МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра программной инженерии

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_______ О.Г. Локтионова
«___» _______ 2018 г.

# МЕТОД АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ

Методические указания к практическому занятию
по дисциплине «Методы оптимальных решений»
для студентов направления подготовки
38.03.01 «Экономика»

Курск 2018

УДК 519.6

Составители: В.В. Свиридов, Т.В. Алябьева

Рецензент:
кандидат технических наук, доцент кафедры программной инженерии
ЮЗГУ *В.В. Апальков*

**Метод анализа иерархий**: методические указания к практическому занятию по дисциплине «Методы оптимальных решений» для студентов направления подготовки 38.03.01 «Экономика» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: В.В. Свиридов, Т.В. Алябьева. Курск, 2018. 29 с.

Изложены основные сведения о математических и алгоритмических основах метода анализа иерархий.

Рассмотрены примеры выполнения заданий. Приведены варианты заданий, контрольные вопросы к защите практической работы.

Методические указания соответствуют требованиям рабочей программы по дисциплине «Методы оптимальных решений».

Материал предназначен для студентов 38.03.01 «Экономика» очной и заочной форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 02.10.2018.. Формат 60 х 84 1/16.
Усл. печ. л.1,4. Уч.- изд. л.1,3. Тираж 100 экз. Заказ 2149. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

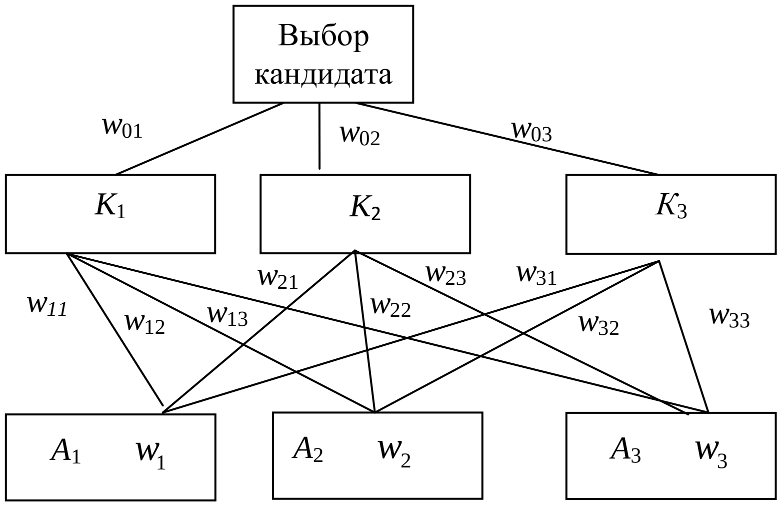
## Содержание

# МЕТОД АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ

## 1. Цель занятия

Целью практического занятия является изучение математических и алгоритмических основ метода анализа иерархий.

**Задание.** Принимается иерархическая схема принятие решения по выбору трех альтернатив $A_1, A_2, A_3$ по трем критериям $K_1, K_2, K_3$:




Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 1 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{pmatrix}$ парных экспертных предпочтений критериев и для каждого критерия $Ki.i = 1, 2, 3$ даны матрицы:

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & 1 & a_{23}^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} \\ a_{21}^{(2)} & 1 & a_{23}^{(2)} \\ a_{31}^{(2)} & a_{32}^{(2)} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(3)} & a_{13}^{(3)} \\ a_{21}^{(3)} & 1 & a_{23}^{(3)} \\ a_{31}^{(3)} & a_{32}^{(3)} & 1 \end{pmatrix}$$

парных сравнений альтернатив по каждому из критериев.

Рассчитать, следуя методу Саати, системы весовых коэффициентов $w_{01}, w_{02}, w_{03}$ критериев($w_{01} + w_{02} + w_{03} = 1$), системы весовых коэффициентов $w_{i1}, w_{i2}, w_{i3}, i = 1, 2, 3$ всех альтернатив по каждому из критериев, рассчитать методом линейной свертки величины относительных весов кандидатов $w_1, w_2, w_3$ по формулам $w_k = \sum_{j=1}^{3} w_{0j} w_{j,k}, k = 1,\ 2,\ 3$. Осуществить оптимальный выбор кандидата из трех альтернатив $A_k$ в соответствии с расчетным обобщенным критерием $w_k, k = 1,\ 2\ ,3$.

Для трех критериев даны матрицы парных сравнений. Получить оптимальные веса критериев данным методом.

Выбрать наилучшего кандидата из трех альтернатив данным методом.

## 2. Краткие теоретические сведения

Пусть имеется набор $n$ объектов (факторов), подлежащих сравнению. Обозначим эти объекты символами $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Пусть в рамках экспертного оценивания эти объекты характеризуются соответственно с помощью положительных чисел $w_1, w_2, \ldots, w_n$ на наличие и степень проявления некоторого рассматриваемого экспертизой свойства. К примеру, число $w_i$ отражает степень проявления (интенсивность) рассматриваемого свойства у объекта $A_i$. Числа $w_i$ ($i$ =1, …, $n$) в зависимости от контекста именуют «весами», «интенсивностями», «коэффициентами важности» объектов $A_i$.

Для удобства, и не в ущерб общности рассматриваемой задачи, в дальнейшем будем оперировать нормированными величинами $w_i$ ($i = 1, \ldots, n$), которые обладают тем свойством, что $w_1 + w_2 + \ldots + w_n = 1$.

Таким образом, при использовании нормированных величин можно утверждать, что $w_i$ 100% представляет собой вес объекта (фактора) $A_i$, выраженный в процентах.

Сопоставим вес каждого из объектов с весами других объектов, образуя тем самым так называемую *матрицу относительных весов*

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \dots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \dots & \frac{w_2}{w_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_1} & \dots & \frac{w_n}{w_1} \end{pmatrix}$$

Матрица относительных весов обладает четырьмя важными свойствами:

1. $a_{ij} = w_i / w_j > 0$ для всех $i$ и $j$, так как все веса $w_i$ и $w_j$ положительны.
2. $a_{ij} = w_i / w_j = 1$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$.
3. Матрица $A$ обратно симметрична, а именно $a_{ij} = 1/a_{ji}$

$$a_{ij} = \frac{w_i}{w_j} = \frac{1}{\frac{w_j}{w_i}} = \frac{1}{a_{ji}} \text{ для всех } i \text{ и } j.$$

4. Матрица $A$ обладает свойством совместности, а именно

$$a_{ij} a_{jk} = \frac{w_i}{w_j} \frac{w_j}{w_k} = \frac{w_i}{w_k} = a_{ik} \text{ для всех } i, j \text{ и } k.$$

Если из весов $w_1, w_2, \dots, w_n$ образовать вектор-столбец $w$

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix},$$

то нетрудно убедиться, что имеет место равенство

$$Aw = nw, \tag{1}$$

если заметить, что $i$-я компонента вектора, записанного в левой части соотношения (1), равна

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} \cdots a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = a_{i1}w_1 + a_{i2}w_2 + \cdots + a_{in}w_n =$$

$$= \frac{w_i}{w_1} w_1 + \frac{w_i}{w_2} w_2 + \cdots + \frac{w_i}{w_n} w_n = nw_i,$$

что совпадает с $i$-ой компонентой вектора, расположенного в правой части соотношения (1).

Выполнение равенства (1) означает, что число $n$ является *собственным значением* (числом) матрицы относительных весов $A$ в то время как $w$ является *собственным вектором*, соответствующим этому собственному значению.

Напомним, что в линейной алгебре число λ называют собственным значением матрицы $A$, а ненулевой вектор-столбец $x$ – собственным вектором, соответствующим собственному значению λ, если имеет место равенство

$$Ax = \lambda x$$

Для матрицы относительных весов, обладающей четырьмя рассмотренными выше свойствами, можно доказать следующее положение.

**Теорема.** «Матрица относительных весов $A = \left( w_i / w_j \right)$ имеет лишь два вещественных собственных значения: $n$ и 0».

Если обозначить $\lambda_{\max} = n = \max\{n;\ 0\}$, то в соответствии с этой теоремой равенство (1) можно представить в виде

$$Aw = \lambda_{\max} w \tag{2}$$

На практике при проведении экспертного оценивания экспертам очень трудно одновременно сопоставить свойства всей группы сравниваемых объектов (факторов) $A_1$, $A_2$, …, $A_n$, которых может быть весьма много, и назначить им соответствующие веса $w_1$, $w_2$ …, $w_n$. Куда легче сравнивать объекты попарно, характеризуя с помощью какой-либо шкалы оценок степень преимущества одного объекта над другим. Взвешивая экспертное превосходство одного объекта над другим, и не удерживая в памяти все множество отношений между рассматриваемыми объектами, мы вправе рассчитывать на то, что экспертное оценивание будет более обоснованным и корректным. Схема попарного сравнения объектов широко используется в различных методах экспертного оценивания и приводит к построению матрицы парных сравнений

$$A^* = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Заполняя клетки этой матрицы, при парном сравнении эксперт не знает всего набора чисел $w_1$, $w_2$ …, $w_n$, то есть весов объектов. Его задача как раз и состоит в том, чтобы определить их впоследствии.

При парном сравнении матрица заполняется числами $a_{ij} = w_i / w_j$, характеризующими относительное превосходство (важность, вес) объекта $A_i$ над объектом $A_j$, в то время как собственные веса этих объектов $w_i$ и $w_j$ пока еще не определены. Иными словами, $a_{ij}$ назначается экспертом, а веса $w_i$ и $w_j$, образующие при делении друг на друга величину $a_{ij}$, подлежат последующему определению.

Для назначения чисел $a_{ij}$ необходимо договориться о шкале, по которой будет оцениваться превосходство одного объекта над другим при их попарном сравнении. Для целей экспертного оценивания примем 9-балльную шкалу, предложенную автором метода анализ

Шкала относительной важности

| Интенсивность относительной важности в баллах | Определение | Объяснение |
|---|---|---|
| 1 | Равная важность | Важность объектов (факторов) $A_i$ *и* $A_j$ одинакова |
| 3 | Умеренное превосходство одного над другим | Опыт и суждения дают легкое превосходство одному объекту (фактору) над другим |

| Интенсивность относительной важности в баллах | Определение | Объяснение |
| --- | --- | --- |
| 5 | Существенное или сильное превосходство | Имеющиеся данные свидетельствуют о заметном превосходстве $A_i$ над $A_j$ |
| 7 | Очень сильное превосходство | Превосходство объекта (фактора) $A_i$ над $A_j$ очевидно |
| 9 | Абсолютное превосходство | Очевидность превосходства $A_i$ над $A_j$ подтверждается всеми имеющимися признаками |
| 2, 4, 6, 8 | Промежуточные решения между двумя соседними суждениями | Применяются в компромиссных случаях |

Шкала относительной важности содержит, очевидно, и все обратные числа 1/9, 1/7, 1/5, 1/3 и промежуточные значения 1/8, 1/6, 1/4, 1/2.

Матрица парных сравнений заполняется, как правило, следующим образом. Объект $A_1$ сравнивают со всеми остальными $A_2, \ldots, A_n$, заполняя последовательно первую строку матрицы. Затем объект $A_2$ сравнивают со всеми остальными, заполняя вторую строку числами $a_{ij}$, определяемыми по шкале относительной важности и так далее. Если вес объекта $A_i$ равен весу объекта $A_j$, то сообразно шкале $a_{ij} = 1$. Если вес объекта $A_i$ больше веса объекта $A_j$, то в соответствии со шкалой эксперт определяет степень превосходства, выраженную в баллах, причем $a_{ij} > 1$. Если наоборот вес объекта $A_i$ меньше веса объекта $A_j$, то по шкале задается балльная оценка $a_{ij} < 1$.

По правилам заполнения матриц парных сравнений должны выполняться условия:

1. $a_{ij} = w_i / w_j > 0$ для всех $i$ и $j$, так как все балльные оценки положительны.

2. $a_{ii} = w_i / w_i = 1$ для всех $i = 1, 2,\ldots, n$.

3. Элементы матрицы $A$ обладают обратной симметрией, а именно $a_{ij} = 1/a_{ji}$, иначе говоря, если превосходство объекта $A_i$ над объектом $A_j$ оценивается по шкале, например, в 5 баллов и $a_{ij} = 5$, то обратное сопоставление объекта $A_j$ с $A_i$ должно автоматически давать оценку $a_{ji} = 1/5$.

Очевидно, что в силу обратной симметричности при заполнении матрицы парных сравнений удобно определять только элементы, стоящие выше диагонали. Диагональные элементы равны единице, а элементы под диагональю в силу обратной симметричности определяются автоматически.

Необходимо обратить внимание на то, что матрица парных сравнений обладает всеми свойствами матрицы относительных весов в схеме идеального сравнения, кроме четвертого. Таким образом, она не обладает, вообще говоря, свойством совместности $a_{ij}a_{jk} = a_{ik}$.

Это, очевидно, происходит из-за того, что эксперт не знает точно веса объектов $w_1, w_2, \ldots, w_n$, а оперирует лишь их отношениями $a_{ij}$.

Можно найти максимальное вещественное собственное значение $\lambda^*_{\max}$ и собственный вектор $w^*$ матрицы парных сравнений. Вообще говоря, $\lambda^*_{\max}$ и $w^*$ не совпадают с соответствующим собственным значением $\lambda_{\max} = n$ и собственным вектором $w$ матрицы относительных весов в схеме идеального сравнения.

Можно доказать, что в общем случае имеет место неравенство $\lambda^*_{\max} \geq n$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда матрица $A^*$ является совместной, то есть выполняется четвертое свойство $a_{ij}a_{jk} = a_{ik}$.

Определив $\lambda^*_{\max}$ одним из методов линейной алгебры, можно найти и вектор $w^*$, который будет мало отличаться от «истинного» вектора $w$. Вектор $w^*$ определяется, например, из системы однородных уравнений

$$\left(A^* - \lambda^*_{\max}E\right)w^* = 0. \qquad (3)$$

Вектор $w^*$, удовлетворяющий условию нормирования

$$w_1^* + w_2^* + \cdots + w_n^* = 1, \quad (4)$$

как доказывается в линейной алгебре, всегда существует и определяется однозначно.

Применение предложенного подхода будет оправдано, если реальная ситуация окажется близкой к идеальной. В качестве меры отклонения реальной схемы от идеальной согласно методу Саати используется индекс совместности, определяемый по формуле

$$I_c = \frac{\lambda_{\max}^* - n}{n-1} \quad (5)$$

Если $I$с < 0,2, то считается, что расхождение между идеальной и реальной схемами сравнения находится в допустимых пределах и полученным результатам можно доверять. Если это условие не выполняется, следует пересмотреть задачу, уточнить экспертные оценки и заново сформировать матрицу парных сравнений $A$*.

По методике Т. Саати предлагается следующие приближенные способы определения собственных значений и собственных векторов матрицы парных сравнений.

1. *Алгоритм приближенного определения собственного вектора матрицы $A^*$.*

Если имеется матрица парных сравнений

$$A^* = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

то компонента $w_i$ ее собственного вектора $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ может быть приближенно вычислена по формуле

$$w_i = \sqrt[n]{a_{i1} a_{i2} a_{i3} \cdots a_{in}}\,. \quad (6)$$

2. *Алгоритм приближенного вычисления собственного значения $\lambda_{\max}^*$ матрицы $A^*$.*

а) найти сумму каждого столбца матрицы $A^*$: $S_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$;

б) умножить сумму каждого столбца $S_j$ на соответствующую по номеру компоненту $w_j$ нормализованного собственного вектора;

в) определить $\lambda^*_{\max} \cong \sum_{j=1}^{n} S_j w_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_j$ .

3. *Алгоритм построения нормированного вектора.*

Пусть дан ненормированный вектор $w^*$, то есть его компоненты не отвечают условию: $w_1^* + w_2^* + \cdots + w_n^* = 1$. Для того, чтобы нормировать вектор найдем сумму всех его компонент $\sum_{i=1}^{n} w_i^*$ , после чего компоненты нормированного вектора можно определить следующим образом:

$$w = \begin{pmatrix} w_1^* \Big/ \sum_{i=1}^{n} w_i^* \\ w_2^* \Big/ \sum_{i=1}^{n} w_i^* \\ \vdots \\ w_n^* \Big/ \sum_{i=1}^{n} w_i^* \end{pmatrix}.$$

## 3. Пример выполнения задания

Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1/5 & 1 & 1/7 \\ 1/3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ парных экспертных предпочтений критериев и для каждого критерия $Ki.i = 1, 2,3$ даны матрицы $A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 1/5 & 1 & 8 \\ 1/4 & 1/8 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1/4 & 1 & 3 \\ 1/3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$ парных сравнений альтернатив по каждому из критериев.

1. *Расчет относительных весов критериев.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1/5 & 1 & 1/7 \\ 1/3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Оценка компонент собственного вектора, отвечающего λmax

$$w01 := (1 \cdot 5 \cdot 3)^{\frac{1}{3}} \qquad w01 = 2.466$$

$$w02 := \left(\frac{1}{5} \cdot 1 \cdot \frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad w02 = 0.306$$

$$w03 := \left(\frac{1}{3} \cdot 7 \cdot 1\right)^{\frac{1}{3}} \qquad w03 = 1.326$$

$$w0 := \begin{pmatrix} w01 & w02 & w03 \end{pmatrix}^T$$

$$w0 = \begin{pmatrix} 2.466 \\ 0.306 \\ 1.326 \end{pmatrix}$$

Нормировка вектора

$$w0 := \frac{w0}{2.466 + 0.306 + 1.326}$$

$$w0 = \begin{pmatrix} 0.602 \\ 0.075 \\ 0.324 \end{pmatrix}$$

Суммы в столбцах матрицы А

$$a := \left( \sum_{i=1}^{3} A_{i-1,0} \quad \sum_{i=1}^{3} A_{i-1,1} \quad \sum_{i=1}^{3} A_{i-1,2} \right)$$

$$a = \begin{pmatrix} 1.533 & 13 & 4.143 \end{pmatrix}$$

$$\lambda max := w0_0 \cdot a_{0,0} + w0_1 \cdot a_{0,1} + w0_2 \cdot a_{0,2}$$

$$\lambda max = 3.233$$

Видим $\lambda max=3.233$ что примерно равно $n=3$

Расчет критерия качества матрицы экспертных оценок

$$I_c = \frac{\lambda^*_{\max} - n}{n-1}$$

$$Ic := \frac{(3.233 - 3)}{3 - 1}$$

$$Ic = 0.117$$

Данная величина меньше 20%, поэтому матрица экспертных оценок по сравнению критериев корректна с достаточной точностью.

2. *Расчет относительных весов альтернатив по первому критерию.*

$$A1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Оценка компонент собственного вектора, отвечающего λmax

$$w11 := \left(1\cdot 1\cdot \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad w11 = 0.794$$

$$w12 := (1\cdot 1\cdot 3)^{\frac{1}{3}} \qquad w12 = 1.442$$

$$w13 := \left(2\cdot \frac{1}{3}\cdot 1\right)^{\frac{1}{3}} \qquad w13 = 0.874$$

$$w1 := (\,w11 \;\; w12 \;\; w13\,)^T$$

$$w1 = \begin{pmatrix} 0.794 \\ 1.442 \\ 0.874 \end{pmatrix}$$

Нормировка вектора

$$w1 := \frac{w1}{0.794 + 1.442 + 0.874}$$

$$w1 = \begin{pmatrix} 0.255 \\ 0.464 \\ 0.281 \end{pmatrix}$$

Суммы в столбцах матрицы A1

$$a := \left( \sum_{i=1}^{3} A1_{i-1,0} \quad \sum_{i=1}^{3} A1_{i-1,1} \quad \sum_{i=1}^{3} A1_{i-1,2} \right)$$

$a = (4 \quad 2.333 \quad 4.5)$

$\lambda max := w1_0 \cdot a_{0,0} + w1_1 \cdot a_{0,1} + w1_2 \cdot a_{0,2}$

$\lambda max = 3.367$

Расчет критерия качества матрицы экспертных оценок

$$I_c = \frac{\lambda^*_{\max} - n}{n-1}$$

$$Ic := \frac{(3.367 - 3)}{3 - 1}$$

$Ic = 0.184$

Данная величина меньше 20%, поэтому матрица экспертных оценок по сравнению критериев корректна с достаточной точностью

3. *Расчет относительных весов альтернатив по второму критерию.*

$$A2 := \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ \frac{1}{5} & 1 & 8 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 1 \end{pmatrix}$$

Оценка компонент собственного вектора, отвечающего λmax

$$w21 := (1 \cdot 5 \cdot 4)^{\frac{1}{3}} \qquad w21 = 2.714$$

$$w22 := \left(\frac{1}{5} \cdot 1 \cdot 8\right)^{\frac{1}{3}} \qquad w22 = 1.17$$

$$w23 := \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot 1\right)^{\frac{1}{3}} \qquad w23 = 0.315$$

$$w2 := \begin{pmatrix} w21 & w22 & w23 \end{pmatrix}^T$$

$$w2 = \begin{pmatrix} 2.714 \\ 1.17 \\ 0.315 \end{pmatrix}$$

Нормировка вектора

$$w2 := \frac{w2}{2.714 + 1.17 + 0.315}$$

$$w2 = \begin{pmatrix} 0.646 \\ 0.279 \\ 0.075 \end{pmatrix}$$

Суммы в столбцах матрицы A2

$$a := \left( \sum_{i=1}^{3} A2_{i-1,0} \quad \sum_{i=1}^{3} A2_{i-1,1} \quad \sum_{i=1}^{3} A2_{i-1,2} \right)$$

$a = (1.45 \quad 6.125 \quad 13)$

$\lambda max := w2_0 \cdot a_{0,0} + w2_1 \cdot a_{0,1} + w2_2 \cdot a_{0,2}$

$\lambda max = 3.619$

Расчет критерия качества матрицы экспертных оценок

$$I_c = \frac{\lambda^*_{\max} - n}{n-1}$$

$$Ic := \frac{(3.619 - 3)}{3 - 1}$$

$Ic = 0.31$

Данная величина больше 20%, поэтому матрица экспертных оценок по сравнению критериев не является корректной с достаточной точностью.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ \frac{1}{5} & 1 & 8 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 1 \end{pmatrix}$$

Условие A(i,j)*A(j,k)=A(i,k) слишком сильно нарушено,
A(1,2)*A(2,3)=5*8=40;A(1,3)=4
необходимо скорректировать экспертные оценки

$$A2 := \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ \frac{1}{5} & 1 & 3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$w21 := (1\cdot 5\cdot 4)^{\frac{1}{3}} \qquad w21 = 2.714$$

$$w22 := \left(\frac{1}{5}\cdot 1\cdot 3\right)^{\frac{1}{3}} \qquad w22 = 0.843$$

$$w23 := \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1\right)^{\frac{1}{3}} \qquad w23 = 0.437$$

$$w2 := (w21 \quad w22 \quad w23)^{T}$$

$$w2 = \begin{pmatrix} 2.714 \\ 0.843 \\ 0.437 \end{pmatrix}$$

Нормировка вектора

$$w2 := \frac{w2}{2.714 + 0.843 + 0.437}$$

$$w2 = \begin{pmatrix} 0.68 \\ 0.211 \\ 0.109 \end{pmatrix}$$

Суммы в столбцах матрицы А2

$$a := \left( \sum_{i=1}^{3} A2_{i-1,0} \quad \sum_{i=1}^{3} A2_{i-1,1} \quad \sum_{i=1}^{3} A2_{i-1,2} \right)$$

$$a = (1.45 \quad 6.333 \quad 8)$$

$$\lambda max := w2_0 \cdot a_{0,0} + w2_1 \cdot a_{0,1} + w2_2 \cdot a_{0,2}$$

$$\lambda max = 3.198$$

Расчет критерия качества матрицы экспертных оценок

$$I_c = \frac{\lambda^*_{\max} - n}{n-1}$$

$$Ic := \frac{(3.198 - 3)}{3 - 1}$$

$$Ic = 0.099$$

Данная величина меньше 20%, поэтому матрица экспертных оценок по сравнению критериев корректна с достаточной точностью

4. *Расчет относительных весов альтернатив по третьему критерию.*

$$A3 := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ \frac{1}{4} & 1 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$w31 := (1 \cdot 4 \cdot 3)^{\frac{1}{3}} \qquad w31 = 2.289$$

$$w32 := \left(\frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 3\right)^{\frac{1}{3}} \qquad w32 = 0.909$$

$$w33 := \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1\right)^{\frac{1}{3}} \qquad w33 = 0.481$$

$$w3 := (w31 \;\; w32 \;\; w33)^T$$

$$w3 = \begin{pmatrix} 2.289 \\ 0.909 \\ 0.481 \end{pmatrix}$$

Нормировка вектора

$$w3 := \frac{w3}{2.289 + 0.909 + 0.481}$$

$$w3 = \begin{pmatrix} 0.622 \\ 0.247 \\ 0.131 \end{pmatrix}$$

Суммы в столбцах матрицы А3

$$a := \left( \sum_{i=1}^{3} A3_{i-1,0} \;\; \sum_{i=1}^{3} A3_{i-1,1} \;\; \sum_{i=1}^{3} A3_{i-1,2} \right)$$

$$a = (1.583 \;\; 5.333 \;\; 7)$$

$$\lambda max := w3_0 \cdot a_{0,0} + w3_1 \cdot a_{0,1} + w3_2 \cdot a_{0,2}$$

$$\lambda max = 3.217$$

Расчет критерия качества матрицы экспертных оценок

$$I_c = \frac{\lambda^*_{max} - n}{n-1}$$

$$Ic := \frac{(3.217 - 3)}{3 - 1}$$

$$Ic = 0.109$$

Данная величина меньше 20%, поэтому матрица экспертных оценок по сравнению критериев корректна с достаточной точностью

5. *Расчет относительных весов кандидатов методом линейной свертки.*

$$W1 := \sum_{i=1}^{3} \left(w0_{i-1} \cdot w1_{i-1}\right) \qquad W1 = 0.279$$

$$W2 := \sum_{i=1}^{3} \left(w0_{i-1} \cdot w2_{i-1}\right) \qquad W2 = 0.46$$

$$W3 := \sum_{i=1}^{3} \left(w0_{i-1} \cdot w3_{i-1}\right) \qquad W3 = 0.435$$

6. *Принятие решение по методу иерархий.*

Второй кандидат $A_2$ имеет наибольшую величину $W_2 = 0.46$ сводного критерия и поэтому является наиболее предпочтительным.

## 4. Индивидуальные задания

| № | Вариант |
|---|---|
| 1 | $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1/5 & 1 & 1/6 \\ 1/3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ $A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 1/5 & 1 & 8 \\ 1/4 & 1/8 & 1 \end{pmatrix}$ $A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1/4 & 1 & 3 \\ 1/4 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$ |
| 2 | $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/2 & 1 & 1/6 \\ 1/3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ $A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 1/5 & 1 & 8 \\ 1/4 & 1/8 & 1 \end{pmatrix}$ $A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1/4 & 1 & 3 \\ 1/2 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$ |

| № | Вариант |
|---|---|
| 3 | $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1/2 & 1 & 1/6\\ 1/3 & 6 & 1\end{pmatrix} A^{(1)}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1/2\\ 1 & 1 & 5\\ 2 & 1/5 & 1\end{pmatrix},$ $A^{(2)}=\begin{pmatrix}1 & 5 & 4\\ 1/5 & 1 & 8\\ 1/4 & 1/8 & 1\end{pmatrix} A^{(3)}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 1/4 & 1 & 3\\ 1/2 & 1/3 & 1\end{pmatrix}$ |
| 4 | $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1/2 & 1 & 1/6\\ 1/3 & 6 & 1\end{pmatrix} A^{(1)}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1/2\\ 1 & 1 & 3\\ 2 & 1/3 & 1\end{pmatrix},$ $A^{(2)}=\begin{pmatrix}1 & 5 & 4\\ 1/5 & 1 & 8\\ 1/4 & 1/8 & 1\end{pmatrix} A^{(3)}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 1/4 & 1 & 3\\ 1/2 & 1/3 & 1\end{pmatrix}$ |
| 5 | $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1/2 & 1 & 1/6\\ 1/3 & 6 & 1\end{pmatrix} A^{(1)}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1/2\\ 1 & 1 & 3\\ 2 & 1/3 & 1\end{pmatrix},$ $A^{(2)}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 1/3 & 1 & 8\\ 1/4 & 1/8 & 1\end{pmatrix} A^{(3)}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 1/4 & 1 & 3\\ 1/2 & 1/3 & 1\end{pmatrix}$ |
| 6 | $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1/2 & 1 & 1/6\\ 1/3 & 6 & 1\end{pmatrix} A^{(1)}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1/2\\ 1 & 1 & 3\\ 2 & 1/3 & 1\end{pmatrix},$ $A^{(2)}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 1/3 & 1 & 6\\ 1/4 & 1/6 & 1\end{pmatrix} A^{(3)}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 1/4 & 1 & 3\\ 1/2 & 1/3 & 1\end{pmatrix}$ |
| 7 | $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1/2 & 1 & 1/5\\ 1/3 & 5 & 1\end{pmatrix} A^{(1)}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1/2\\ 1 & 1 & 3\\ 2 & 1/3 & 1\end{pmatrix},$ $A^{(2)}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 1/3 & 1 & 8\\ 1/4 & 1/8 & 1\end{pmatrix} A^{(3)}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 1/4 & 1 & 3\\ 1/2 & 1/3 & 1\end{pmatrix}$ |

| № | Вариант |
|---|---|
| 8 | $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1/2 & 1 & 1/5\\ 1/3 & 5 & 1\end{pmatrix} A^{(1)}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1/2\\ 1/3 & 1 & 3\\ 2 & 1/3 & 1\end{pmatrix},$ $A^{(2)}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 1/3 & 1 & 8\\ 1/4 & 1/8 & 1\end{pmatrix} A^{(3)}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 1/4 & 1 & 3\\ 1/2 & 1/3 & 1\end{pmatrix}$ |
| 9 | $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1/2 & 1 & 1/5\\ 1/3 & 5 & 1\end{pmatrix} A^{(1)}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1/2\\ 1/3 & 1 & 3\\ 2 & 1/3 & 1\end{pmatrix},$ $A^{(2)}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 1/3 & 1 & 8\\ 1/4 & 1/8 & 1\end{pmatrix} A^{(3)}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 1/4 & 1 & 2\\ 1/2 & 1/2 & 1\end{pmatrix}$ |
| 10 | $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1/2 & 1 & 1/5\\ 1/3 & 5 & 1\end{pmatrix} A^{(1)}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1/2\\ 1/3 & 1 & 3\\ 2 & 1/3 & 1\end{pmatrix},$ $A^{(2)}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 1/3 & 1 & 8\\ 1/4 & 1/8 & 1\end{pmatrix} A^{(3)}=\begin{pmatrix}1 & 5 & 2\\ 1/5 & 1 & 3\\ 1/2 & 1/3 & 1\end{pmatrix}$ |
| 11 | $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1/2 & 1 & 1/5\\ 1/3 & 5 & 1\end{pmatrix} A^{(1)}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1/2\\ 1/3 & 1 & 3\\ 2 & 1/3 & 1\end{pmatrix},$ $A^{(2)}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 1/3 & 1 & 8\\ 1/4 & 1/8 & 1\end{pmatrix} A^{(3)}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 1/4 & 1 & 2\\ 1/2 & 1/2 & 1\end{pmatrix}$ |
| 12 | $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1/2 & 1 & 1/5\\ 1/3 & 5 & 1\end{pmatrix} A^{(1)}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1/2\\ 1/2 & 1 & 3\\ 2 & 1/3 & 1\end{pmatrix},$ $A^{(2)}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 1/3 & 1 & 8\\ 1/4 & 1/8 & 1\end{pmatrix} A^{(3)}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 1/4 & 1 & 3\\ 1/2 & 1/3 & 1\end{pmatrix}$ |

| № | Вариант |
|---|---|
| 13 | $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1/2 & 1 & 1/4\\ 1/3 & 4 & 1\end{pmatrix}$ $A^{(1)}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1/2\\ 1/3 & 1 & 3\\ 2 & 1/3 & 1\end{pmatrix}$, $A^{(2)}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 1/3 & 1 & 8\\ 1/4 & 1/8 & 1\end{pmatrix}$ $A^{(3)}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 1/4 & 1 & 3\\ 1/2 & 1/3 & 1\end{pmatrix}$ |
| 14 | $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1/2 & 1 & 1/4\\ 1/3 & 4 & 1\end{pmatrix}$ $A^{(1)}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1/2\\ 1/3 & 1 & 3\\ 2 & 1/3 & 1\end{pmatrix}$, $A^{(2)}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\ 1/3 & 1 & 8\\ 1/3 & 1/8 & 1\end{pmatrix}$ $A^{(3)}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 1/4 & 1 & 3\\ 1/2 & 1/3 & 1\end{pmatrix}$ |
| 15 | $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1/2 & 1 & 1/2\\ 1/3 & 2 & 1\end{pmatrix}$ $A^{(1)}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1/2\\ 1/3 & 1 & 3\\ 2 & 1/3 & 1\end{pmatrix}$, $A^{(2)}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\ 1/3 & 1 & 8\\ 1/3 & 1/8 & 1\end{pmatrix}$ $A^{(3)}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 1/4 & 1 & 3\\ 1/2 & 1/3 & 1\end{pmatrix}$ |
| 16 | $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1/2 & 1 & 1/4\\ 1/3 & 4 & 1\end{pmatrix}$ $A^{(1)}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1/2\\ 1/3 & 1 & 4\\ 2 & 1/4 & 1\end{pmatrix}$, $A^{(2)}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\ 1/3 & 1 & 8\\ 1/3 & 1/8 & 1\end{pmatrix}$ $A^{(3)}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 1/4 & 1 & 3\\ 1/2 & 1/3 & 1\end{pmatrix}$ |
| 17 | $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1/2 & 1 & 1/2\\ 1/3 & 2 & 1\end{pmatrix}$ $A^{(1)}=\begin{pmatrix}1 & 1/3 & 1/2\\ 3 & 1 & 3\\ 2 & 1/3 & 1\end{pmatrix}$, $A^{(2)}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\ 1/3 & 1 & 8\\ 1/3 & 1/8 & 1\end{pmatrix}$ $A^{(3)}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 1/4 & 1 & 3\\ 1/2 & 1/3 & 1\end{pmatrix}$ |

| № | Вариант |
|---|---|
| 18 | $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1/2 & 1 & 1/2\\ 1/3 & 2 & 1\end{pmatrix}$ $A^{(1)}=\begin{pmatrix}1 & 1/3 & 1/2\\ 3 & 1 & 3\\ 2 & 1/3 & 1\end{pmatrix}$, $A^{(2)}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\ 1/3 & 1 & 5\\ 1/3 & 1/5 & 1\end{pmatrix}$ $A^{(3)}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 1/4 & 1 & 3\\ 1/2 & 1/3 & 1\end{pmatrix}$ |
| 19 | $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1/2 & 1 & 1/2\\ 1/3 & 2 & 1\end{pmatrix}$ $A^{(1)}=\begin{pmatrix}1 & 1/3 & 1/2\\ 3 & 1 & 3\\ 2 & 1/3 & 1\end{pmatrix}$, $A^{(2)}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\ 1/3 & 1 & 2\\ 1/3 & 1/2 & 1\end{pmatrix}$ $A^{(3)}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 1/4 & 1 & 3\\ 1/2 & 1/3 & 1\end{pmatrix}$ |
| 20 | $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1/2 & 1 & 1/2\\ 1/3 & 2 & 1\end{pmatrix}$ $A^{(1)}=\begin{pmatrix}1 & 1/5 & 1/2\\ 5 & 1 & 3\\ 2 & 1/3 & 1\end{pmatrix}$, $A^{(2)}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\ 1/3 & 1 & 8\\ 1/3 & 1/8 & 1\end{pmatrix}$ $A^{(3)}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 1/4 & 1 & 3\\ 1/2 & 1/3 & 1\end{pmatrix}$ |

## 5. Контрольные вопросы

1. Перечислите основные этапы метода анализа иерархий.
2. Опишите процесс попарного сравнения объекта по какому-либо признаку.
3. Опишите шкалу выбора приоритетов.
4. Перечислите основные свойства матрицы попарных сравнений.
5. Как происходит формирование вектора локальных приоритетов?
6. Опишите процесс свертки сводной матрицы локальных приоритетов.
7. На основании чего происходит выбор оптимального варианта в методе анализа иерархий?
8. Используются ли в методе анализа иерархий основные принципы синтеза сложных систем?
9. Можно ли отнести метод анализа иерархий к методам экспертных оценок?