МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра программной инженерии

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_______ О.Г. Локтионова
«__» _______ 2018 г.

НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ. МЕТОД МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА. ГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД

Методические указания к практическому занятию
по дисциплине «Методы оптимальных решений»
для студентов направления подготовки
38.03.01 «Экономика»

Курск 2018

УДК 519.6

Составители: В.В. Свиридов, Т.В. Алябьева

Рецензент:
кандидат технических наук, доцент кафедры программной инженерии ЮЗГУ *В.В. Апальков*

Нелинейное программирование. Метод множителей Лагранжа. Градиентный метод: методические указания к практическому занятию по дисциплине «Методы оптимальных решений» для студентов направления подготовки 38.03.01 «Экономика» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: В.В. Свиридов, Т.В. Алябьева. Курск, 2018. 11 с.

Изложены основные сведения о использовании метода Лагранжа и градиентного метода для решения задач условной нелинейной оптимизации. Рассмотрены примеры выполнения заданий. Приведены варианты заданий, контрольные вопросы к защите практической работы.

Методические указания соответствуют требованиям рабочей программы по дисциплине «Методы оптимальных решений».
Материал предназначен для студентов 38.03.01 «Экономика» очной и заочной форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 02.10.2018.. Формат 60 х 84 1/16.
Усл. печ. л.0,5. Уч.- изд. л.0,4. Тираж 100 экз. Заказ 2143. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Содержание

НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ. МЕТОД МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА. ГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД.

1. Цель занятия

Целью практического занятия является получение навыков использования метода Лагранжа и градиентного метода для решения задач условной нелинейной оптимизации.

Задание. Данную нелинейную задачу условной оптимизации решить градиентным методом Якоби и методом Лагранжа.

2. Краткие теоретические сведения

Классической задачей математического программирования называется задача отыскания экстремума целевой функции $f\left(x_1, ..., x_n\right)$ нескольких переменных при наложении дополнительных $m < n$ ограничениях, имеющая вид:

$$\begin{cases} f\left(x_1, ..., x_n\right) \to \max(\min), x \in R^n; \\ \qquad\qquad g(x) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $g\left(x\right) = \begin{pmatrix} g_1\left(x\right) \\ \vdots \\ g_m\left(x\right) \end{pmatrix}$ – вектор функций ограничений в виде равенств.

В этом случае допустимым множеством задачи является множество $X = \left\{x \mid g\left(x\right) = 0\right\}$.

При решении задачи (1) используется метод Лагранжа (французский математик 19 века). При этом мы формируем функцию Лагранжа вида $L\left(x,\lambda\right) = f\left(x\right) - \lambda^T g\left(x\right), x \in R^n, \lambda \in R^m$.

Компоненты вектора λ называются множителями Лагранжа.

Далее мы используем необходимые условия экстремума в виде:

$\nabla L\left(x,\lambda\right) = \nabla f(x) - \lambda^T \nabla g(x) = 0;$

$g(x) = 0;$

Необходимые условия позволяют найти все точки локального экстремума. Из них мы выбираем необходимые нам точки глобального максимума и минимума.

Поверхность $g(x) = 0$, на которой мы ищем экстремум, должна удовлетворять условию регулярности, которое выражается равенством

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial g_m}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = m,$$ то есть градиенты функций $g_i(x), i=1,\dots,m$, входящих в ограничения задачи, должны быть *линейно независимы*.

Схема отыскания условного локального экстремума методом Якоби.

1. Проверяется выполнение условия Якоби:
   $\operatorname{rank}\left(g'(x)\right) = m,\ \forall x \in X = \{x \mid g(x) = 0\}$,

   где $g'(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial g_m}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$;

   Для этого вычисляются миноры порядка m матрицы $g'(x)$. Если для каждой точки $x \in X$ хотя бы один минор данного вида отличен от 0, то условие Якоби выполняется. Если в какой-то точке $x_0 \in X$ все миноры порядка m равны 0, то в этой точке условие Якоби не выполняется, и она должна быть рассмотрена особо. Если условие Якоби не выполняется ни в одной точке, то необходимо пересмотреть формулировку ограничений задачи.
2. Составляется функция Лагранжа

$$L(x,\lambda) = f(x) - \lambda^T g(x) = f(x_1,\dots,x_n) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x_1,\dots,x_n)$$

3. Выписываются необходимые условия первого порядка $L'_{(x,\lambda)}(x_0, \lambda_0) = 0^T$, или в координатной записи $L'_{x_1} = 0,\dots, L'_{x_n} = 0, L'_{\lambda_1} = 0,\dots, L'_{\lambda_m} = 0.$ Тем самым находятся стационарные точки, подозрительные на условный экстремум и значения множителей Лагранжа для каждой такой точки.
4. Строится окаймленная матрица Гессе вида:

$$\widehat{H}(x,\lambda)=\begin{pmatrix} 0 & P \\ P^T & H_{x,x}(x,\lambda) \end{pmatrix}_{m+n,m+n},$$

где $P=\begin{pmatrix} \nabla g_1(x,\lambda) \\ \vdots \\ \nabla g_m(x,\lambda) \end{pmatrix}_{m,n}$ – матрица, строками которой являются градиенты функций – ограничений.

Пусть имеется стационарная точка (x_0,λ_0) функции Лагранжа $L(x,\lambda)$ и окаймленная матрица $\widehat{H}(x,\lambda)$ вычислена в точке (x_0,λ_0). Точка x_0 является:

А). Точкой максимума, если начиная с углового минора порядка $2m+1$ последующие $n-m$ угловых миноров матрицы $\widehat{H}(x_0,\lambda_0)$, умноженные на $(-1)^m$, знакочередуются, начиная с отрицательного знака.

Б) Точкой минимума, если начиная с углового минора порядка $2m+1$ последующие $n-m$ угловых миноров матрицы $\widehat{H}(x_0,\lambda_0)$, умноженные на $(-1)^m$, знакоположительны.

В остальных случаях требуется дополнительное исследование.

Метод приведенного градиента Якоби основан на формировании приведенного Гессиана функции Лагранжа $H_Z=Z^T\nabla^2_{xx}L\cdot Z$ в точке (x_0,λ_0), подозрительной на экстремум. Здесь $Z_{n,n-m}$ – матрица составленная из любых $n-m$ базисных векторов пространства решений однородной системы $Pv=0$, а $\nabla^2_{xx}L=\left(\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}\right)\Big|_{(x_0,\lambda_0)}$ – матрица Гессе функции Лагранжа в критической точке.

Если матрица H_Z положительно определена, то есть ее диагональные миноры положительны, то критическая точка (x_0,λ_0) является точкой минимума.

Если матрица H_Z отрицательно определена, то есть диагональные миноры знакочередуются, начиная с отрицательного, то критическая точка – точка максимума.

В остальных случаях требуется дополнительное исследование.

Критические точки находим из условия $Z^T \nabla f(x) = 0$, где $Z^T \nabla f(x)$ – приведенный градиент Якоби, но для нахождения критических точек удобнее использовать функцию Лагранжа $L(x, \lambda)$.

3. Пример выполнения задания

Методом Лагранжа найти точки условного экстремума и экстремальные значения функции $z = 2x - y$ при условии $2x^2 + y^2 = 1$.

Решение.

Имеем $g(x, y) = 2x^2 + y^2 - 1$.

1. Проверим выполнение условия Якоби: $\nabla\left(2x^2 + y^2 - 1\right) = (4x, 2y) = 0 \Rightarrow x = y = 0$, что невозможно, так как в этой точке не выполняется условие $2x^2 + y^2 = 1$.

Условие Якоби выполняется во всех точках допустимой области.

2. Выписываем функцию Лагранжа:

$$L(x, \lambda) = 2x - y - \lambda\left(2x^2 + y^2 - 1\right).$$

3. Находим частные производные функции Лагранжа по всем переменным и приравниваем их к 0, находим точки, подозрительные на экстремум:

$$\begin{cases} L'_x = 2 - 4x\lambda = 0; \\ L'_y = -1 - 2y\lambda = 0; \\ L'_\lambda = 1 - 2x^2 - y^2 = 0; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2\lambda}; \\ y = -\dfrac{1}{2\lambda} \\ 1 = \dfrac{3}{4\lambda^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, M_1\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ \lambda_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, M_2\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \end{matrix}$$

– две критические точки подозрительные на экстремум.

Исследуем найденные критические точки на максимум-минимум.

4. Выписываем матрицу Гессе :

$$H = \begin{pmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{xy} & L''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\lambda & 0 \\ 0 & -2\lambda \end{pmatrix};$$

$$g'(x,y,\lambda)=\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,\lambda)\quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,\lambda)\right)=(4x\quad 2y).$$

$$\hat{H}=\begin{pmatrix} 0 & g'(x,y,\lambda) \\ g'(x,y,\lambda)^T & H(x,y,\lambda)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 4x & 2y \\ 4x & -4\lambda & 0 \\ 2y & 0 & -2\lambda\end{pmatrix};$$

5. Вычисляем детерминанты в соответствии с параметрами задачи, имеем:

$m=1,\ 2m+1=3$, то есть нам необходим минор третьего порядка.

$$(-1)^m\Delta_3=-\left(16\lambda y^2+32\lambda x^2\right)=-16\lambda\left(y^2+2x^2\right)=$$

$$=-16\lambda\left(\frac{1}{4\lambda^2}+\frac{2}{4\lambda^2}\right)=-6\lambda\frac{3}{4\lambda^2}=-\frac{9}{2\lambda}$$

Рассмотрим первое значение $\lambda_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Тогда $(-1)^m\Delta_3=-3\sqrt{3}$. Это значение отрицательно, поэтому мы имеем ситуацию А) теоремы, что означает, что найденная точка $M_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ является точкой максимума.

Рассмотрим первое значение $\lambda_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Тогда $(-1)^m\Delta_3=3\sqrt{3}$. Это значение положительно, поэтому мы имеем ситуацию Б) теоремы, что означает, что найденная точка $M_2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ является точкой минимума.

Применим метод приведенного градиента для определения характера найденных критических точек. Рассмотрим точку $M_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, найденную, как и ранее, из необходимых условий экстремума. В данной точке имеем $P=\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,\lambda)\quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,\lambda)\right)=(4x\quad 2y)=\left(4/\sqrt{3}\quad -2/\sqrt{3}\right)$.

Рассмотрим уравнение $Pv=P\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2\end{pmatrix}=0$. Так как $\operatorname{rg}(P)=1$, то размерность пространства решений уравнения $Pv=0$ равна

$n-\operatorname{rg}(P)=2-1=1$, то есть достаточно найти один такой базисный вектор.

Имеем однородную систему

$$Pv=P\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4/\sqrt{3} & -2/\sqrt{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=0,$$

$$2v_1-v_2=0;$$

Возьмем $v_1=1\Rightarrow v_2=2\rightarrow \bar{v}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

Таким образом, $Z=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. Имеем Гессиан функции Лагранжа

$$H=\begin{pmatrix}L''_{xx} & L''_{xy}\\ L''_{xy} & L''_{yy}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\lambda & 0\\ 0 & -2\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\sqrt{3} & 0\\ 0 & -\sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

Находим приведенный Гессиан

$$H_Z=Z^T\nabla^2_{xx}LZ=(1,\,2)\cdot\begin{pmatrix}-2\sqrt{3} & 0\\ 0 & -\sqrt{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\left(-2\sqrt{3},\,-2\sqrt{3}\right)\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=$$

$$=-6\sqrt{3}<0$$

Приведенный Гессиан отрицательно определен в критической точке, следовательно данная критическая точка – точка локального максимума.

Рассмотрим точку $M_2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\lambda_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. В данной точке имеем $P=\begin{pmatrix}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,\lambda) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,\lambda)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4x & 2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4/\sqrt{3} & 2/\sqrt{3}\end{pmatrix}$.

Рассмотрим уравнение $Pv=P\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=0$. Так как $\operatorname{rg}(P)=1$, то размерность пространства решений уравнения $Pv=0$ равна $n-\operatorname{rg}(P)=2-1=1$, т.е. достаточно найти один такой базисный вектор. Имеем однородную систему

$$Pv=P\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4/\sqrt{3} & 2/\sqrt{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=0,$$

$$-2v_1+v_2=0;$$

Возьмем $v_1 = 1 \Rightarrow v_2 = 2 \to \bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Таким образом, $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Имеем Гессиан функции Лагранжа

$$H = \begin{pmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{xy} & L''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\lambda & 0 \\ 0 & -2\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Находим приведенный Гессиан

$$H_Z = Z^T \nabla^2_{xx} L Z = (1,2) \cdot \begin{pmatrix} 2\cdot\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \left(2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= 6\sqrt{3} > 0$$

Приведенный Гессиан положительно определен в критической точке, следовательно, данная критическая точка – точка локального максимума.

4. Индивидуальные задания

№	Условие	№	Условие
1	$z = 2x + y \to \max$, $x^2 + y^2 = 1$.	2	$z = 2xy \to \max$, $x^2 + y^2 = 1$.
3	$z = 2xy \to \max$, $x^2 + 2y^2 = 1$.	4	$z = 2y \to \max$, $x^2 + 2y^2 = 1$.
5	$z = 2x \to \max$, $x^2 + 2y^2 = 1$	6	$z = 2x - y \to \max$, $x^2 + y^2 = 1$
7	$z = 2x - y \to \max$, $2x^2 + y^2 = 1$	8	$z = 3x - y \to \max$, $2x^2 + y^2 = 1$
9	$z = 3x + y \to \max$, $2x^2 + y^2 = 1$	10	$z = 3x + y \to \max$, $2x^2 + y^2 = 2$
11	$z = 3x + 2y \to \max$, $2x^2 + y^2 = 2$	12	$z = 3x + 2y \to \max$ $2x^2 + y^2 = 1$
13	$z = 3x^2 + 2y^2 \to \min$, $2x + y = 2$	14	$z = 3x^2 + 2y^2 \to \min$, $2x + y = 4$
15	$z = x^2 + 2y^2 \to \min$, $2x + y = 4$	16	$z = x^2 + 2y^2 \to \min$, $2x + y = 2$
17	$z = x^2 + 2y^2 \to \min$, $2x + y = 5$	18	$z = x^2 + 2y^2 \to \min$, $2x + y = 6$

№	Условие	№	Условие
19	$z = x^2 + y^2 \to \min$, $2x + y = 2$	20	$z = x^2 + y^2 \to \min$, $4x + y = 2$
21	$z = x^2 + y^2 \to \min$, $4x + y = 8$	22	$z = x^2 + 3y^2 \to \min$, $4x + y = 8$
23	$z = x^2 + y^2 \to \min$, $4x + y = 10$	24	$z = x^2 + 2y^2 \to \min$, $4x + y = 10$
25	$z = x^2 + y^2 \to \min$, $2x + y = 10$	26	$z = x^2 + y^2 \to \min$, $2x + y = 9$

5. Контрольные вопросы

1. Как записывается нелинейная оптимизационная задача с ограничениями равенствами?
2. Какой вид имеет функция Лагранжа?
3. Какой вид имеют необходимые условия экстремума?
4. Что такое окаймленный Гессиан? Сформулировать теорему о достаточных условиях экстремума с использованием окаймленного гессиана.
5. Что такое приведенный Гессиан? Сформулировать теорему о достаточных условиях экстремума с помощью приведенного Гессиана.