение на пропускную способность сверху:  $x_{1,3} \leq 3$ .

Разбиваем столбец потребителя  $B_3$  на 2

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_3'$	Предложение	
$A_1$	2	4	1	$\infty$	20	
$A_2$	3	1	5	5	3	
Спрос	8	8	3	4	23	23

Находим начальный опорный план методом наименьшего значения:

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_3'$	Предложение			
$A_1$	8	5	4	3	1	$\infty$	20	
$A_2$	3	3	1	5	4	5	3	
Спрос	8	8	3	4	4	5	23	23

Приводим начальную таблицу к оптимальной методом потенциалов:

1 этап:

	$B_1$ 2	$B_2$ 4	$B_3$ 1	$B_3'$ 8	Предложение
$A_1$ 0	8 2	5 4	3 1	$\infty$ $\infty$	20
$A_2$ -3	4 3	3 1	7 5	4 5	3
Спрос	8	8	3	4	23 23

Относительные оценки небазисных клеток неотрицательны, следовательно, текущая таблица, т.е. начальная является и оптимальной.

**Ответ:**

Поставки:

$A_1$ : 8 ( $B_1$ ), 5 ( $B_2$ ), 3 ( $B_3$ );

$A_2$ : 3 ( $B_2$ ), 4 ( $B_3$ );

Транспортные затраты:

$$z = 8 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 5 = 62 \text{ у.е.}$$

4. Решить сбалансированную транспортную задачу с заданным ограничением на пропускную способность ячейки снизу.

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
$A_1$	2	4( $\geq 5$ )	1	20
$A_2$	3	1	5	3
Спрос	8	8	7	23 23

В ячейке (1, 2) имеется ограничение на пропускную способность снизу:  $x_{1,2} \geq 5$ . Приведем данную задачу к стандартной. Вычтем из запасов первого поставщика и величины спроса третьего потребителя заданную величину 5. Получаем транспортную задачу:

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
$A_1$	2	4	1	15
$A_2$	3	1	5	3
Спрос	8	3	7	18 18

Решаем полученную задачу обычным способом.

Сначала находим начальный опорный план методом наименьшего значения.

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
$A_1$	8 2	4	7 1	15
$A_2$	0 3	3 1	5	3
Спрос	8	3	7	18 18

Заметим, что мы на последнем шаге поместили в базис также нулевую клетку (2, 1), которая не дает вклада в транспортные расходы, но необходима, так как в базисе должно быть  $2 + 3 - 1 = 4$  клеток.

Выполним первый этап метода потенциалов.

	$B_1$	2	$B_2$	0	$B_3$	1	Предложение
$A_1$	0	8 2	4 4	7 1	15		
$A_2$	1	0 3	3 1	3 5	3		
Спрос		8	3	7	18	18	

Относительные оценки небазисных клеток являются неотрицательными. Следовательно, текущая таблица является оптимальной и потребовался только один этап метода потенциалов.

Таким образом, нами получен оптимальный план  $X' = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

вспомогательной транспортной задачи. Перейдем теперь к оптимальному плану исходной задачи с помощью преобразования, которое было описано в кратких теоретических положениях:  $x_{1,2} = x'_{1,2} + 5 = 5$ . Получаем оптимальный план основной задачи:

$$X = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ:

Поставки:

$A_1$ : 8 ( $B_1$ ), 5 ( $B_2$ ), 7 ( $B_3$ );

$A_2$ : 3 ( $B_2$ ).

Транспортные издержки:

$$z = 8 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 7 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 49.$$

## 4. Индивидуальные задания

№	Транспортные задачи варианта					
1		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение	
	$A_1$	2	4	8	10	
	$A_2$	3	2	5	10	
	Спрос	8	9	7	24	20
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение	
	$A_1$	2	4	1	20	
	$A_2$	3	5	5	20	
	Спрос	8	8	7	23	40
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение	
	$A_1$	2	4	$1(\leq 2)$	20	
	$A_2$	3	4	5	3	
	Спрос	8	8	7	23	23
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение	
	$A_1$	2	$4(\geq 2)$	3	20	
	$A_2$	3	1	5	3	
	Спрос	8	8	7	23	23

№	Транспортные задачи варианта					
2		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение	
	$A_1$	1	4	8	10	
	$A_2$	3	2	5	10	
	Спрос	8	9	7	24	20
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение	
	$A_1$	2	4	1	20	
	$A_2$	3	2	5	20	
	Спрос	8	8	7	23	40
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение	
	$A_1$	2	4	$1(\leq 2)$	20	
	$A_2$	1	4	5	3	
	Спрос	8	8	7	23	23
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение	
	$A_1$	2	$4(\geq 3)$	3	20	
	$A_2$	3	1	5	3	
	Спрос	1	8	7	23	23
3		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение	
	$A_1$	2	4	8	10	
	$A_2$	3	2	5	10	
	Спрос	8	9	7	24	20
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение	
	$A_1$	2	4	1	20	
	$A_2$	3	5	2	20	
	Спрос	8	8	7	23	40
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение	
	$A_1$	2	4	$1(\leq 4)$	20	
	$A_2$	3	1	5	3	
	Спрос	8	8	7	23	23
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение	
	$A_1$	2	4	3	10	
	$A_2$	$3(\geq 2)$	1	5	14	
	Спрос	8	8	8	24	24

№	Транспортные задачи варианта				
4		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	2	4	8	10
	$A_2$	3	2	5	6
	Спрос	8	9	7	24      16
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	2	4	1	20
	$A_2$	3	5	2	8
	Спрос	8	8	7	23      28
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	2	4	1( $\leq 2$ )	10
	$A_2$	3	1	5	13
	Спрос	8	8	7	23      23
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	2	4	3	10
	$A_2$	3( $\geq 3$ )	1	5	14
	Спрос	8	8	8	24      24
5		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	2	4	8	10
	$A_2$	3	2	5	6
	Спрос	8	9	7	24      16
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	2	4	1	20
	$A_2$	3	5	2	8
	Спрос	8	8	7	23      28
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	2	4	1( $\leq 2$ )	10
	$A_2$	3	1	5	13
	Спрос	8	8	7	23      23
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	2	4	3	10
	$A_2$	3( $\geq 3$ )	1	5	14
	Спрос	8	8	8	24      24



№	Транспортные задачи варианта				
6		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	2	4	1	10
	$A_2$	3	2	5	6
	Спрос	8	9	7	24      16
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	2	4	1	20
	$A_2$	3	5	2	8
	Спрос	8	8	7	23      28
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	2	4	1( $\leq 2$ )	10
	$A_2$	1	1	5	13
	Спрос	8	8	7	23      23
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	1	4	3	10
	$A_2$	3( $\geq 3$ )	1	5	14
	Спрос	8	8	8	24      24
7		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	2	4	8	10
	$A_2$	3	2	5	6
	Спрос	8	5	7	22      16
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	2	4	1	20
	$A_2$	3	5	2	5
	Спрос	8	8	7	23      25
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	2	4	1	10
	$A_2$	3	1( $\leq 3$ )	5	13
	Спрос	8	8	7	23      23
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	2	4	3	10
	$A_2$	3( $\geq 3$ )	1	1	14
	Спрос	8	8	8	24      24

№	Транспортные задачи варианта				
8		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	2	4	8	10
	$A_2$	1	2	5	6
	Спрос	8	5	7	22 16
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	2	4	1	20
	$A_2$	3	1	2	5
	Спрос	8	8	7	23 25
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	2	4	1	10
	$A_2$	3	$1(\leq 3)$	2	13
	Спрос	8	8	7	23 23
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	2	4	1	10
	$A_2$	$3(\geq 3)$	1	1	14
	Спрос	8	8	8	24 24
9		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	2	4	8	12
	$A_2$	1	2	5	6
	Спрос	8	5	7	22 18
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	2	4	1	20
	$A_2$	3	1	2	5
	Спрос	7	8	7	22 25
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	2	4	1	10
	$A_2$	3	$1(\leq 3)$	2	12
	Спрос	7	8	7	22 22
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	2	4	1	10
	$A_2$	$3(\geq 3)$	1	7	8
	Спрос	5	5	8	18 18

№	Транспортные задачи варианта					
10		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение	
	$A_1$	2	4	8	12	
	$A_2$	1	2	5	6	
	Спрос	8	5	7	22	18
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение	
	$A_1$	2	4	5	20	
	$A_2$	3	1	2	5	
	Спрос	7	8	7	22	25
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение	
	$A_1$	2	4	1	10	
	$A_2$	3	$1(\leq 1)$	2	12	
	Спрос	7	8	7	22	22
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение	
	$A_1$	$2(\geq 1)$	4	1	10	
	$A_2$	3	1	1	8	
	Спрос	5	5	8	18	18
11		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение	
	$A_1$	2	4	8	12	
	$A_2$	1	2	5	7	
	Спрос	8	5	7	22	19
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение	
	$A_1$	2	4	1	18	
	$A_2$	3	1	2	5	
	Спрос	7	8	7	22	23
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение	
	$A_1$	2	4	1	10	
	$A_2$	3	$1(\leq 3)$	2	11	
	Спрос	7	7	7	22	21
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение	
	$A_1$	2	4	1	10	
	$A_2$	$3(\geq 3)$	1	1	5	
	Спрос	5	5	5	15	15

№	Транспортные задачи варианта				
12		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	2	4	8	12
	$A_2$	3	2	5	7
	Спрос	8	5	7	22      19
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	2	4	4	18
	$A_2$	3	1	2	5
	Спрос	7	8	7	22      23
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	2	4	1	10
	$A_2$	3	$2(\leq 3)$	2	11
	Спрос	7	7	7	22      21
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	2	4	1	10
	$A_2$	$6(\geq 3)$	1	1	5
	Спрос	5	5	5	15      15
13		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	2	1	8	12
	$A_2$	1	2	5	7
	Спрос	8	5	7	22      19
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	2	4	1	18
	$A_2$	1	1	2	5
	Спрос	7	8	7	22      23
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	2	6	1	10
	$A_2$	3	$1(\leq 3)$	2	11
	Спрос	7	7	7	22      21
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	2	4	1	10
	$A_2$	$3(\geq 5)$	2	1	5
	Спрос	5	5	5	15      15

№	Транспортные задачи варианта					
14		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение	
	$A_1$	1	4	8	12	
	$A_2$	1	2	5	7	
	Спрос	8	5	7	22	19
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение	
	$A_1$	2	4	4	18	
	$A_2$	3	1	2	5	
	Спрос	7	8	7	22	23
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение	
	$A_1$	2	4	1	10	
	$A_2$	1	$1(\leq 2)$	2	11	
	Спрос	7	7	7	22	21
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение	
	$A_1$	2	4	7	10	
	$A_2$	$3(\geq 3)$	1	1	5	
	Спрос	5	5	5	15	15
15		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение	
	$A_1$	2	4	8	12	
	$A_2$	1	3	5	7	
	Спрос	8	5	7	22	19
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение	
	$A_1$	2	4	1	18	
	$A_2$	3	2	2	5	
	Спрос	7	8	7	22	23
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение	
	$A_1$	2	4	1	10	
	$A_2$	2	$1(\leq 3)$	2	11	
	Спрос	7	7	7	22	21
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение	
	$A_1$	2	4	1	10	
	$A_2$	$3(\geq 3)$	2	1	5	
	Спрос	5	5	5	15	15

№	Транспортные задачи варианта					
16		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение	
	$A_1$	2	4	8	12	
	$A_2$	1	2	5	4	
	Спрос	8	5	7	22	16
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение	
	$A_1$	2	4	1	18	
	$A_2$	3	1	2	8	
	Спрос	7	8	7	22	26
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение	
	$A_1$	2	4	$1(\leq 4)$	10	
	$A_2$	3	1	2	11	
	Спрос	7	7	7	22	21
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение	
	$A_1$	$2(\geq 1)$	4	1	10	
	$A_2$	3	1	1	5	
	Спрос	5	5	5	15	15
17		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение	
	$A_1$	2	4	4	12	
	$A_2$	1	2	5	4	
	Спрос	8	5	7	22	16
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение	
	$A_1$	2	4	1	18	
	$A_2$	3	3	2	8	
	Спрос	7	8	7	22	26
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение	
	$A_1$	2	4	$1(\leq 4)$	10	
	$A_2$	1	1	2	11	
	Спрос	7	7	7	22	21
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение	
	$A_1$	$2(\geq 1)$	4	1	10	
	$A_2$	3	2	1	5	
	Спрос	5	5	5	15	15

№	Транспортные задачи варианта				
18		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	2	4	8	12
	$A_2$	1	2	2	4
	Спрос	8	5	7	22      16
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	2	4	1	18
	$A_2$	3	2	2	8
	Спрос	7	8	7	22      26
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	2	4	$1(\leq 4)$	10
	$A_2$	3	1	2	11
	Спрос	7	7	7	22      21
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	$2(\geq 1)$	2	1	10
	$A_2$	3	1	1	5
	Спрос	5	5	5	15      15
19		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	2	2	8	12
	$A_2$	1	2	5	4
	Спрос	8	5	7	22      16
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	2	3	1	18
	$A_2$	3	1	2	8
	Спрос	7	8	7	22      26
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	2	3	$1(\leq 4)$	10
	$A_2$	3	1	2	11
	Спрос	7	7	7	22      21
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	$2(\geq 1)$	2	1	10
	$A_2$	3	1	1	5
	Спрос	5	5	5	15      15

№	Транспортные задачи варианта				
20		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	2	4	8	12
	$A_2$	5	2	5	4
	Спрос	8	5	7	22      16
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	2	1	1	18
	$A_2$	3	1	2	8
	Спрос	7	8	7	22      26
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	2	4	$1(\leq 4)$	10
	$A_2$	1	1	2	11
	Спрос	7	7	7	22      21
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	$2(\geq 2)$	4	1	10
	$A_2$	3	1	1	5
	Спрос	5	5	5	15      15
21		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	2	4	8	12
	$A_2$	9	2	5	4
	Спрос	8	5	7	22      16
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	2	5	1	18
	$A_2$	3	1	2	8
	Спрос	7	8	7	22      26
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	2	2	$1(\leq 4)$	10
	$A_2$	3	1	2	11
	Спрос	7	7	7	22      21
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	$2(\geq 1)$	3	1	10
	$A_2$	3	1	1	5
	Спрос	5	5	5	15      15



№	Транспортные задачи варианта				
22		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	2	4	8	12
	$A_2$	1	2	5	4
	Спрос	8	5	7	22      16
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	1	4	1	18
	$A_2$	3	1	2	8
	Спрос	7	8	7	22      26
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	2	4	$1(\leq 2)$	10
	$A_2$	3	1	2	11
	Спрос	7	7	7	22      21
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	$2(\geq 1)$	4	1	10
	$A_2$	1	1	1	5
	Спрос	5	5	5	15      15
23		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	2	4	8	12
	$A_2$	1	1	5	4
	Спрос	8	5	7	22      16
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	2	2	1	18
	$A_2$	3	1	2	8
	Спрос	7	8	7	22      26
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	2	4	$1(\leq 4)$	10
	$A_2$	3	1	1	11
	Спрос	7	7	7	22      21
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	$2(\geq 1)$	4	1	10
	$A_2$	3	1	2	5
	Спрос	5	5	5	15      15

№	Транспортные задачи варианта				
24		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	2	4	2	12
	$A_2$	1	2	5	4
	Спрос	8	5	7	22 16
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	2	4	1	18
	$A_2$	1	1	2	8
	Спрос	7	8	7	22 26
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	2	4	$1(\leq 4)$	10
	$A_2$	3	3	2	11
	Спрос	7	7	7	22 21
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	$2(\geq 1)$	2	1	10
	$A_2$	3	1	1	5
	Спрос	5	5	5	15 15
25		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	2	4	8	12
	$A_2$	1	2	1	4
	Спрос	8	5	7	22 16
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	2	4	1	18
	$A_2$	3	5	2	8
	Спрос	7	8	7	22 26
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	2	4	$1(\leq 4)$	10
	$A_2$	3	4	2	11
	Спрос	7	7	7	22 21
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	Предложение
	$A_1$	$2(\geq 1)$	4	1	10
	$A_2$	3	1	4	5
	Спрос	5	5	5	15 15

## 5. Контрольные вопросы

1. Сформулировать математическую модель открытой транспортной задачи с избыточным спросом.
2. Каким образом транспортная задача с избыточным спросом приводится к стандартному виду?
3. Как интерпретируются поставки фиктивного поставщика?
4. Сформулировать математическую модель открытой транспортной задачи с избыточным предложением.
5. Каким образом транспортная задача с избыточным предложением приводится к стандартному виду?
6. Как интерпретируются поставки фиктивному потребителю?
7. Как приводится к стандартному виду транспортная задача с ограничением на транспортный поток снизу в одной из клеток таблицы транспортной задачи?
8. Как приводится к стандартному виду транспортная задача с ограничением на транспортный поток сверху в одной из клеток таблицы транспортной задачи?
9. Как перейти к решению основной задачи после решения вспомогательной задачи в случае транспортной задачи с ограничением на транспортный поток сверху?