МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра программной инженерии

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_______ О.Г. Локтионова
«___» _______ 2018 г.

МЕТОД ПОТЕНЦИАЛОВ

Методические указания к практическому занятию
по дисциплине «Методы оптимальных решений»
для студентов направления подготовки
38.03.01 «Экономика»

Курск 2018

УДК 519.6

Составители: В.В. Свиридов, Т.В. Алябьева

Рецензент:
кандидат технических наук, доцент кафедры программной инженерии
ЮЗГУ *В.В. Апальков*

Метод потенциалов: методические указания к практическому занятию по дисциплине «Методы оптимальных решений» для студентов направления подготовки 38.03.01 «Экономика» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: В.В. Свиридов, Т.В. Алябьева. Курск, 2018. 20 с.

Изложены основные сведения о методе потенциалов для решения сбалансированных транспортных задач. Рассмотрены примеры выполнения заданий. Приведены варианты заданий, контрольные вопросы к защите практической работы.

Методические указания соответствуют требованиям рабочей программы по дисциплине «Методы оптимальных решений».
Материал предназначен для студентов 38.03.01 «Экономика» очной и заочной форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 02.10.2018.. Формат 60 x 84 1/16.
Усл. печ. л.1,0. Уч.- изд. л.0,9. Тираж 100 экз. Заказ 2136. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Содержание

МЕТОД ПОТЕНЦИАЛОВ

1. Цель занятия

Целью практического занятия является получение навыков решения сбалансированных транспортных задач методом потенциалов.

Задание. Сбалансированная транспортная задача задана в табличной форме. Найти начальное решение методом наименьшего значения и северо-западного угла и в обоих случаях довести начальное решение до оптимального методом потенциалов.

2. Краткие теоретические сведения

Пусть имеется m складов $A_1,...,A_m$, на которых имеется запасы однородной продукции в количествах $a_i \left(i=\overline{1,m}\right)$, n пунктов потребления (розничных магазинов) $B_1,...,B_n$ с величиной спроса $b_j \left(j=\overline{1,n}\right)$, причем имеет место равенство $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$, то есть суммарный запас равен суммарному спросу, такая транспортная задача называется сбалансированной. Дана также матрица $C=\left(c_{i,j}\right), i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$ удельных транспортных расходов, где $c_{i,j}$ – стоимость доставки одной единицы продукции от i-го поставщика j-му потребителю.

Требуется найти план перевозок $X=\left(x_{i,j}\right), i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$, где $x_{i,j}$ – объем поставок продукции от i-го поставщика j-му потребителю, при котором запасы всех поставщиков вывозятся, то есть $a_i=\sum\limits_{j=1}^{n} x_{i,j}, i=\overline{1,m}$, спрос всех потребителей удовлетворен, то есть $b_j=\sum\limits_{i=1}^{m} x_{i,j},\ j=\overline{1,n}$, и суммарные транспортные расходы являются минимально возможными, то есть :

$$z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} \to \min\ , \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = a_i,\ i = \overline{1,m}, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i,j} = b_j,\ j = \overline{1,n}, \tag{3}$$

$$x_{i,j} \ge 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}. \tag{4}$$

Таблицей транспортной задачи называется множество ячеек вида $T = \{(i, j)\},\ i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n$, где i-номер строки таблицы, j-номер столбца.

Две ячейки *связаны*, если они расположены в одной строке или одном столбце.

Циклом называется набор ячеек, который можно пройти последовательно переходя от ячейки к связанной с ней и вернуться в исходную ячейку, и в котором в каждой строке и столбце таблицы содержит не более двух клеток (две или ноль клеток). Цикл всегда содержит *четное* число ячеек.

Пример 1.

Типовые циклы на 4,6 ячеек:

I j	1	2	3	4
1				
2				
3				

$C_1 = \{(1,1),(1,3),(3,3),(3,1)\}$

I j	1	2	3	4
1				
2				
3				

$C_2 = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,3),(3,1)\}$.

I j	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					

$C_3 = \{(1,1),(1,2),(4,2),(4,4),(4,3),(2,3),(3,3),(3,1)\}$

Базисом B транспортной задачи называется любой ациклический, то есть не содержащий циклов набор $m+n$ клеток таблицы этой задачи.

Такому набору однозначно соответствует дерево (то есть связный ациклический подграф) в двудольном полном графе поставщики-потребители.

Пример 2.

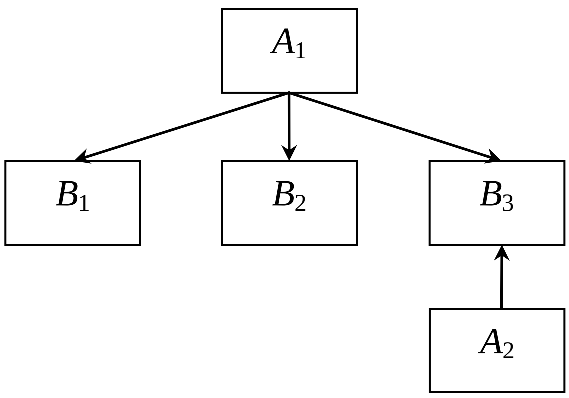
Базис транспортной задачи и соответствующее дерево в двудольном графе транспортной задачи.

Постав. Потреб.	B_1	B_2	B_3
A_1			
A_2			

$B=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,3)\}$

$|B|=m+n-1=2+3-1=4.$

Дерево базиса:



Базисному решению $X(B)$ транспортной задачи соответствует такая матрица плана $X=(x_{i,j})_{i=1,\dots,m,\, j=1,\dots,n}$, что выполняются ограничения по поставкам $\sum_{j=1}^{n} x_{i,j}=a_i$, $i=\overline{1,m}$, $\sum_{i=1}^{m} x_{i,j}=b_j$, $j=\overline{1,n}$, причем значения поставок для небазисных клеток равны 0, то есть $x_{i,j}=0, (i,j)\notin B$. Базисное решение всегда существует и по базису определяется однозначно.

Базис B называется допустимым, если соответствующее базисное решение $X(B)$ неотрицательно (то есть. имеет экономический смысл) $X(B) \geq 0$.

Теорема 1. Оптимальное решение сбалансированной транспортной задачи всегда достигается на некотором базисе транспортной задачи, соответствующий базис называется оптимальным, то есть $X_{\text{opt}} = X(B_{\text{opt}})$.

Пусть имеется некоторый допустимый базис B транспортной задачи. Потенциалы вершин двудольного графа транспортной задачи – это функции $u:\{A_i, i = 1,..,m\} \to R$, $v:\{B_j, j = 1,..,n\} \to R$, определенные на множестве поставщиков и потребителей или, что эквивалентно, на строках и столбцах таблицы транспортной задачи, обладающие свойствами:

$u_i + v_j = c_{i,j}, (i, j) \in B;$

$u_1 = 0,$

где $u_i = u(A_i), i = 1,..., m,\ v_j = v(B_j),\ j = 1,..., n.$

Примечание. На практике возможна нормировка потенциалов также по условию $v_1 = 0$.

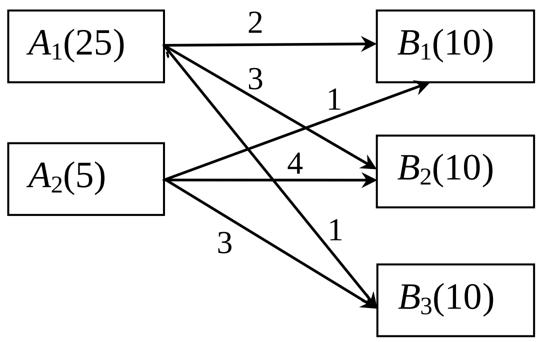
Теорема 2. Потенциалы вершин двудольного графа транспортной задачи существуют и определяются однозначно.

Пример 3. Дана транспортная задача и ее базис (ячейки базиса выделены цветом). Найти потенциалы вершин.

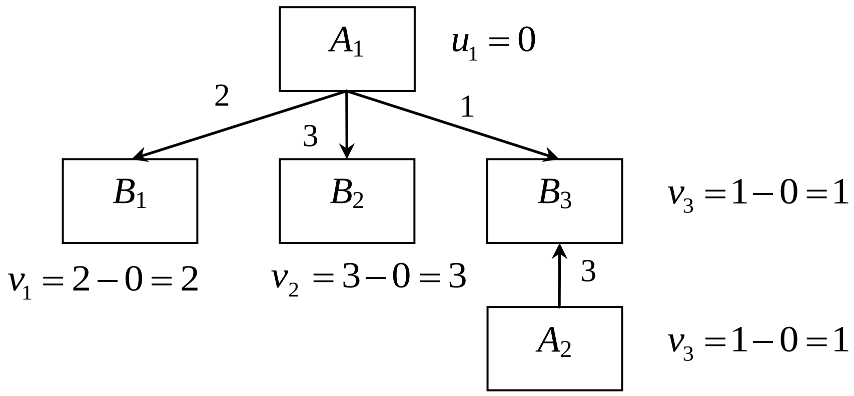
Постав. Потреб.	B_1	B_2	B_3	Предложение
A_1	2	3	1	25
A_2	1	4	3	5
Спрос	10	10	10	

Решение.

Данная транспортная задача характеризуется следующим двудольным графом:



Используем дерево базиса.



Итак, при нахождении потенциалов вершин используем дерево базиса. Для корневой вершины всегда имеем по определению $u_1 = u(A_1) = 0$, далее вычисляем потенциалы вершин по слоям сверху-вниз.

Теорема 3. Пусть B – базис транспортной задачи и $(i, j) \in T \setminus B$ – небазисная клетка. В множестве $B \cup \{(i, j)\}$ существует один и только один цикл, то есть добавление любой небазисной клетки (i, j) замыкает в базисе B один и только один цикл $C(B, i, j)$.

Пример 4.

Для базиса $B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,3)\}$ транспортной задачи из предыдущего примера и небазисной клетки $(2, 2)$ построить индуцированный цикл $C(B, 2, 2)$.

Решение.

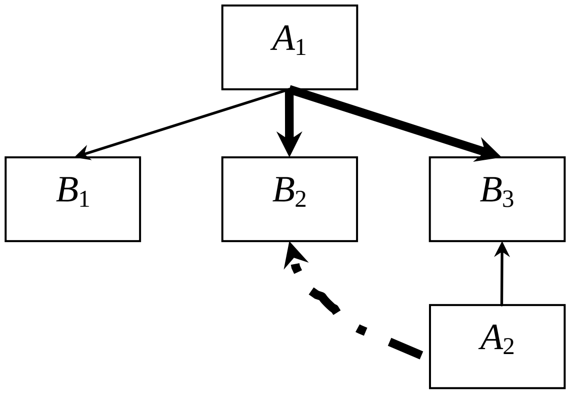
Так как такой цикл всегда существует и определяется однозначно, его легко построить по таблице:

Пост. Потреб.	B_1	B_2	B_3
A_1	2	3	1
A_2	1	4	3

Таким образом, $C(B,2,2) = \{(2,2),(2,3),(1,3),(1,2)\}$.

Важно отметить, что индуцированный цикл всегда записывается, начиная *от добавляемой к базису небазисной клетки* и далее клетки выписываются однозначно обходом цикла *против часовой стрелки*.

На дереве базиса построение индуцированного цикла по добавляемому ребру показано на следующей диаграмме:



Определение. Пусть B – допустимый базис транспортной задачи и $(i,j)\in T\setminus B$ – любая небазисная клетка. Однозначно определен допустимый базис $B' = B\cup\{(i,j)\}\setminus\{(i',j')\} = B'(B,i,j)$, называемый смежным к B и получаемый из текущего базиса B добавлением выбранной небазисной клетки (i,j) и удалением одной, однозначно определяемой базисной клетки (i',j'), которая определяется по следующим правилам:

Пусть $C(B,i,j)$ – индуцируемый цикл, порождаемый небазисной клеткой (i,j). Вдоль данного цикла производится допустимое перераспределение транспортных поставок по закону $x'(e) = x(e) + \Delta x(e),\ e\in C(B,i,j)$. Величины коррекции $\Delta x(e) = \pm\theta,\ e\in C(B,i,j)$ равны одной и той же величине $\theta = \theta(B,i,j) = \min\limits_{\Delta x(e)<0,\ e\in C(B,i,j)} x(e)$, которая выбирается попеременно со знаком плюс и минус для клеток вдоль индуцированного цикла.

Причем для исходной небазисной клетки $\Delta x((i,\ j)) = \theta > 0$, то есть в добавляемой небазисной клетке транспортный поток увеличиваем на величину θ, в следующей по циклу клетке уменьшаем на θ и так далее

Величина коррекции θ выбирается максимально большей по величине так, чтобы скорректированное решение было неотрицательным как наименьший транспортный поток по тем клеткам корректировочного цикла, где величина θ вычитается. Это те и только те клетки корректировочного цикла, которые отстоят от добавляемой небазисной клетки на *нечетное* число позиций по циклу.

При указанной коррекции одна или несколько клеток $e \in C(B, i,\ j)$ получают нулевое значение транспортного потока $x'(e) = 0$.

Если такая клетка единственна, то она и выбирается в качестве $(i',\ j')$ клетки, удаляемой из базиса.

Если обнуление транспортного потока произошло на нескольких клетках корректировочного цикла $C(B, i,\ j)$, то в качестве $(i',\ j')$ выбирается клетка с наибольшим ценовым коэффициентом $C_{i,j}$ если и таких несколько, то из базиса удаляется та, которая лексиографически по $(i,\ j)$ минимальна.

Пример 5.

Дана транспортная задача и базис в ней показан выделением.

Постав. Потреб.	B_1	B_2	B_3	Предложение
A_1	2 10	3 10	1 5	25
A_2	1	4	3 5	5
Спрос	10	10	10	30 30

В соответствие с базисом имеем однозначно определяемый план поставок $X = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

В базис добавляется клетка (2, 1). Найти смежный базис, который получается после добавления указанной клетки.

Решение.

Строим корректировочный цикл и выполняем корректировку поставок вдоль этого цикла.

Пост. Потреб.	B_1	B_2	B_3	Предложение
A_1	2 $10-\theta$	3 10	1 $5+\theta$	25
A_2	1 $+\theta$	4	3 $5-\theta$	5
Спрос	10	10	10	30 30

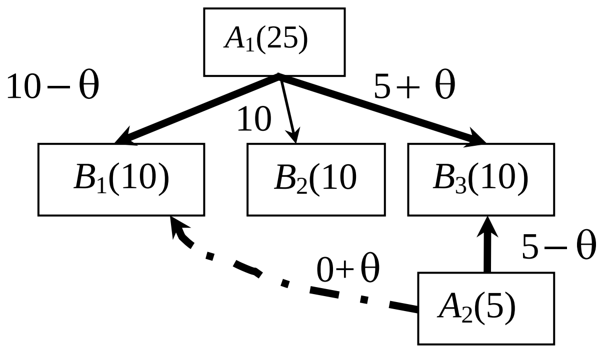
$\theta = \min\{5,10\} = 5.$

Новый план поставок $X = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, клетка $(2,3)$ уходит из базиса.

Получаем базис:

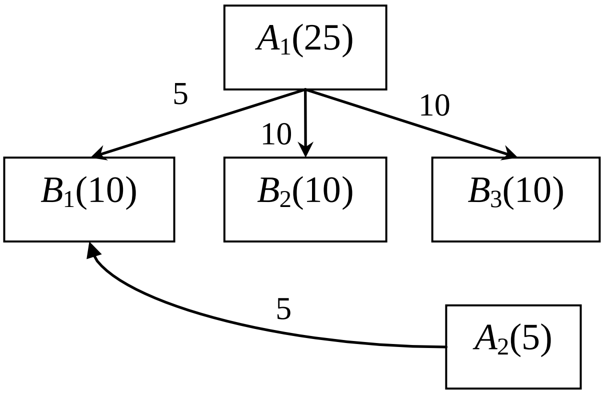
Постав. Потреб.	B_1	B_2	B_3	Предложение
A_1	2 5	3 10	1 10	25
A_2	1 5	4	3	5
Спрос	10	10	10	30 30

На дереве базиса перераспределение поставок показывается следующим образом:



$\theta = \min\{5,10\} = 5$

Получаем новый базис:



Определение. Пусть B – некоторый допустимый базис транспортной задачи и $u_i, i=1,...,m,\ v_j,\ \ j=1,...,n$ – однозначно определяемые потенциалы строк и столбцов таблицы транспортной задачи. Относительными оценками $d_{i,j}, (i, j) \in T \setminus B$ небазисных клеток транспортной задачи называются числа $d_{i,j} = c_{i,j} - u_i - v_j$.

Теорема 4. Пусть B – базис транспортной задачи и $(i, j) \in T \setminus B$ – небазисная клетка. Цена смежного базиса $B' = B'(B, i, j)$ находится по формуле $z(B') = z(B) + d_{i,j}\theta(B, i, j)$. Если для всех небазисных клеток $(i, j) \in T \setminus B$ относительные оценки неотрицательны: $d_{i,j} \geq 0$, то текущий базис B будет оптимальным, так как для всех смежных базисов B' будем иметь $z(B') \geq z(B)$.

На основе этой теорем вы находим алгоритм решения транспортной задачи методом потенциалов.

1) Находим начальный допустимый базис B одним из возможных методов, таких как метод северо-западного угла или метод наименьшего значения.

2) Если относительные оценки небазисных клеток относительно данного базиса неотрицательны, то есть. $d_{i,j} \geq 0, (i, j) \in T \setminus B$, то текущий базис является оптимальным, расчет закончен: $B_{\text{opt}} = B$;

3) В противном случае находим клетку с наибольшей по модулю отрицательной относительной оценкой $(i_0, j_0) = \underset{(i,j)\in T\setminus B, d_{i,j}<0}{\arg\min}\ d_{i,j}$. Если таких клеток несколько, то выбирается лексиографически младшая.

4) Строим смежный базис $B' = B'(B, i_0, j_0)$, заменяем текущий базис на построенный $B = B'$ и переходим к пункту 2.

3. Примеры выполнения задания

Пример 1. Решить транспортную задачу. Начальное решение является сразу оптимальным.

	$B_1 = 160$	$B_2 = 180$	$B_3 = 210$	$B_4 = 230$
$A_1 = 140$	8	5	7	6
$A_2 = 170$	5	4	6	5
$A_3 = 230$	3	2	5	6
$A_4 = 240$	4	7	3	2

Находим начальный опорный план методом минимальных затрат.

Выделением показаны ячейки начального опорного плана.

	$B_1 = 160$	$B_2 = 180$	$B_3 = 210$	$B_4 = 230$
$A_1 = 140$	8	5	140 7	6
$A_2 = 170$	110 5	4	60 6	5
$A_3 = 230$	50 3	180 2	5	6
$A_4 = 240$	4	7	10 3	230 2

Цена начального плана составляет

$140 \cdot 7 + 110 \cdot 5 + 60 \cdot 6 + 50 \cdot 3 + 180 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 230 \cdot 2 = 2890.$

Оптимизируем начальный опорный план методом потенциалов.

	$B_1 = 160$ $v_1 = 6$	$B_2 = 180$ $v_2 = 5$	$B_3 = 210$ $v_3 = 7$	$B_4 = 230$ $v_4 = 6$
$A_1 = 140$ $u_1 = 0$	2 8	0 5	140 7	0 6
$A_2 = 170$ $u_2 = -1$	110 5	0 4	60 6	0 5
$A_3 = 230$ $u_3 = -3$	50 3	180 2	1 5	3 6
$A_4 = 240$ $u_4 = -4$	2 4	6 7	10 3	230 2

Примечание. Базисная клетка имеет вид

$x_{i,j}$ $c_{i,j}$	

Небазисная клетка – вид

$d_{i,j}$ $c_{i,j}$

Система уравнений для базисных клеток:

$u_1 = 0$ – по определению;

$u_1 + v_3 = 7$ – уравнение для базисной клетки $\rightarrow v_3 = 7 - u_1 = 7$;

$u_2 + v_3 = 6$ –уравнение для базисной клетки $\rightarrow u_2 = 6 - v_3 = -1$;

$u_2 + v_1 = 5$ – уравнение для базисной клетки → $v_1 = 5 - u_2 = 6$;
$u_3 + v_1 = 3$ – уравнение для базисной клетки → $u_3 = 3 - v_1 = -3$;
$u_3 + v_2 = 2$ – уравнение для базисной клетки → $v_2 = 2 - u_3 = 5$;
$u_4 + v_3 = 3$ – уравнение для базисной клетки → $u_4 = 3 - v_3 = -4$;
$u_4 + v_4 = 2$ – уравнение для базисной клетки → $v_4 = 2 - u_4 = 6$.

Находим относительные оценки небазисных клеток:

$d_{11} = c_{11} - (u_1 + v_1) = 8 - (6 + 0) = 2$;
$d_{12} = c_{12} - (u_1 + v_2) = 5-(0 + 5) = 0$;
$d_{13} = c_{31} - (u_1 + v_3) = 6 - (6 - 0) =0$;
$d_{14} = c_{14} - (u_1 + v_4) = 6 - (0 + 6) =0$;
$d_{22} = c_{22} - u_2 + v_2) = 4 - (-1 + 5) = 0$;
$d_{24} = c_{24} - (u_2 + v_4) = 5 - (-1+6) = 0$;
$d_{33} = c_{33} - (u_3 + \mathrm{v}_3) = 5 - (-3+7) = 1$;
$d_{34} = c_{34} - (u_3 + v_4) = 6 - (-3+6) = 3$;
$d_{41} = c_{41} - (u_4 + v_1) = 4 - (-4+6) = 2$;
$d_{42} =c_{42} - (u4 + v_2) = 7 - (-4+5) = 6$;

Относительные оценки всех небазисных клеток получились неотрицательны.

Найдено оптимальное решение транспортной задачи, которое характеризуется следующим опорным планом:

то есть $A1$ поставляет 140 – $B3$,
$A2$ поставляет 110 – $B1$, 60 – $B3$;
$A3$ поставляет 50 – $B1$, 180 – $B2$;
$A4$ поставляет 10 – $B3$, 230 – $B4$.

Минимальные транспортные расходы составляют:
$z = 140\cdot7 + 110\cdot5 + 60\cdot6 + 50\cdot3 + 180\cdot2 + 10\cdot3 + 230\cdot2 = 2890$.

Пример 2. Решить ту же задачу, найдя начальный оптимальный план методом северо-западного угла.

Решение.

Найдем начальный опорный план методом северо-западного угла.

	$B_1 = 160$	$B_2 = 180$	$B_3 = 210$	$B_4 = 230$
$A_1 = 140$	140 8	5	7	6
$A_2 = 170$	20 5	150 4	6	5
$A_3 = 230$	3	30 2	200 5	6
$A_4 = 240$	4	7	10 3	230 2

Его цена составляет:

$z_1 = 140{\cdot}8+20{\cdot}5+150{\cdot}4+30{\cdot}2+200{\cdot}5+10{\cdot}3+230{\cdot}2 = 3370.$

Найдем потенциалы и относительные оценки небазисных клеток

	$B_1 = 160$ $v_1 = 8$	$B_2 = 80$ $v_2 = 7$	$B_3 = 210$ $v_3 = 10$	$B_4 = 230$ $v_4 = 9$
$A_1 = 140$ $u_1 = 0$	140 8	–2 5	–3 7	–3 6
$A_2 = 170$ $u_2 = –3$	20 5	150 4	–1 6	–1 5
А3=230 $u_3 = –5$	0 3	30 2	200 5	2 6
А4 = 240 $u_4 = –7$	3 4	7 7	10 3	230 2

Выбираем клетку с наибольшей по модулю относительной отрицательной оценкой, это будет клетка (1, 3) для которой d_{13} = –3.Включаем клетку (1, 3) в базис методом корректировочного цикла.

	B1= 160 v1=8	B2=180 v2=7	B3=210 v3=10	B4=230 v4=9
A1=140 u1=0	- 140 8	-2 5	+ -3 7	-3 6
A2=170 u2=-3	+ 20 5	- 150 4	-1 6	-1 5
A3=230 u3=-5	0 3	+ 30 2	- 200 5	2 6
A4=240 u4=-7	3 4	7 7	10 3	230 2

Величина корректировки составляет q = min(140, 150, 200) = 140.

При этом клетка (1, 1) уходит из базиса, а клетка (1, 3) включается в базис. Изменение расходов составит:

Получаем новый опорный план:

	$B_1 = 160$	$B_2 = 180$	$B_3 = 210$	$B_4 = 230$
$A_1 = 140$	8	5	140 7	6
$A_2 = 170$	160 5	10 4	6	5
$A_3 = 230$	3	170 2	60 5	6
$A_4 = 240$	4	7	10 3	230 2

Снова применяем метод потенциалов:

	$B_1 = 160$ 5	$B_2 = 180$ 4	$B_3 = 210$ 7	$B_4 = 230$ 6
$A_1 = 140$ 0	3 8	1 5	140 7	0 6
$A_2 = 170$ 0	160 5	10 4	–1 6	–1 5
$A_3 = 230$ –2	0 3	170 2	60 5	2 6
$A_4 = 240$ –4	3 4	7 7	10 3	230 2

Клетку (2, 3) включаем в базис методом цикла:

	B1= 160 5	B2=180 4	B3=210 7	B4=230 6
A1=140 0	3 8	1 5	140 7	0 6
A2=170 0	160 5	10 4 -	-1 + 6	-1 5
A3=230 -2	0 3	170 2 +	60 5 -	2 6
A4=240 -4	3 4	7 7	10 3	230 2

Величина корректировки составит $q = \min(10, 60) = 10$, изменение цены плана составит $\Delta z_2 = 10\cdot(-1) = -0$.

Получаем новый опорный план:

	$B_1 = 160$	$B_2 = 180$	$B_3 = 210$	$B_4 = 230$
$A_1 = 140$	8	5	140 7	6
$A_2 = 170$	160 5	4	10 6	5
$A_3 = 230$	3	180 2	50 5	6
$A_4 = 240$	4	7	10 3	230 2

Снова применяем метод потенциалов:

	$B_1 = 160$ 6	$B_2 = 180$ 4	$B_3 = 210$ 7	$B_4 = 230$ 6
$A_1 = 140$ 0	2 8	1 5	140 7	0 6
$A_2 = 170$ –1	160 5	1 4	10 6	0 5
$A_3 = 230$ –2	–1 3	180 2	50 5	2 6
$A_4 = 240$ –4	2 4	7 7	10 3	230 2

Клетку (3,1) включаем в базис методом цикла:

	B1= 160 6	B2=180 4	B3=210 7	B4=230 6
A1=140 0	2 8	1 5	140 7	0 6
A2=170 -1	- 160 5	1 4	+ 10 6	0 5
A3=230 -2	+ -1 3	180 2	50 5 -	2 6
A4=240 -4	2 4	7 7	10 3	230 2

$Q = \min(160, 50) = 50;$

$\Delta z_3 = 50 \cdot (-1) = -50$

Получаем план:

	$B1 = 160$	$B2 = 180$	$B3 = 210$	$B4 = 230$
$A1 = 140$	8	5	140 7	6
$A2 = 170$	110 5	4	60 6	5
$A3 = 230$	50 3	180 2	5	6
$A4 = 240$	4	7	10 3	230 2

Применяем метод потенциалов:

	$B_1 = 160$ 6	$B_2 = 180$ 5	$B_3 = 210$ 7	$B_4 = 230$ 6
$A_1 = 140$ 0	2 8	0 5	140 7	0 6
$A_2 = 170$ –1	110 5	0 4	60 6	0 5
$A_3 = 230$ –3	50 3	180 2	1 5	3 6
$A_4 = 240$ –4	2 4	6 7	10 3	230 2

Получили оптимальный план, так как относительные оценки небазисных клеток неотрицательны.

Его цена:

$z_4 = 140 \cdot 7 + 110 \cdot 5 + 180 \cdot 2 + 60 \cdot 6 + 10 \cdot 3 + 230 \cdot 2 + 50 \cdot 3 = 2890.$

Изменение цены в ходе оптимизации $z_3 - z_1 = 3370 - 2890 = 480$.

Эта цена согласуется с суммой корректировок $\Delta z_1 + \Delta z_2 + \Delta z_3 = 420 + 10 + 50 = 480$.

Данный план характеризует следующие поставки, то есть

A_1 поставляет 140 – B_3,

A_2 поставляет 110 – B_1, 60 – B_3;

A_3 поставляет 50 – $B1$, 180 – B_2;

A_4 поставляет 10 – B_3, 230 – B_4.

4. Индивидуальные задания

<table>
<tr><th>№</th><th>Транспортная задача</th><th>№</th><th>Транспортная задача</th></tr>
<tr><td>1</td><td><table>
<tr><td></td><td>B_1</td><td>B_2</td><td>$B3$</td><td>Запас</td></tr>
<tr><td>A_1</td><td>4</td><td>1</td><td>2</td><td>15</td></tr>
<tr><td>A_2</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>17</td></tr>
<tr><td>A_3</td><td>1</td><td>3</td><td>5</td><td>18</td></tr>
<tr><td>Спрос</td><td>20</td><td>20</td><td>10</td><td>50
50</td></tr>
</table></td><td>14</td><td><table>
<tr><td></td><td>B_1</td><td>B_2</td><td>B_3</td><td>Запас</td></tr>
<tr><td>A_1</td><td>4</td><td>1</td><td>2</td><td>15</td></tr>
<tr><td>A_2</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>17</td></tr>
<tr><td>A_3</td><td>1</td><td>3</td><td>5</td><td>18</td></tr>
<tr><td>Спрос</td><td>18</td><td>20</td><td>12</td><td>50
50</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>2</td><td><table>
<tr><td></td><td>B_1</td><td>B_2</td><td>B_3</td><td>Запас</td></tr>
<tr><td>A_1</td><td>4</td><td>1</td><td>2</td><td>15</td></tr>
<tr><td>A_2</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>17</td></tr>
<tr><td>A_3</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>18</td></tr>
<tr><td>Спрос</td><td>20</td><td>20</td><td>10</td><td>50
50</td></tr>
</table></td><td>15</td><td><table>
<tr><td></td><td>B_1</td><td>B_2</td><td>B_3</td><td>Запас</td></tr>
<tr><td>A_1</td><td>4</td><td>1</td><td>2</td><td>15</td></tr>
<tr><td>A_2</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>17</td></tr>
<tr><td>A_3</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>18</td></tr>
<tr><td>Спрос</td><td>20</td><td>15</td><td>15</td><td>50
50</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>3</td><td><table>
<tr><td></td><td>B_1</td><td>B_2</td><td>B_3</td><td>Запас</td></tr>
<tr><td>A_1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>15</td></tr>
<tr><td>A_2</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>17</td></tr>
<tr><td>A_3</td><td>1</td><td>2</td><td>5</td><td>18</td></tr>
<tr><td>Спрос</td><td>20</td><td>20</td><td>10</td><td>50
50</td></tr>
</table></td><td>16</td><td><table>
<tr><td></td><td>B_1</td><td>B_2</td><td>B_3</td><td>Запас</td></tr>
<tr><td>A_1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>15</td></tr>
<tr><td>A_2</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>17</td></tr>
<tr><td>A_3</td><td>1</td><td>2</td><td>5</td><td>18</td></tr>
<tr><td>Спрос</td><td>20</td><td>10</td><td>20</td><td>50
50</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>4</td><td><table>
<tr><td></td><td>B_1</td><td>B_2</td><td>B_3</td><td>Запас</td></tr>
<tr><td>A_1</td><td>4</td><td>1</td><td>2</td><td>15</td></tr>
<tr><td>A_2</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>17</td></tr>
<tr><td>A_3</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>18</td></tr>
<tr><td>Спрос</td><td>20</td><td>20</td><td>10</td><td>50
50</td></tr>
</table></td><td>17</td><td><table>
<tr><td></td><td>B_1</td><td>B_2</td><td>B_3</td><td>Запас</td></tr>
<tr><td>A_1</td><td>4</td><td>1</td><td>2</td><td>15</td></tr>
<tr><td>A_2</td><td>3</td><td>5</td><td>2</td><td>17</td></tr>
<tr><td>A_3</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>18</td></tr>
<tr><td>Спрос</td><td>20</td><td>20</td><td>10</td><td>50
50</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>5</td><td><table>
<tr><td></td><td>B_1</td><td>B_2</td><td>B_3</td><td>Запас</td></tr>
<tr><td>A_1</td><td>4</td><td>1</td><td>2</td><td>15</td></tr>
<tr><td>A_2</td><td>1</td><td>3</td><td>2</td><td>17</td></tr>
<tr><td>A_3</td><td>1</td><td>2</td><td>5</td><td>18</td></tr>
<tr><td>Спрос</td><td>20</td><td>20</td><td>10</td><td>50
50</td></tr>
</table></td><td>18</td><td><table>
<tr><td></td><td>B_1</td><td>B_2</td><td>B_3</td><td>Запас</td></tr>
<tr><td>A_1</td><td>4</td><td>1</td><td>2</td><td>15</td></tr>
<tr><td>A_2</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>17</td></tr>
<tr><td>A_3</td><td>1</td><td>2</td><td>5</td><td>18</td></tr>
<tr><td>Спрос</td><td>10</td><td>20</td><td>20</td><td>50
50</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>№</th><th>Транспортная задача</th><th>№</th><th>Транспортная задача</th></tr>
<tr><td>6</td><td><table>
<tr><td></td><td>B_1</td><td>B_2</td><td>B_3</td><td>Запас</td></tr>
<tr><td>A_1</td><td>4</td><td>1</td><td>2</td><td>15</td></tr>
<tr><td>A_2</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>17</td></tr>
<tr><td>A_3</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>18</td></tr>
<tr><td>Спрос</td><td>20</td><td>20</td><td>10</td><td>50
50</td></tr>
</table></td><td>19</td><td><table>
<tr><td></td><td>B_1</td><td>B_2</td><td>B_3</td><td>Запас</td></tr>
<tr><td>A_1</td><td>4</td><td>1</td><td>2</td><td>15</td></tr>
<tr><td>A_2</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>17</td></tr>
<tr><td>A_3</td><td>4</td><td>2</td><td>3</td><td>18</td></tr>
<tr><td>Спрос</td><td>20</td><td>20</td><td>10</td><td>50
50</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>7</td><td><table>
<tr><td></td><td>B_1</td><td>B_2</td><td>B_3</td><td>Запас</td></tr>
<tr><td>A_1</td><td>3</td><td>1</td><td>2</td><td>15</td></tr>
<tr><td>A_2</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>17</td></tr>
<tr><td>A_3</td><td>1</td><td>2</td><td>5</td><td>18</td></tr>
<tr><td>Спрос</td><td>20</td><td>20</td><td>10</td><td>50
50</td></tr>
</table></td><td>20</td><td><table>
<tr><td></td><td>B_1</td><td>B_2</td><td>B_3</td><td>Запас</td></tr>
<tr><td>A_1</td><td>3</td><td>1</td><td>2</td><td>16</td></tr>
<tr><td>A_2</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>16</td></tr>
<tr><td>A_3</td><td>1</td><td>2</td><td>5</td><td>18</td></tr>
<tr><td>Спрос</td><td>20</td><td>20</td><td>10</td><td>50
50</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>8</td><td><table>
<tr><td></td><td>B_1</td><td>B_2</td><td>B_3</td><td>Запас</td></tr>
<tr><td>A_1</td><td>4</td><td>4</td><td>2</td><td>15</td></tr>
<tr><td>A_2</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>17</td></tr>
<tr><td>A_3</td><td>1</td><td>2</td><td>5</td><td>18</td></tr>
<tr><td>Спрос</td><td>20</td><td>20</td><td>10</td><td>50
50</td></tr>
</table></td><td>21</td><td><table>
<tr><td></td><td>B_1</td><td>B_2</td><td>B_3</td><td>Запас</td></tr>
<tr><td>A_1</td><td>4</td><td>2</td><td>2</td><td>16</td></tr>
<tr><td>A_2</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>16</td></tr>
<tr><td>A_3</td><td>1</td><td>2</td><td>5</td><td>18</td></tr>
<tr><td>Спрос</td><td>20</td><td>20</td><td>10</td><td>50
50</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>9</td><td><table>
<tr><td></td><td>B_1</td><td>B_2</td><td>B_3</td><td>Запас</td></tr>
<tr><td>A_1</td><td>4</td><td>5</td><td>2</td><td>15</td></tr>
<tr><td>A_2</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>17</td></tr>
<tr><td>A_3</td><td>1</td><td>2</td><td>5</td><td>18</td></tr>
<tr><td>Спрос</td><td>20</td><td>20</td><td>10</td><td>50
50</td></tr>
</table></td><td>22</td><td><table>
<tr><td></td><td>B_1</td><td>B_2</td><td>B_3</td><td>Запас</td></tr>
<tr><td>A_1</td><td>4</td><td>5</td><td>2</td><td>15</td></tr>
<tr><td>A_2</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>16</td></tr>
<tr><td>A_3</td><td>1</td><td>2</td><td>5</td><td>19</td></tr>
<tr><td>Спрос</td><td>20</td><td>20</td><td>10</td><td>50
50</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>10</td><td><table>
<tr><td></td><td>B_1</td><td>B_2</td><td>B_3</td><td>Запас</td></tr>
<tr><td>A_1</td><td>4</td><td>1</td><td>2</td><td>15</td></tr>
<tr><td>A_2</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>17</td></tr>
<tr><td>A_3</td><td>5</td><td>2</td><td>5</td><td>18</td></tr>
<tr><td>Спрос</td><td>20</td><td>20</td><td>10</td><td>50
50</td></tr>
</table></td><td>23</td><td><table>
<tr><td></td><td>B_1</td><td>B_2</td><td>B_3</td><td>Запас</td></tr>
<tr><td>A1</td><td>4</td><td>1</td><td>2</td><td>15</td></tr>
<tr><td>A_2</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>16</td></tr>
<tr><td>A_3</td><td>2</td><td>2</td><td>5</td><td>19</td></tr>
<tr><td>Спрос</td><td>20</td><td>20</td><td>10</td><td>50
50</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

№	Транспортная задача					№	Транспортная задача				
11		B_1	B_2	B_3	Запас	24		B_1	B_2	B_3	Запас
	A_1	4	1	4	15		A_1	4	1	4	15
	A_2	3	3	2	17		A_2	3	3	2	17
	A_3	1	2	5	18		A_3	6	2	5	18
	Спрос	20	20	10	50 50		Спрос	15	25	10	50 50
12		B_1	B_2	B_3	Запас	25		B_1	B_2	B_3	Запас
	A_1	4	1	2	15		A_1	4	1	2	15
	A_2	3	3	2	17		A_2	3	3	2	17
	A_3	4	2	5	18		A_3	4	2	5	18
	Спрос	20	20	10	50 50		Спрос	20	25	5	50 50
13		B_1	B_2	B_3	Запас	26		B_1	B_2	B_3	Запас
	A_1	4	1	2	15		A_1	4	1	2	15
	A_2	3	3	2	17		A_2	3	3	2	17
	A_3	5	2	5	18		A_3	5	2	5	18
	Спрос	20	20	10	50 50		Спрос	10	25	15	50 50

5. Контрольные вопросы

1. Записать математическую модель сбалансированной транспортной задачи?
2. Что называется базисом транспортной задачи?
3. Дать определение базисного решения.
4. Что такое смежный базис?
5. Дать определение потенциалов строк и столбцов таблицы транспортной задачи.
6. По какой формуле рассчитываются относительные оценки небазисных клеток.
7. Как определить клетку, включаемую в базис.
8. Как определяется клетка, исключаемая из базиса.
9. Перечислить основные шаги метода потенциалов для транспортной задачи.